

周期解, 概周期解の存在

東北大理 吉 沢 太 郎

$f(t)$ は $I: 0 \leq t < \infty$ で定義された連続函数とする。 $f(t)$ が連続な概周期函数 $p(t)$ と, $t \rightarrow \infty$ のとき零に近づく連続函数 $q(t)$ との和であるとき, $f(t)$ は漸近概周期函数であるといわれる。 すなわち,

$$(1) \quad f(t) = p(t) + q(t)$$

漸近概周期函数 $f(t)$ に対して, その表現 (1) は一意的で, $f(t)$ は有界, 一様連続である。

補題 1 漸近概周期函数 $f(t)$ は微分可能で, その導函数 $f'(t)$ もまた漸近概周期函数であるとき,

$$(2) \quad f'(t) = p'(t) + q'(t),$$

ここで $p'(t)$, $q'(t)$ はそれぞれ $p(t)$, $q(t)$ の導函数。

漸近概周期函数はまたつぎのようにも定義することができ

る。 $\tau_k > 0$, $\tau_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) である任意の数列 $\{\tau_k\}$ に対して, $f(t+\tau_{k_j})$ が I の上で一様収束するような部分列 $\{k_j\}$ が存在するとき, $f(t)$ は漸近概周期函数であるといわれる。

概周期系

$$(3) \quad x' = F(t, x) \quad (x' = \frac{dx}{dt})$$

を考え, (3) は有界な解 $\varphi(t)$ を持っているとして仮定する。すなわち, $\|\varphi(t)\| \leq B$ ($t \geq 0$)。 $D = \{x; \|x\| \leq B\}$, $R = (-\infty, \infty)$ とし, $F(t, x)$ は $R \times D$ で連続で, $x \in D$ に対して一様に, t の概周期函数であるとする。

定理 1. 解 $\varphi(t)$ が漸近概周期函数ならば, 系 (3) は概周期解 $p(t)$ を持つ。

したがって, 概周期系が漸近概周期解を持つは, いっでも概周期解を持つことがわかる。

まず周期系に対する漸近概周期解の存在について考える。

$$(4) \quad x' = F(t, x), \quad F(t+\omega, x) = F(t, x), \quad \omega \geq 0$$

は $\|\varphi(t)\| \leq B$ ($t \geq 0$) なる有界な解を持っているとする。 $D^* = \{x; \|x\| < B^*\}$, $B < B^*$, とし, $F(t, x)$ は $R \times D^*$ で連続であると仮定する。

定理 2. $\varphi(t)$ が $t \geq 0$ で一様安定ならば, $\varphi(t)$ は (4) の漸

近概周期解である。したがって系(4)は概周期解をもつ。

そしてそれは一様安定である。

定理 3 定理 2 の仮定のもとで、 $\varphi(t)$ が $t \geq 0$ で一様漸近安定ならば、系(4)はある整数 $m \geq 1$ に対して周期が $m\omega$ である周期解をもつ。そしてそれは一様漸近安定である。

つきに概周期系の漸近概周期解の存在について考える。

概周期系

$$(4) \quad x' = F(t, x)$$

は $\|\varphi(t)\| \leq B$ ($t \geq 0$) なる有界な解 $\varphi(t)$ を持つとする。 $F(t, x)$ は $R \times D^*$ で連続で、 $x \in D^*$ に対して一様に、 t の概周期正数であると仮定する。

$R \times D^*$ 上で定義され R^n に値をもつ連続関数の空間 $C(R \times D^*, R^n)$ において、 $T(F)$ は F の *translate* からできている関数の空間を表わす。すなわち、 $F_t \in T(F)$ 、 $\tau \in R$ で $F_t(t, x) = F(t + \tau, x)$ 、 $\tau \in R$ 。 $\{K_s\}$ を $R \times D^* = \bigcup_{s=1}^{\infty} K_s$ となる compact set の列とし、各 s に対して、

$$\|F - G\|_s = \sup \{ \|F(t, x) - G(t, x)\| : (t, x) \in K_s \},$$

$$\rho_s(F, G) = \frac{\|F - G\|_s}{1 + \|F - G\|_s}$$

6.1)

$P(F, G) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} P_j(F, G)$ とすれば, これは $C(R \times D^d, R^n)$ 上の compact-open topology に対する metric である. 擬同期正数 F の hull $H(F)$ は $H(F) = \overline{T(F)}$ と定義される.

$(0, \infty)$ を通る (4) の解を $\varphi(t, x, F)$ で表わす.

定義 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$, $G \in H(F)$, $P(F, G) \leq \delta$, $\|\varphi(t, x, F) - \varphi\| \leq \delta$ ならば, $t \geq 0$ に対して

$$\|\varphi(t+t', x, F) - \varphi(t, y, G)\| \leq \varepsilon$$

となるような $\delta(t) > 0$ が存在するとき, (4) の解 $\varphi(t, x, F)$ は stable under disturbances from $H(F)$ であるといわれる.

定理 4 (4) の有界な解 $\varphi(t)$ が stable under disturbances from $H(F)$ ならば, $\varphi(t)$ は (4) の漸近擬同期解にある. したがって, 系 (4) は擬同期解をもつ.

もし $\varphi(t)$ が totally stable ならば, $\varphi(t)$ は stable under disturbances from $H(F)$ であるから, つきの結果がえられる.

系 (4) の有界な解 $\varphi(t)$ が totally stable ならば, (4) は擬同期解をもつ.

定理 5 各 $G \in H(F)$ に対して $\lambda(G) > 0$ が存在して, $x(t)$, $y(t)$ がすべての $t \in R$ に対し $x(t) \in D$, $y(t) \in D$ である

$$(5) \quad x' = G(t, x)$$

の異なる解ならば、すべての $t \in R$ に対し

$$\|x(t) - y(t)\| \geq \lambda(G)$$

ならば、(4)の有界な解 $\varphi(t)$ は漸進概同期解で、したがって(4)は概同期解をもつ。

系 定理5の仮定のもとで、(4)の解 $\varphi(t)$ がすべての $t \in R$ に対し、 $\|\varphi(t)\| \leq B$ ならば、 $\varphi(t)$ は概同期解である。

つぎの定理に対しては、すべての $G \in H(F)$ に対して、(5)の解は初期値問題に関して一意的であると仮定する。

定理6 もし(4)の有界な解 $\varphi(t)$ が一様漸進安定ならば $\varphi(t)$ は漸進概同期解である。したがって系(4)は一様漸進安定な概同期解をもつ。

この定理の証明においてつぎの事実をつかう。すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し、任意の $t_0 \in I$ に対し $\|\varphi(t_0) - x_0\| < \delta$, $\|g(t, x)\| < \delta$ ならば $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ 上で

$$\|\varphi(t) - x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon,$$

ここで T は与えられた定数で $x(t; x_0, t_0)$ は

$$x' = F(t, x) + g(t, x)$$

の (t_0, x_0) と通る解である。

このことを示すために各 $G \in H(F)$ に対する解の一意性と必要とした。^{*} しかし、 $F(t, x)$ が周期函数のとき、 $\varphi(t)$ が一様安定ならば、一意性の仮定なしで上のことが成り立つ。