

高次相互法則, weight 1 の cusp form と楕円曲線

名古屋 小池正夫 (Masao Koike)

58年11月14日～18日の間、平松先生が名古屋大学に集中講義に見えられ、weight 1 の保型形式についてのいくつかの topic を話されました。その中で weight 1 の保型形式と 3 次多項式の相互法則との関係、又それと楕円曲線との関係を 1 つの例でのべられました。ここではその例が一般化されることと関連する話題についてのべます。

§1 話された例は次の 3 つ (2 は 4 つ) の対象の間の関係です。

(1) $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + 1$ は $\mathbb{Q}$ 上 3 次既約多項式。

(2) $F(\tau) = \eta(2\tau)\eta(22\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2\pi\sqrt{-1}n\tau}$ は $\Gamma_0(44)$ に

属する weight 1 のある指標の cusp form. ここ

で $\eta(\tau)$ は Dedekind の η 関数とする。

(3) $E: y^2 = 4x^3 - 4x^2 + 1$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線.

(3') $G(\tau) = \eta(\tau)^2 \eta(11\tau)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) e^{2\pi\sqrt{-11}\tau}$ は $\Gamma_0(11)$ に関する weight 2 の map form.

(I) $f(x)$ の高次相互法則と $F(\tau)$ の Fourier 係数の関係

$p \geq 3$ 素数に対して $f_p(x) = f(x) \bmod p$ は $\mathbb{F}_p$ 上 3 次多項式になる。このとき

定理 1 (平松 [2]) $p \neq 11$ のとき

$$\# \{ \alpha \in \mathbb{F}_p \mid f_p(\alpha) = 0 \} = a(p)^2 - \left(\frac{-11}{p} \right)$$

$f_p(x)$ の $\mathbb{F}_p$ 上の既約多項式への分解の様子がこの定理からわかる。特に $Spl\{f(x)\} = \{ p: \text{素数} \mid f_p(x) \text{ が } \mathbb{F}_p \text{ 上 相異なる 1 次式の積にかけられる} \}$ とすると

$$Spl\{f(x)\} \doteq \{ p: \text{素数} \mid a(p) = 2 \}$$

がいえる。 $\doteq$ の意味は有限個の p を除いて等号が成立つ。

一般に $Spl\{f(x)\}$ を決定する仕方と $f(x)$ の高次相互法則とよぶので、上記の結果が $4x^3 - 4x^2 + 1$ の相互法則と $\eta(\tau)\eta(22\tau)$ の Fourier 係数の関係を与えたことになる。

(II) $f(x)$ の高次相互法則と E の L -関数との関係

$p \neq 2, 11$ 素数に対して $\tilde{E}_p$ を E の reduction mod p とすると, $\tilde{E}_p$ は $y^2 = f_p(x)$ で定義された $\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線であり, $N_p = N_p(E)$ を $\tilde{E}_p$ の $\mathbb{F}_p$ -有理点の個数とする. E の L -関数は 有限個の p -factor (この場合は $p \neq 11$) を除いて N_p で記述される. このとき

定理 2 (Chowla - Cowles [1]) p の素数 p について

以下の同値関係が成立つ。

(i) $f_p(x)$ が $\mathbb{F}_p$ 上唯1つの1次因子をもつ

$$\iff \left(\frac{-11}{p}\right) = -1, \quad 1-N_p: \text{odd}$$

(ii) $f_p(x)$ が $\mathbb{F}_p$ 上1次式の積

$$\iff \left(\frac{-11}{p}\right) = 1, \quad 1-N_p: \text{odd}$$

(iii) $f_p(x)$ が $\mathbb{F}_p$ 上既約式

$$\iff \left(\frac{-11}{p}\right) = 1, \quad 1-N_p: \text{even}$$

(III) mod 2 の合同式

$F(\tau)$ と $G(\tau)$ の Fourier 係数の間の mod 2 の合同式が次のように成立つ。

定理 3' 全ての正の整数 n について

$$a(n) \equiv c(n) \pmod{2}.$$

この場合は、 $F(\tau)$, $G(\tau)$ がともに η 関数 $\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})$ とかけていて $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^2 \equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n}) \pmod{2}$ に注意すれば、定理3は明らかです。

又、(3)と(3')の間の関係は Taniyama-Weil 予想の解けている場合で

$$N_p(E) = 1 + p - c(p) \quad p \neq 2, 11 \text{ 素数}$$

が知れるから、次の定理が得られる。

定理3 $p \neq 2, 11$ 素数に対して

$$a(p) \equiv N_p \pmod{2}$$

§2 §1でのべた例は別々に論じられているが、定理の成立つ根拠は以下でのべるように同じものです。

(1) $f(x)$ に対して、 $K_f = f(x) = 0$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体とすると

$$\text{Gal}(K_f/\mathbb{Q}) \simeq S_3 \text{ (3次対称群)}$$

$$K_f \supset \mathbb{Q}(\sqrt{11})$$

(2) $F(\tau)$ は $k = \mathbb{Q}(\sqrt{11})$ の3次のイデアル指標 χ があり、 $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$ とかける。

$K_F = \chi$ の kernel に対する k 上の abel 拡大とする。

(3) E に対して $E_2 = E$ の 2 分点の座標を生成す

る $\mathbb{Q}$ 上ガロア拡大とする。

このとき次のことに気がつく。

事実

$$K_f = K_F = E_2$$

更に、上記の事実を用いて、定理 1, 定理 2 が [1][2] の議論を用いて再証明でき、又定理 1 と定理 2 をあわせることによつて、定理 3 が $F(\tau)$ と $G(\tau)$ の具体的表示に頼らないうで証明できることになる。従つて次のような一般化が可能になつた。

$$\mathcal{C}_0 = K/\mathbb{Q} : \text{ガロア拡大}$$

$$(i) \text{ Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq S_3$$

$$(ii) K \supset k \text{ 虚 2 次体}$$

$$\mathcal{C}_1 = f(x) : \mathbb{Q} \text{ 上 3 次既約多項式で}$$

$$K_f \in \mathcal{C}_0$$

$$\mathcal{C}_2 = F(\tau) : \text{ある } \Gamma_0(N) \text{ に関する weight 1 の}$$

cusp form で その Mellin 変換が 虚 2 次体

k の 3 次のイデール指標 χ の $L(s, \chi)$ と

一致する。 K_F で χ の核に対応する k 上の

3 次のアーベル拡大をあらわした時

$$K_F \in \mathcal{C}_0.$$

$\mathcal{C}_3 = E : \mathbb{Q}$ 上の楕円曲線で

$$E_2 \in \mathcal{C}_0.$$

これらの対象の間の写像 $\varphi_i : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_0$ ($i=1, 2, 3$) を

$$\varphi_1(f) = K_f, \quad \varphi_2(F) = K_F, \quad \varphi_3(E) = E_2$$

で定義する。この時

定理

$K \in \mathcal{C}_0$ に対して, $f(x) \in \varphi_1^{-1}(K)$, $F(\tau) = \sum a(n)e^{2\pi i F n \tau} \in \varphi_2^{-1}(K)$, $E \in \varphi_3^{-1}(K)$ をとる。これらの 3 つの対象の間に 定理 1, 2, 3 の類似が 有限個の素数 p を適当に除いて 成立つ。

詳しい証明は [5] を参照してください。

§3 いくつかの注意をする。

注意 1 $\mathbb{Q}$ 上定義された 楕円曲線 E が $\mathcal{C}_3$ に入るための条件は 位数 2 の $\mathbb{Q}$ -有理点 をもたなくて、その判別式が負と 言い換えられる。

注意 2 上記の E に対して 谷山 - Weil 予想が正しいとすれば weight 2 の cusp form $G(\tau) = \sum c(n) e^{2\pi\sqrt{n}\tau}$ が存在して

$$N_p = 1 + p - c(p) \quad p: \text{素数}, p \neq 2$$

が成立つ。

この時 定理 3 は $c(p)$ と $a(p)$ の間に mod 2 の合同式が成立つことを主張している。(有限個の p を除いて)

逆に mod 2 の合同式そのものを問題にするとおもしろいか。ここではふれません。

注意 3 $\mathcal{C}_0$ に含まれる体 K の条件のうち (ii) の虚 2 次体を含むというのを 実 2 次体にかえれば 同様に $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3$ も条件がかえられた時 定理も同様に成立つ。この場合は weight 1 の form の存在は明らかでない。

注意 4 平松 [2], Moreno [3] では $\mathbb{Q}$ 上 4 次式の高次相互法則が weight 1 の cusp form で D_4 型の

ものの Fourier 係数と関係づけられている。この場合もある楕円曲線の 4 分点などと関係がつけば興味深い。山本 [4] の仕事も関係するかもしれない。

References

- [1] S. Chowla and M. Cowles, On the coefficients c_n in the expansion $x \prod (1-x^n)^2 (1-x^{11n})^2 = \sum c_n x^n$, J. reine angew. Math., 292 (1977), 115-116.
- [2] T. Hiramatsu, Higher reciprocity law and modular forms of weight one, Comm. Math. Univ. St. Paul. 31 (1982), 75-85.
- [3] C. Moreno, The higher reciprocity law: an example, J. Number Theory, 12 (1980), 57-70.
- [4] Y. Yamamoto, On cusp forms attached to the fields of 2-division points of Abelian curves, Proc. of Seminar on Modern Methods in Number Theory, 1971.
- [5] M. Koike, Higher reciprocity law, modular forms of weight one and elliptic curves, preprint.