

Markov operator cocycle の漸近的周期性

北見工業大学・工学部 中村 文彦

Fumihiko Nakamura

Department of engineering, Kitami Institute of Technology

東海大学・理学部 中野 雄史

Yushi Nakano

Department of Mathematics, Tokai University

本稿は, Lasota-Li-Yorke [2] および Komorník [3] によって示された「収斂的 (constrictive) マルコフ作用素は, 漸近周期的 (asymptotically periodic) である。」という命題を, ランダム力学系の性質として拡張した結果 [1] について, 定理を証明するための条件や設定をまとめたものである.

$(X, \mathcal{G}, m)$ を確率空間とし, $L^1(X, m)$ を X 上の m 可積分関数全体の集合, $L_+^1(X, m) := \{f \in L^1(X, m) \mid f \geq 0 \text{ } m\text{-a.e.}\}$, $D(X, m) := \{f \in L_+^1(X, m) \mid \|f\|_m = 1\}$ とする. $D(X, m)$ の元は密度関数と呼ばれる. 有界線形作用素 $P: L^1(X, m) \rightarrow L^1(X, m)$ がマルコフ作用素であるとは,

- $f \in L^1(X, m)$ かつ $f \geq 0$ m -a.e. ならば, $Pf \geq 0$ m -a.e. (正値性)
- $f \in L^1(X, m)$ かつ $f \geq 0$ m -a.e. ならば, $\|Pf\|_m = \|f\|_m$ (ノルム不変性)

が成り立つときを言う. そして, マルコフ作用素 P が漸近周期的 (asymptotically periodic) とは, ある自然数 $r \geq 1$, 密度関数の列 $\{g_i\}_{i=1}^r \subset D(X, m)$, 有界線形汎関数の列 $\{\lambda_i: L^1(X, m) \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^r$, さらに $\{1, \dots, r\}$ の置換 ρ が存在して,

(i) $i \neq j$ ならば, $m(\text{supp} g_i \cap \text{supp} g_j) = 0$,

(ii) すべての $i = 1, \dots, r$ に対して, $Pg_i = g_{\rho(i)}$,

(iii) 任意の $f \in L^1(X)$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| P^n f - \sum_{i=1}^r \lambda_i(f) g_{\rho(i)} \right\|_m = 0$,

が成り立つときを言う. これをランダム力学系の性質として拡張する.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし, $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$ を $\mathbb{P}$ -保測な変換とする. 可測空間 Σ に対して, 可測写像 $\Phi: \Omega_0 \times \Omega \times \Sigma \rightarrow \Sigma$ が σ を駆動系とする Σ 上のランダム力学系であるとは,

$$\varphi_\omega^{(n+m)} = \varphi_{\sigma^m \omega}^{(n)} \circ \varphi_\omega^{(m)}, \quad \varphi_\omega^{(0)} = \text{id}_\Sigma$$

がすべての $m, n \in \mathbb{N}_0$ と $\omega \in \Omega$ について成り立つときをいう. ただし, $\varphi_\omega^{(n)} = \Phi(n, \omega, \cdot)$, $\sigma\omega = \sigma(\omega)$ である. このランダム力学系に対する一般論については [4] を参照せよ. 定義からすぐに,

$$\varphi_\omega^{(n)} = \varphi_{\sigma^{n-1}\omega} \circ \varphi_{\sigma^{n-2}\omega} \circ \dots \circ \varphi_\omega \quad (1)$$

であることがわかる. 逆に, 可測写像 $\varphi: \Omega \times \Sigma \rightarrow \Sigma: (\omega, x) \mapsto \varphi_\omega(x)$ に対し, (1) で定義される可測写像 $(n, \omega, x) \mapsto \varphi_\omega^{(n)}(x)$ はランダム力学系となる. これを σ 上で φ によって誘導されるランダム力学系と呼び, (φ, σ) と表すことにする. 特に, Σ がバナッハ空間で, $\varphi_\omega: \Sigma \rightarrow \Sigma$ がほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して線形作用素であるとき, (φ, σ) は Linear operator cocycle と呼ばれる.

定義 1. $\mathbb{P}$ -保測な変換 $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$ 上で, 可測写像 $P: \Omega \times L^1(X, m) \rightarrow L^1(X, m)$ から誘導される Linear operator cocycle (P, σ) が Markov operator cocycle であるとは, ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して, $P_\omega = P(\omega, \cdot): L^1(X, m) \rightarrow L^1(X, m)$ がマルコフ作用素であるときをいう.

以下の記号を導入し, Markov operator cocycle に対する漸近的周期性を定義する.

- $M(\Omega, E)$: Ω から可測空間 E への可測写像全体の集合
- $(L^1(X, m))'$: $L^1(X, m)$ の双対空間

定義 2. Markov operator cocycle (P, σ) が漸近周期的 (asymptotically periodic) とは, ある自然数 $r \geq 1$, 二つの写像の族 $\{g_i\}_{i=1}^r \subset M(\Omega, D(X, m))$ と $\{\lambda_i\}_{i=1}^r \subset M(\Omega, (L^1(X, m))')$, さらに $\{1, \dots, r\}$ の置換 ρ が存在し, ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して,

- (i) $i \neq j$ ならば, a.e. $\omega \in \Omega$ に対して, $m(\text{supp} g_i^\omega \cap \text{supp} g_j^\omega) = 0$
- (ii) すべての $i = 1, \dots, r$ と a.e. $\omega \in \Omega$ に対して, $\mathcal{L}_\omega g_i^\omega = g_{\rho(i)}^{\sigma\omega}$
- (iii) 任意の $f \in L^1(X, m)$ と a.e. $\omega \in \Omega$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{L}_\omega^{(n)} \left(f - \sum_{i=1}^r \lambda_i^\omega(f) g_i^\omega \right) \right\|_m = 0$

が成り立つ時をいう.

次に, Markov operator cocycle に対する弱収斂性を定義する.

定義 3. Markov operator cocycle (P, σ) が弱収斂的 (weakly constrictive) とは, ある可測写像 $F: \Omega \rightarrow \mathcal{S}(L^1(X, m))$ が存在し, ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して $F_\omega = F(\omega)$ は $L^1(X, m)$ の弱プレコンパクトな部分集合であり, さらに任意の可測写像 $f: \Omega \rightarrow D(X, m)$, $\omega \mapsto f_\omega$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Omega} \inf_{g \in F_{\sigma^n \omega}} \|\mathcal{L}_\omega^{(n)} f_\omega - g\|_m = 0$$

が成り立つ時をいう. ただし, $\mathcal{S}(L^1(X, m))$ は $L^1(X, m)$ の空でない部分集合である.

ここで, 集合 $A \subset L^1(X, m)$ が弱プレコンパクトとは, 任意の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset A$ に対して, ある収束部分列 $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$ が存在して, その極限 f_* が $f_* \in L^1(X, m)$ となるときをいう.

主定理が成り立つためには $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, P, \sigma)$ に対してさらに, 以下の仮定が必要となる.

- (C1) Ω は距離空間であり, 連結空間である.
- (C2) $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$ は同相写像であり, 極小 (minimal: σ によるすべての軌道が Ω 内で稠密) である.
- (C3) $P: \Omega \times L^1(X, m)$ は強連続 (任意の $f \in L^1(X, m)$ に対して, $\omega \mapsto P_\omega f$ が連続) である.
- (C4) ある連続写像 $h: \Omega \rightarrow D(X, m)$ と定数 $C > 0$ が存在し,

$$P_\omega h_\omega = h_{\sigma\omega}, \quad \|h_\omega\|_{L^\infty(X, m)} < C$$

がすべての $\omega \in \Omega$ について成り立つ.

定理 4. 仮定 (C1)-(C4) を満たす弱収斂的な *Markov operator cocycle* は漸近周期的である.

一般に, Markov operator cocycle が漸近周期的であれば弱収斂性が導出されるので, (C1)-(C4) の仮定の下では, これらの性質は同値となる. また, 仮定 (C1) の Ω の連結性は, 一見不自然に見えるかもしれないが, 本質的な仮定であることを注意しておく ([1] 参照).

References

- [1] F. Nakamura, Y. Nakano. "Asymptotic periodicity of Markov operators in random environments". (In preparation)
- [2] Lasota, A., T-Y. Li, and J. A. Yorke. "Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators." Transactions of the American Mathematical Society 286.2 (1984): 751-764.
- [3] Komorník, Jozef. "ASYMPTOTIC PERIODICITY OF THE ITERATES OF WEAKLY CONSTRUCTIVE MARKOV OPERATORS." Tohoku Mathematical Journal, Second Series 38.1 (1986): 15-27.
- [4] Arnold, Ludwig. "Random dynamical systems." Dynamical systems. Springer, Berlin, Heidelberg, 1995. 1-43.