

# ホモロジー-球面への古典群の作用

国際基督教大学 中西あゐ子

最近、M. Davis, W.C. Hsiang, J. Morgan 等によって、ホモトピー-球面上の *regular*  $U(n)$ ,  $Sp(n)$ ,  $O(n)$ -作用の *Concordance* の下での分類がなされた。[3], [5] ここに、*Concordance* とは、次で定義される  $G$ -多様体上の同値関係である。

$\psi_i ; G \times M_i \longrightarrow M_i \quad (i=1, 2) \quad \text{可微分作用}$

$\psi_1, \psi_2$  が *concordant*

$\iff M \times I$  上の可微分作用が存在して、その  $M \times \{i\}$  への制限が  $\psi_i$  に同値。

そこで、我々は、対象とする多様体  $M$  をホモロジー-球面とし、 $M$  への古典群  $G$  の可微分作用の、同変微分同型の下での分類を考えることにする。本稿では、特に、 $G$ -ホモロジー-球面  $M$  が、余次元 2 の *principal orbit* を持ち、更に  $M$  上の可微分  $G$ -作用  $\psi$  が *linear model* をもつ場合のみを扱う。

上の、 $\psi$  が *linear model* をもつとは次の意味である。

linear model

$M$  を  $n$  次元ホモロジー球面とし、 $\psi$  を  $M$  上の可微分  $G$ -作用、 $\varphi$  を  $n$  次元単位球面上の  $G$ -線型作用とする。 $\varphi$  と  $\psi$  の orbit types が等しく、また、対応する orbit の slice 表現が等しいとき、 $\varphi$  と  $\psi$  の linear model とよぶ。(acyclic 多様体上の可微分作用と、ユークリッド空間上の線型作用に対しても、同様に linear model の概念を定義できる。)

また、表現に関する Weyl の次元公式 [6] を使うことにより、単位球面上への余次元 2 の principal orbit をもった、古典群  $G$  の線型作用は、§1 の Table で、すべて与えられることがわかる。(但し、 $G \neq SO(2), SO(4)$ )

このとき、次の結果が得られた。

## 定理

$M$  をホモロジー球面、 $G$  を  $SO(n)$  ( $n=2, 4$ )、 $SU(m)$  あるいは  $SP(n)$  とする。 $M$  上の可微分  $G$ -作用  $\psi$  が、余次元 2 の principal orbit をもち、更に、linear model をもつならば、 $\psi$  は、その linear model か、あるいは Brieskorn 球面  $W_k^{4m+1}$  ( $k$ ; 奇数,  $m \geq 2$ ) 上の標準的な  $SO(2m+1)$ -作用に、同変微分同型である。

上の  $W_k^{4m+1}$  は  $2P_{2m+1}$  ( $P_{2m+1}$  は  $SO(2m+1)$  の標準的な表現) を model に持ち、その作用は次で与えられる。

$$W_k^{4m+1} = \left\{ (z_0, z_1, \dots, z_{2m+1}) \in \mathbb{C}^{2m+2}; \begin{array}{l} z_0^k + z_1^2 + \dots + z_{2m+1}^2 = 0 \\ |z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_{2m+1}|^2 = 1 \end{array} \right\}$$

$SO(2m+1)$  は  $z_1, \dots, z_{2m+1}$  に  $U(2m+1)$  の部分群として作用する。また、 $W_k^{4m+1}$  は  $k$  が奇数のとき、ホモロジー球面で、 $k \neq k'$  ならば、 $W_k^{4m+1}$  と  $W_{k'}^{4m+1}$  は同変微分同型にはならない。[1] 但し、 $2P_3$  を model に持つ  $SO(3)$ -ホモロジー球面は、model  $2P_3$  自身に同変微分同型である。

上の定理に関連して、[4] に次のような興味ある結果が述べられている。

<Haefliger, Davis>

$G$  をコンパクト単純リー群、 $M$  をホモロジー球面か、あるいは acyclic 多様体とする。このとき、 $M$  上のどんな可微分  $G$ -作用  $\psi$  も、それが自明でない (即ち  $1 \neq \psi$  でない) principal isotropy 群をもてば、それは、いつでも linear model を持ち、またその model は  $\psi$  に対して一意に定まる。

この結果を使うならば、 $(SO(3), 2P_3)$ ,  $(SU(2), 2Ad_{SU(2)})$ ,  
 $(SU(2), [U_2]_R + 2\theta')$  を model にもつ場合を除いて、我々の  
 定理から、 $\psi$  が linear model をもつ という条件を省  
 くことができる。(上の3つの type は、ともに自明な  
 principal isotropy 群をもつ。) しかし、残念ながら、上  
 に述べられた  $\langle \text{Hsiang, Davis} \rangle$  の結果の完全な証明は、  
 まだ発表されていない。

§2, 3 で orbit space  $M/G = M^*$  に関するある情報を与  
 え、§4, 5 で上の定理の証明の概略を与える。

### §1. Linear model.

$G$  を  $SO(n)$  ( $n \neq 2, 4$ ),  $SU(n)$  あるいは  $Sp(n)$  とし、 $\mathcal{S}$  を  
 単位球面上への余次元2の principal orbit をもつた線型  $G$ -  
 作用とすると、 $\mathcal{S}$  は次の Table で与えられる。

| Type    | $G$           | $\mathcal{S}$                     | principal<br>isotropy 群 |
|---------|---------------|-----------------------------------|-------------------------|
| regular | $SO(n)$       | $P_n + 2\theta'$                  | $SO(n-1)$               |
|         | $n \neq 2, 4$ | $2P_n$                            | $SO(n-2)$               |
|         | $SU(n)$       | $[U_n]_R + 2\theta'$              | $SU(n-1)$               |
|         | $Sp(n)$       | $[V_n]_R + 2\theta' \ (n \geq 2)$ | $Sp(n-1)$               |

|         |         |                                                                      |                               |
|---------|---------|----------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| adjoint | $G$     | $Ad_G + (3 - \text{rank } G) \theta'$ , $\text{rank } G = 2, 3$      | maximal torus                 |
|         | $Sp(n)$ | $C\varphi = \Lambda^2 V_n + (3-n)\theta'$ , $n=3, 4$                 | $Sp(1)^n$                     |
|         | $SO(3)$ | $S^2 P_3$                                                            | maximal $\mathbb{Z}_2$ -torus |
| near    | $SU(5)$ | $[\Lambda^2 \mu_5]_R + \theta'$                                      | $SU(2)^2$                     |
| adjoint | $SU(7)$ | $[\Lambda^2 \mu_7]_R$                                                | $SU(2)^3$                     |
| mixed   | $SU(4)$ | $[\mu_4]_R + \varphi_1 + \theta'$ , $(C\varphi_1 = \Lambda^2 \mu_4)$ | $SU(2)$                       |

この Table で、 $(G, \varphi)$  の lifting  $(\tilde{G}, \tilde{\varphi})$  は除外したが、 $\tilde{G}$ -多様体の分類が、 $G$ -多様体の分類から自然に与えられることによる。また、 $P_n, \mu_n, V_n$  は各々、 $SO(n), SU(n), Sp(n)$  の標準的な表現で、 $\theta'$  は自明な 1 次元実表現、 $C\varphi$  は  $\varphi$  の複素化、 $[\varphi]_R$  は複素表現、ある  $\varphi$  は symplectic 表現も実表現とみなしたものである。

regular, adjoint, near adjoint, mixed type の言葉は [4] の意味で使った。

上の Table にある、regular type の表現を model に基づくホモロジー球面への可微分  $G$ -作用の分類は、すでによく知られており、それはその model 自身か、あるいは  $W_k^{4m+1}$  への  $SO(2m+1)$ -作用に同変微分同型である。[1], [2].

そこで、以後、残りの type, 即ち、adjoint, near adjoint, mixed type を model に基づく  $G$ -ホモロジー球面のみに。

取り扱... 上の定理の明証を与える。

## §2. "orbit space"

$M$  を §1 の Table の regular type 以外を model に持つ。  
 $G$ -ホモロジー-球面とする。そのとき、 $M$  はいつでも isolated  
singular orbit をもち、また exceptional orbit をもたない。  
そして orbit space  $M/G = M^*$  は 2次元球体  $D^2$  となる。

$G/H$ ,  $G/L_i$ ,  $G/K_i$ , をそれぞれ principal orbit, non-isolated  
singular orbit, isolated singular orbit とすると、 $L_i$   
,  $K_i$  は次の条件を満たすように選ぶことができる。(  $p$  は  
 $M$  から  $M^*$  への自然な射影 )

条件 P    先ず、principal isotropy 群  $H$  を1つ定める。

そして i)  $K_i, L_i > H$ ,  $K_i > L_i$ ,  $L_{i-1}$  ( $K_1 > L_1, L_c$ )

ii)  $\phi^{-1}(A_i)$  は  $M_{\pi_i} \cup_{id} M_{\pi_{i-1}}$  に同変微分同型。

( $1 \leq i \leq c$ ,  $\pi_0 = \pi_c$ )

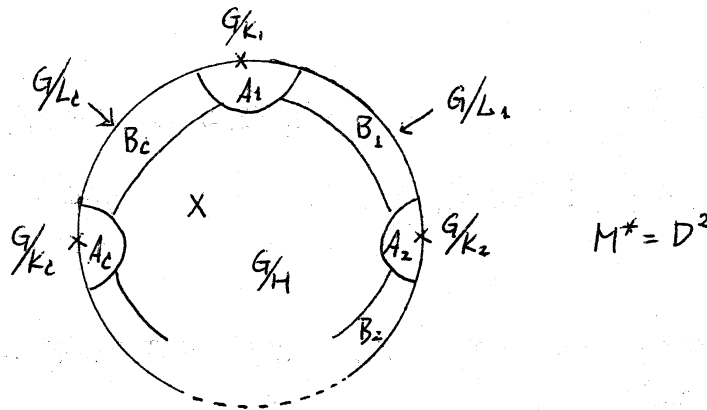
$\pi_j; G/H \longrightarrow G/L_j$  射影

$M_{\pi_j}; \pi_j$  の写像柱

iii)  $\phi^{-1}(B_i)$  は  $M_{\pi_i} \times I$  に同変微分同型。

(図 I 参照)

図 I



上の条件 P をみたす組  $(K_1, L_1, K_2, \dots, K_c, L_c)$  を  
 “orbit space” とよぶことにする。

注意 2-1 ; ある  $g \in G$  によって  $(K'_1, L'_1, \dots, K'_c, L'_c) = (gK_1g^{-1}, gL_1g^{-1}, \dots, gK_cg^{-1}, gL_cg^{-1})$  となるとき、 $(K_1, L_1, \dots, K_c, L_c)$  と  $(K'_1, L'_1, \dots, K'_c, L'_c)$  は同じ  $G$ -多様体を与える。

注意 2-2 ; 条件 P より、 $p^{-1}(X \cup (\bigcup_{i=1}^c B_i))$  は  $(G/H \times X) \cup_d (\bigcup_{i=1}^c M_{\pi_i} \times I)$  に同変微分同型である。故に、同じ “orbit space” をもつ  $G$ -多様体の分類は、 $2p^{-1}(A_i)$  ( $i=1, \dots, c$ ) のはり合わせ写像の選む方のみによる。

§3. “orbit space” と  $G$ -ホモロジー球面の関係。

$2p^{-1}(A_i)$  を条件 P ii) によって  $M_{\pi_i} \cup_d M_{\pi_{i-1}}$  とみなすこと  
 によって  $2p^{-1}(A_i)$  のはり合わせ写像に因りて次の補題を得る。  
 ( $N(K)$  は  $K$  の正規化群をあらわす。)

## 補題 3-1

$N(H)/H$  を有限とする。そのとき、 $\mathcal{P}(H_i)$  の同変微分同型写像の集合は  $(N(H) \cap N(L_i) \cap N(L_{i-1}))/H$  と 1 対 1 に対応する。

$[a_i] \in (N(H) \cap N(L_i) \cap N(L_{i-1}))/H$  に対応する  $\mathcal{P}(H_i)$  の同変微分同型写像を  $\tilde{f}_{a_i}$  と記すこと。

## 補題 3-2

$N(H)/H$  を有限とする。このとき、 $N(H) \cap N(L_i) \cap N(L_{i-1}) \subset N(K_i)$  ならば  $\tilde{f}_{a_i}$  は  $\partial S$  を  $\partial S'$  に写す。ここに  $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$  は  $Gx = G_{a_i}^{-1}x = K_i$  となる  $x$  及び  $a_i^{-1}x$  の slice である。

よって  $\tilde{f}_{a_i} : \partial S \longrightarrow \partial S'$  は、次の 2 つの写像の積であることが容易にわかる。

$$h : \partial S \longrightarrow \partial S \quad \text{で} \quad h(gx) = a_i g a_i^{-1} x \quad (g \in K_i)$$

$$L_{a_i} : \partial S \longrightarrow \partial S' \quad \text{で} \quad L_{a_i}(v) = a_i^{-1} v \quad (v \in \partial S)$$

そして  $L_{a_i}$  が  $\mathcal{N}$  上に拡張されることは明らか故、 $h$  が  $\mathcal{N}$  上への拡張をもつこと、即ち  $h$  が線型写像であることを見ることによって、 $\tilde{f}_{a_i}$  が  $\mathcal{N}$  上に、そしてそれ故  $\mathcal{P}(H_i)$  上に拡張されることが証明される。[8] このとき、この拡張を使って、次の補題を得る。

## 補題 3-3

$N(H)/H$  を有限とする。そのとき、同じ "orbit space" をもつ  $G$ -ホモロジー-球面は、同変微分同型である。

$N(H)/H$  が有限でない場合には、実際にホモトピーを構成すること、次の補題が与えられる。[8]

## 補題 3-4

$N(H)/H$  を有限でなくとする。このとき、 $\partial p^*(A_i)$  の同変微分同型写像は  $\partial p^*(A_i)$  の恒等写像に同変イソトープである。

これより、

## 補題 3-5

$N(H)/H$  を有限でなくとする。そのとき、同じ "orbit space" をもつ  $G$ -ホモロジー-球面は同変微分同型である。

## §4. 定理の証明

補題 3-3, 3-5 より、 $G$ -ホモロジー-球面  $M$  がその linear model と同じ "orbit space" をもつことのみを証明すればよい。

Case 1 :  $M$  が  $(SO(3), S^2P_3)$ ,  $(SU(7), [1^3U_7]_R)$  以外の model をとつとき。

このとき、オイラー-標数の公式、

$$\chi(M) = \chi(G/H) + \sum \chi(G/K_i) - \sum \chi(G/L_i) \quad (4.1)$$

より、 $M$  が、その linear model と同じ "orbit space" をとつことが、容易に確かめられる。(実際には、各 type の orbits の数が model のそれと等しくなることのみ見ればよい。)

Case 2 :  $(SO(3), S^2P_3)$  を model にとつとき。

K. Hudson [7] より、 $H_1(M; \mathbb{Z}_2) = 0$  となるとき、 $M$  の "orbit space" は  $(K_1, L_1, K_2, L_2) = (SO(3), N_i, SO(3), N_j)$  となる。ここに  $N_i, N_j$  は  $O(2)$  に共役な部分群で  $N_i \neq N_j$  である。そして、この "orbit space" はまた、 $S^2P_3$  のそれと等しい。

Case 3 :  $(SU(7), [1^3U_7]_R, S^{+1})$  を model にとつとき。

このとき、各  $i$  に対していつも  $\chi(M) = \chi(G/H) = \chi(G/K_i) = \chi(G/L_i) = 0$  なので、公式 (4.1) は効力をもたない。そこで、具体的に、 $M$  のホモロジーを計算していく訳だが、Case 3 の証明は § 5 で与えることにする。

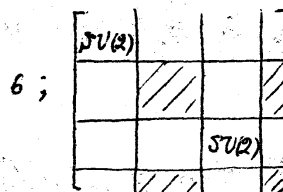
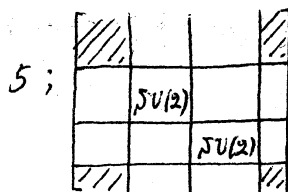
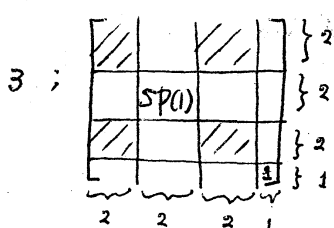
## § 5. 定理の証明 — Case 3

まず、"orbit space" を次のように言いかえる。

a) "orbit space" の言い換え。

$\mathcal{H}$  を non-isolated singular orbit とし、principal isotropy 群  $H$  を  $SU(2)^3$  と定める。このとき、 $H < L$  となる  $L$  は次の 6 つのうちどれかである。各々を  $1 \sim 6$  の整数であらわす。

1:  $Sp(2) \times Sp(1)$     2:  $Sp(1) \times Sp(2)$     4:  $SU(2)^2 \times SU(3)$



3 は  $Sp(2) \times Sp(1)$  に、5, 6 は  $SU(2)^2 \times SU(3)$  に共役な群。

また、"orbit space"  $(K_1, L_1, K_2, L_2, \dots, K_c, L_c)$  は  $(L_1, L_2, \dots, L_c)$  によって一意に定まってしまふことは容易に確かめられる。故に "orbit space" をサイクル  $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_c)$ ,  $i_j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  と同一視することが出来る。但し、 $K_i$ -slice 表現、及び §2 の条件 P より、このサイクルは次の i) ii) を満足するものでなくてはならない。

i)  $i_j \neq i_{j-1} \quad (i_1 \neq i_c)$

ii)  $(i_{j-1}, i_j) \neq (4, 5), (4, 6), (5, 6), (5, 4), (6, 4), (6, 5)$

例;  $[E_6]_{\mathbb{R}}$  の "orbit space"  $(K_1, L_1, K_2, L_2, K_3, L_3) = (SP(2) \times SU(3), SP(2) \times SP(1), SP(3), SP(1) \times SP(2), SU(2) \times SU(5), SU(2)^2 \times SU(3))$  は サイクル  $(124)$  に対応する。

### b) 基本サイクル

$\sigma_k = (i_1, i_2, \dots, i_k)$  で  $(2 \leq k \leq 6)$ ,  $\{i_j\}$  が全て異なるとき  $\sigma_k$  を基本  $k$ -サイクルと呼ぶことにする。

### c) サイクルの分解

サイクル  $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_c)$  が、 $1 \leq j \leq c$ ,  $i_{c+m} = i_m$  で  $i_j = i_{j+k}$  かつ  $\{i_{j+1}, \dots, i_{j+k}\}$  は全て異なる部分集合  $(i_j, i_{j+1}, \dots, i_{j+k})$  をもつとき、 $\sigma$  から  $i_{j+1}, \dots, i_{j+k}$  を取り除く。この操作で  $\sigma$  は基本  $k$ -サイクルと長さ  $c-k$  の新しいサイクル  $\sigma'$  に分解される。 $\sigma'$  に更にこの操作が可能ならば行う。これをくり返すことで、 $\sigma$  はいくつかの基本サイクルに分解される。この操作をサイクル  $\sigma$  の分解と呼ぼう。

この分解を使って、一つの "orbit space" 即ち サイクル  $\sigma$  に対応する  $SU(k)$ -多様体の様に構成される。

### d) サイクル $\sigma$ に対応する $SU(k)$ -多様体の構成

$\sigma$  に c) の分解を行う。  $n$  回の操作で  $\sigma$  が基本サイクル  
 $(s_1 s_2 \dots s_m)$  になったとする。

$$\begin{aligned} \sigma &\longrightarrow \dots \longrightarrow (s_1 s_2 \dots s_\ell i_{j+1} \dots i_{j+k} s_{\ell+1} \dots s_m) \\ &\longrightarrow (s_1 s_2 \dots s_m) \end{aligned} \quad s_\ell = i_{j+k}$$

今、任意の基本サイクルに対応する  $SU(k)$ -多様体が構成されたとしよう。

$(s_1 s_2 \dots s_m)$  に対応する  $SU(k)$ -多様体を  $X_n$ ,  $n$  回目の操作で取り除く基本サイクル  $(i_{j+1} \dots i_{j+k})$  に対応する  $SU(k)$ -多様体を  $Y$  とし、更に、  $s_\ell = i_{j+k}$  に対応する *non-isolated singular isotropy* 群、  $\mathcal{V}_{X_n}$ ,  $\mathcal{V}_Y$  を与え、  $\mathcal{V}_{X_n}$ ,  $\mathcal{V}_Y$  の同変管状近傍とする。このとき、

$$(X_n - \text{Int } \mathcal{V}_{X_n}) \cup_{\partial \mathcal{V}_{X_n} = \partial \mathcal{V}_Y} (Y - \text{Int } \mathcal{V}_Y)$$

は、  $(s_1 s_2 \dots s_\ell i_{j+1} \dots i_{j+k} s_{\ell+1} \dots s_m)$  に対応する  $SU(k)$ -多様体を与える。(ここで、同じ *orbit type* の *slice* 表現は等しいので、  $\partial \mathcal{V}_{X_n}$  と  $\partial \mathcal{V}_Y$  は自然な同変微分同型写像ではり合わされている。) これをくり返せば、  $\sigma$  に対応する  $SU(k)$ -多様体  $X$  は、いくつかの基本サイクルに対応する  $SU(k)$ -多様体の和で構成されることになる。即ち、

$$X_j = N_j - \cup \text{Int } D(\xi).$$

$$X = \bigcup_{S(\xi)} X_j \quad ; \quad N_j \text{ はある基本サイクルに対応する } SU(7)\text{-多様体}$$

$D(\xi)$  は  $G/\mathbb{Z}$  の同変管状近傍

$S(\xi)$  は  $D(\xi)$  の随伴球面束.

よって、 $X$  の構成は、各  $N_j$  の構成に帰着する。

c) 基本サイクルに対応する  $SU(7)$ -多様体

基本  $k$ -サイクル  $\sigma_k = (i_1 i_2 \dots i_k)$  と  $\sigma'_k = (i'_1 i'_2 \dots i'_k)$

が次の (i) あるいは (ii) の関係にあるとき、 $\sigma_k$  と  $\sigma'_k$  は共役であると呼ぶことにする。

(i)  $(i'_1 \dots i'_k) = (i_m i_{m+1} i_{m+2} \dots i_k i_1 \dots i_{m-1})$  あるいは、

$$(i_m i_{m-1} \dots i_1 i_k \dots i_{m+1}), \quad (1 \leq m \leq k)$$

(ii)  $L(i'_j) = g L(i_j) g^{-1}, \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad \exists g \in G = SU(7)$

ここに  $L(i)$  は、整数  $i$  に対応する *non-isolated singular isotropy* 群とする。

$\sigma_k$  と  $\sigma'_k$  が共役のとき、各々に対応する  $SU(7)$ -多様体  $M, M'$  は  $M' = M$  か、あるいは  $M' = -M$  である。故に、基本サイクルの共役類に対応する多様体の構成を考えれば十分である。実際、各サイクルに対応する多様体は次で与えられる。

## I) 2-サイクルに対応する多様体

$$(12) ; M_0 = SU(7) \times_{SP(3)} S^{14} \nearrow \mathcal{G}, \quad \mathcal{G} = \Lambda^2 \mathcal{V}_3$$

$$(14) ; M_1 = SU(7) \times_{SP(2) \times SU(3)} S^{14} \nearrow \mathcal{G}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$$

$$\mathcal{G}_1 = \Lambda^2 \mathcal{V}_2, \quad \mathcal{G}_2 = [\Lambda^2 \mathcal{U}_3]_R$$

$$(24) ; M_2 = SU(7)/_{SU(2)} \times_{SU(5)} S^{20} \nearrow \mathcal{G}, \quad \mathcal{G} = [\Lambda^2 \mathcal{U}_5]_R + \mathcal{G}'$$

任意の2-サイクルは、上の3つのどれかに共役である。

## II) 3-サイクルに対応する多様体

$$(124) ; M_3 = S^{41}, \quad SU(7)\text{-作用は } [\Lambda^2 \mathcal{U}_7]_R$$

$$(123) ; M_3', \quad K_1, K_2, K_3 \in (SP(3))$$

$$(126) ; M_3'', \quad K_1, K_3 \in (SU(2) \times SU(5)), K_2 \in (SP(3))$$

任意の3-サイクルは、上の3つのどれかに共役である。

## III) 4, 5, 6-サイクルに対応する多様体

これは、いくつかの  $M_3, M_3', M_3''$  から、ある *isolated singular orbit* の管状近傍を取り除いたものを、その境界で貼り合わせることによって得られる。(詳細は略する。) 5なみは、4-サイクルは、 $(1234), (1235), (1425), (1426)$  のどれか、5-サイクルは、 $(12435), (12436), (12534), (12536)$  のどれか、そして6-サイクルは、 $(142536), (152436), (162435)$  のどれかに共役になっている。

定理の Case 3 の証明に戻る。

上の  $d)$  で構成した  $X = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} X_j$  に対して、Mayer-Vietoris 完全系列等を使うことで、 $X$  がホモロジー球面を与え、かつ  $[1^2\mu_7]_{\mathbb{R}}$  もその *linear model* にあつたのは、その "orbit space" が (124), 即ち、 $X = M_3$  の場合に限ることが、簡単な計算から証明される。これは、 $[1^2\mu_7]_{\mathbb{R}}$  も *model* にあつたホモロジー球面は、*linear model* 自身に同変微分同型でなくてはならぬことを示しているので、Case 3 においても、定理が証明された。

以上で、我々の目的とした定理の証明がなされた訳だが、Case 3 に関しては、簡単な別証がある。[8] を参照されたい。

### References

1. G.E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, 1972
2. M. Davis, *Multiaxial Actions on Manifolds*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 643, Springer-Verlag, 1978
3. M. Davis, and W.C. Hsiang, *Concordance Classes of Regular  $U(n)$  and  $SP(n)$  Actions on Homotopy Spheres*, *Ann. of Math.*, 105, 1977
4. M. Davis, W.C. Hsiang and W.Y. Hsiang, *Differential*

Actions of Compact Simple Lie Groups on Homotopy Spheres and Euclidean Spaces, Algebraic and Geometric Topology, Proceedings of Symposia in Pure Math., vol XXXII, part I, A.M.S., 1978.

5. M. Davis, W. C. Hsiang and J. Morgan, Concordance Classes of Regular  $O(n)$  Actions on Homotopy Spheres, Acta. Math., 144, 1980
6. E. B. Dynkin, The Maximal Subgroups of the Classical Groups, A.M.S., Translations, 6, 1987
7. K. Hudson, Classification of  $SO(3)$ -Actions on Five Manifolds with Singular Orbits, Michigan Math. J., 26, 1979
8. A. Nakanishi,  $SO(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $Sp(n)$  - Homology Sphere with Codimension Two Principal Orbit, Preprint, 1981