

$L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間の形について

(株) ディスコ 長谷川敦史 (Atsushi Hasegawa)

Disco Inc.

新潟大理学部 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)

Faculty of Science, Niigata University

1 序文と準備

$\mathbb{T}^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1, |w| = 1\}$ とし、 $L^2(\mathbb{T}^2)$ を $\mathbb{T}^2$ 上のルベグ空間 $H^2(\mathbb{T}^2)$ を $\mathbb{T}^2$ 上のハーディ空間とする。

$L^2(\mathbb{T}^2)$ の閉部分空間 $\mathfrak{M}$ が不変とは

$$z\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}, w\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$$

を満たすときいう。

$L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間の構造は $L^2(\mathbb{T})$ の不変部分空間の構造と違って、かなり複雑である。 $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間は、Beurling 型の不変部分空間、即ち、ある unimodular function ϕ を用いて $\phi H^2(\mathbb{T}^2)$ と一般的に表すことができるとは限らない。1988 年頃に、Ghatage-Manderkar [2] や Mandrekar [5] 等において、Beurling 型の不変部分空間の研究がなされてきており、不変部分空間が Beurling 型になるための必要かつ十分条件がいくつか得られている。それ以来、多くの研究者が $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間の形の研究を行っているが、まだ、すべての不変部分空間の形が決定していない (cf. [4, 6, 7], etc)。

1998 年に、[4] において、 zw -不変部分空間として不変部分空間の構造を研究し、また、Beurling 型不変部分空間と、 $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数 ϕ に対する $\phi H_0^2(\mathbb{T}^2)$ という形を含む不変部分空間の別のアプローチを与えた。

$(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ と $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ に対して、 f の Fourier 係数を次のように定める。

$$\hat{f}(m, n) = \int_{\mathbb{T}^2} f(z, w) \bar{z}^m \bar{w}^n d\mu.$$

但し μ は $\mathbb{T}^2$ 上の Haar 測度で、 $\text{supp } \hat{f} = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2, \hat{f}(m, n) \neq 0\}$ とおく. $L^2(\mathbb{T}^2)$ の部分空間 A に対して、 A によって生成された $L^2(\mathbb{T}^2)$ の閉部分空間を $[A]$ で表す. 他にも今後用いる $L^2(\mathbb{T}^2)$ の幾つかの部分空間を定義する.

(i) $H^2(z)$ と $H^2(w)$ をそれぞれ以下の Fourier 級数で表される $L^2(\mathbb{T}^2)$ の関数 f の集合とする.

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m0} z^m, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{0n} w^n.$$

(ii) H_z^2 と H_w^2 をそれぞれ以下の Fourier 級数で表される $L^2(\mathbb{T}^2)$ の関数 f の集合とする.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} z^m w^n, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} z^m w^n.$$

(iii) L_z^2 と L_w^2 をそれぞれ以下の Fourier 級数で表される $L^2(\mathbb{T}^2)$ の関数 f の集合とする.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m0} z^m, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{0n} w^n.$$

この報告では、[4] の続きとして、 $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間の形について考察する. $\mathfrak{M}$ を $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間とする. $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \ominus zw\mathfrak{M}$, $\mathfrak{G}_z = \mathfrak{M} \ominus z\mathfrak{M}$, $\mathfrak{G}_w = \mathfrak{M} \ominus w\mathfrak{M}$ とおく. $\mathfrak{F}_z$ と $\mathfrak{F}_w$ をそれぞれ $\mathfrak{F}$ に含まれる最大の z -不変部分空間と w -不変部分空間とする. §2 において、我々は $\mathfrak{F}_z \neq 0$ かつ $\mathfrak{F}_w \neq 0$ となるような $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間の特徴付けを与える. またそのとき $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ に含まれる 2 つの unimodular 関数 ϕ_z と ϕ_w が存在して $\mathfrak{F}_z = \phi_z H^2(z)$ と $\mathfrak{F}_w = \phi_w H^2(w)$ を満たしている. そこで $\varphi = \overline{\phi_w} \phi_z$ と置き、我々は次の不変部分空間を考える.

$$\mathfrak{M}_\varphi = [H^2(\mathbb{T}^2) + \varphi H^2(\mathbb{T}^2)].$$

このとき、 $\mathfrak{M}$ は $N = \overline{\phi_w \mathfrak{M}} \ominus \mathfrak{M}_\varphi$ として $\phi_w(\mathfrak{M}_\varphi \oplus N)$ という形で表せる. §3 では $\text{supp} \hat{\varphi} \subset \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$ を満たす $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数 φ を考える. その φ に対して、不変部分空間 $\mathfrak{M}_\varphi$ の特徴付けを与える. つまり $\mathfrak{F}_w = H^2(w)$ と $\mathfrak{F}_z = \varphi H^2(z)$ が成立するための十分条件について考える. §4 では [4] の一般化として、次の不変部分空間を考える.

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)} = [H^2(\mathbb{T}^2) + \psi_\alpha^{(m,n)} H^2(\mathbb{T}^2)]$$

($\psi_\alpha^{(m,n)}$ の定義は §4 参照). 更に、 $\mathfrak{M}$ がある $\alpha \in \mathbb{D}$ に対して $\mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)}$ の形になるための必要かつ十分条件を考える. ただし、 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ とする.

この報告は、Guoxing Ji (Shaanxi Normal University, China) と大和田智義 (鶴岡高専) との共同研究である.

2 zw -不変部分空間としての不変部分空間

$\mathfrak{M}$ を $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間とする. 自然数 n に対して $z^n \mathfrak{M} \supset z^{n+1} \mathfrak{M}$ と $w^n \mathfrak{M} \supset w^{n+1} \mathfrak{M}$ が成り立つので、 $\bigcap_{k=1}^{\infty} z^k \mathfrak{M}$ と $\bigcap_{k=1}^{\infty} w^k \mathfrak{M}$ は不変部分空間である. $\bigcap_{k=1}^{\infty} z^k \mathfrak{M} = \{0\}$ (resp. $\bigcap_{k=1}^{\infty} w^k \mathfrak{M} = \{0\}$) が成り立つとき、 $\mathfrak{M}$ は z -pure (resp. w -pure) であるという. $z\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ (resp. $w\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$) が成り立つとき、 $\mathfrak{M}$ は z -reducing (resp. w -reducing) であるという. z -reducing (resp. w -reducing) な不変部分空間は [7] で特徴付けされている.

$\mathfrak{M}$ は不変部分空間であるので、 $\mathfrak{M}$ は zw -不変でもあり、自然数 n に対して $(zw)^n \mathfrak{M} \supset (zw)^{n+1} \mathfrak{M}$ が成り立つ. $\bigcap_{k=1}^{\infty} (zw)^k \mathfrak{M} = \{0\}$ が成り立つとき、 $\mathfrak{M}$ は zw -pure であるという. $zw\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ が成り立つとき、 $\mathfrak{M}$ は zw -reducing であるという. まず最初に次の命題が成り立つ.

Proposition 2.1 $\mathfrak{M}$ を $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間としたとき、次が成り立つ.

- (i) $\mathfrak{M}$ が z -pure かまたは w -pure であるとき、 $\mathfrak{M}$ は zw -pure である.
- (ii) $\mathfrak{M}$ が zw -reducing であることの必要かつ十分条件は $\mathfrak{M}$ が z -reducing かつ w -reducing を満たすことである.

$\mathfrak{M}$ が zw -reducing であるときは、[6] と [7] により $\mathfrak{M}$ の形はよく知られている。従って今後は $\mathfrak{M}$ が zw -pure であるという仮定のもとで、話を進めていく。 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \ominus zw\mathfrak{M}$ 、 $\mathfrak{G}_z = \mathfrak{M} \ominus z\mathfrak{M}$ 、 $\mathfrak{G}_w = \mathfrak{M} \ominus w\mathfrak{M}$ とおくと、次を得る。

Proposition 2.2 次が成り立つ。

$$(i) \mathfrak{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus z^k \mathfrak{G}_z \oplus \bigcap_{k=1}^{\infty} z^k \mathfrak{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus w^k \mathfrak{G}_w \oplus \bigcap_{k=1}^{\infty} w^k \mathfrak{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus (zw)^k \mathfrak{F}.$$

$$(ii) \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_z \oplus z\mathfrak{G}_w = \mathfrak{G}_w \oplus w\mathfrak{G}_z.$$

$\mathfrak{F}_z$ (resp. $\mathfrak{F}_w$) を $\mathfrak{F}$ に含まれる最大の z -不変 (resp. w -不変) 部分空間とすると、 $\mathfrak{F}_z = \bigcap_{k=0}^{\infty} z^k \mathfrak{F}$ 、 $\mathfrak{F}_w = \bigcap_{k=0}^{\infty} w^k \mathfrak{F}$ 、 $\mathfrak{F}_z \subset \mathfrak{G}_w$ 、 $\mathfrak{F}_w \subset \mathfrak{G}_z$ が成り立つ。

Proposition 2.3 $\mathfrak{F}_z$ (resp. $\mathfrak{F}_w$) は $\mathfrak{G}_w$ (resp. $\mathfrak{G}_z$) に含まれる最大の z -不変 (resp. w -不変) 部分空間である。

Proposition 2.4 (cf. [4, Proposition 2]) $\mathfrak{M}$ を zw -pure な $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間とすると、次が成り立つ。

(i) $z\mathfrak{F}_z \subsetneq \mathfrak{F}_z$ であるための必要かつ十分条件は $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ に含まれる *unimodular* 関数 ϕ_z が存在して $\mathfrak{F}_z = \phi_z H_z^2(z)$ が成り立つことである。

(ii) $\mathfrak{F}_z = z\mathfrak{F}_z \neq \{0\}$ であるための必要かつ十分条件は $\mathfrak{M} = \chi_E q H_z^2$ と表せることである。ここで q は $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の *unimodular* 関数で、 χ_E は $\mathbb{T}^2$ の Borel 部分集合 E 上の特性関数で $\chi_E \in L_z^2$ と $\chi_E \neq 0$ を満たす。さらに、 $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_z$ と $\mathfrak{F}_w = \{0\}$ が成り立つ。

同様に我々は $\mathfrak{F}_w$ についての次の結果を得る。

Proposition 2.5 (cf. [4, Proposition 3]) $\mathfrak{M}$ を zw -pure な $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間とすると、次が成り立つ。

(i) $z\mathfrak{F}_w \subsetneq \mathfrak{F}_w$ であるための必要かつ十分条件は $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ に含まれる *unimodular* 関数 ϕ_w が存在して $\mathfrak{F}_w = \phi_w H_w^2(z)$ が成り立つことである。

(ii) $\mathfrak{F}_w = w\mathfrak{F}_w \neq \{0\}$ であるための必要かつ十分条件は $\mathfrak{M} = \chi_E q H_w^2$ と表せることである。ここで q は $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の *unimodular* 関数で、 χ_E は $\mathbb{T}^2$ の Borel 部分集合 E 上の特性関数で $\chi_E \in L_w^2$ と $\chi_E \neq 0$ を満たす。さらにこのとき、 $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_w$ と $\mathfrak{F}_z = \{0\}$ が成り立つ。

以後、 $\mathfrak{F}_z \neq \{0\}$ と $\mathfrak{F}_w \neq \{0\}$ を仮定して議論を進めていく。このとき、 $z\mathfrak{F}_z \subsetneq \mathfrak{F}_z$ と $w\mathfrak{F}_w \subsetneq \mathfrak{F}_w$ を得る。なぜなら、 $\mathfrak{F}_z = z\mathfrak{F}_z \neq \{0\}$ と仮定すると、命題 4 の (ii) より、 $\mathfrak{M} = \chi_{Eq}H_z^2$ と $\mathfrak{F}_w = \{0\}$ を得る。しかしこれは矛盾である。従って、 $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数 ϕ_z と ϕ_w が存在し、 $\mathfrak{F}_z = \phi_z H^2(z)$ と $\mathfrak{F}_w = \phi_w H^2(w)$ を満たす。 $\widetilde{\mathfrak{M}} = \overline{\phi_w} \mathfrak{M}$ と置くと、 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ もまた $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間である。 $\widetilde{\mathfrak{F}} = \widetilde{\mathfrak{M}} \ominus zw\widetilde{\mathfrak{M}}$ とする。 $(\widetilde{\mathfrak{F}})_z$ (resp. $(\widetilde{\mathfrak{F}})_w$) を $\widetilde{\mathfrak{F}}$ の最大の z -不変 (resp. w -不変) 部分空間とする。

$\varphi = \overline{\phi_w} \phi_z$ と置き、更に $\mathfrak{M}_\varphi = [H^2(\mathbb{T}^2) + \varphi H^2(\mathbb{T}^2)]$ と置く。このとき $\mathfrak{M}_\varphi$ は zw -pure な $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間で $\mathfrak{M}_\varphi$ は $\widetilde{\mathfrak{M}}$ に含まれる。 $\mathfrak{F}_\varphi = \mathfrak{M}_\varphi \ominus zw\mathfrak{M}_\varphi$ 、 $\mathfrak{G}_z^\varphi = \mathfrak{M}_\varphi \ominus z\mathfrak{M}_\varphi$ 、 $\mathfrak{G}_w^\varphi = \mathfrak{M}_\varphi \ominus w\mathfrak{M}_\varphi$ とそれぞれ置く。 $\mathfrak{F}_z^\varphi$ (resp. $\mathfrak{F}_w^\varphi$) を $\mathfrak{F}_\varphi$ に含まれる最大の z -不変 (resp. w -不変) 部分空間とする。このとき、

Proposition 2.6 (i) $\mathfrak{F}_z^\varphi = \varphi H^2(z)$ 、 $\mathfrak{F}_w^\varphi = H^2(w)$ 。

(ii) φ は $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数で $\text{supp } \hat{\varphi} \subset \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$ を満たす。

従って次を得る。

Theorem 2.7 $\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{F}_z = \phi_z H^2(z)$ 、 $\mathfrak{F}_w = \phi_w H^2(w)$ を満たす $L^2(\mathbb{T}^2)$ の zw -pure 不変部分空間とする。ただし、 ϕ_w と ϕ_z は $L^2(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数とする。 $\varphi = \overline{\phi_w} \phi_z$ 、 $N = \widetilde{\mathfrak{M}} \ominus \mathfrak{M}_\varphi$ と置くと $\mathfrak{M}$ は次のように表せる。

$$\mathfrak{M} = \phi_w(\mathfrak{M}_\varphi \oplus N)。$$

ただし、 φ は $\text{supp } \hat{\varphi} \subset \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$ を満たす $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数である。

Example 2.8 自然数 m と n に対して、我々は次の不変部分空間を考える。

$$H_{m,n}^2(\mathbb{T}^2) = [z^m H^2(\mathbb{T}^2) + w^n H^2(\mathbb{T}^2)]。$$

$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{F}_w = w^m H^2(w)$ 、 $\mathfrak{F}_z = w^n H^2(z)$ を満たす不変部分空間とする。そのとき、明らかに $\mathfrak{M} \supset H_{m,n}^2(\mathbb{T}^2)$ が成り立つ。また、 $N = \overline{w^n}(\mathfrak{M} \ominus H_{m,n}^2(\mathbb{T}^2))$ と置くと

$$\mathfrak{M} = H_{m,n}^2(\mathbb{T}^2) \oplus w^n N$$

が成り立つ。

$m = 1$ または $n = 1$ のときは、 $N = 0$ となる。 $m = n = 2$ のときは、 N の形は以下のいずれかの形になることがわかる。

(i) $N = \{0\}$;

(ii) $N = [z\bar{w}]$;

(iii) $N = [z\bar{w}, \alpha z\bar{w}^2 + \beta\bar{w}]$ 。ただし、 α と β は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす 0 でない複素数である。

3 不変部分空間 $\mathfrak{M}_\varphi$

φ を $\text{supp } \hat{\varphi} \subset \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$ を満たす $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数とする。 $\mathfrak{M}_\varphi = [H^2(\mathbb{T}^2) + \varphi H^2(\mathbb{T}^2)]$ と置く。このとき $\mathfrak{M}_\varphi$ は次を満たす zw -pure な $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間である。

$$H^2(\mathbb{T}^2) \subset \mathfrak{M}_\varphi \subset H_w^2.$$

$\mathfrak{F}_z^\varphi = \mathfrak{M}_\varphi \ominus zw\mathfrak{M}_\varphi$ 、 $\mathfrak{G}_z^\varphi = \mathfrak{M}_\varphi \ominus z\mathfrak{M}_\varphi$ 、 $\mathfrak{G}_w^\varphi = \mathfrak{M}_\varphi \ominus w\mathfrak{M}_\varphi$ と置く。更に $\mathfrak{F}_z^\varphi$ (resp. $\mathfrak{F}_w^\varphi$) を $\mathfrak{F}_z^\varphi$ に含まれる最大の z -不変 (resp. w -不変) 部分空間とする。もし $\varphi \in H^2(z)$ とすると、 $\mathfrak{M}_\varphi = H^2(\mathbb{T}^2)$ であるから、 $\varphi \notin H^2(z)$ と仮定する。

この節では、 $\mathfrak{F}_z^\varphi = \varphi H^2(z)$ and $\mathfrak{F}_w^\varphi = H^2(w)$ という条件を考える。

Proposition 3.1 φ を $\text{supp } \hat{\varphi} \subset \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$ 、 $\varphi \notin H^2(z)$ を満たす $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数とする。そのとき $\varphi H^2(z) \subset \mathfrak{F}_z^\varphi \subset \varphi L_z^2$ 、 $H^2(w) \subset \mathfrak{F}_w^\varphi \subset L_w^2$ が成り立つ。

Theorem 3.2 次が成り立つ。

- (i) $\mathfrak{F}_w^\varphi = H^2(w)$ であることと、 $\mathfrak{M}_\varphi \cap \overline{wH^2(w)} = \{0\}$ であることは同値である。
- (ii) $\mathfrak{F}_z^\varphi = \varphi H^2(z)$ であることと、 $\mathfrak{M}_\varphi \cap \overline{\varphi zH^2(z)} = \{0\}$ であることは同値である。

Corollary 3.3 次が成り立つ。

- (i) $\mathfrak{M}_\varphi \perp \overline{wH^2(w)}$ が成り立つとき、 $\mathfrak{F}_w^\varphi = H^2(w)$ が成り立つ。
- (ii) $\mathfrak{M}_\varphi \perp \overline{\varphi zH^2(z)}$ が成り立つとき、 $\mathfrak{F}_z^\varphi = \varphi H^2(z)$ が成り立つ。

Corollary 3.4 次が成り立つ。

- (i) $1 \in \mathfrak{S}_w^\varphi$ が成り立つことと、 $\hat{\varphi}(0, n) = 0$ が 1 以上のすべての自然数 n に対して成り立つことは同値である。更にこの場合、 $\mathfrak{F}_w^\varphi = H^2(w)$ が成り立つ。
- (ii) $\varphi \in \mathfrak{S}_z^\varphi$ が成り立つことと、 $\hat{\varphi}(m, 0) = 0$ が 1 以上のすべての自然数 m に対して成り立つことは同値である。更にこの場合、 $\mathfrak{F}_z^\varphi = \varphi H^2(z)$ が成り立つ。
- (iii) $\hat{\varphi}(m, 0) = \hat{\varphi}(0, -n) = 0$ が 1 以上のすべての自然数 m と n に対して成り立つとき、 $\mathfrak{F}_z^\varphi = \varphi H^2(z)$, $\mathfrak{F}_w^\varphi = H^2(w)$ が成り立つ。

4 不変部分空間のあるクラス

§2 における記号や仮定のもとで、 $\mathfrak{F}_z \neq \{0\}$ 、 $\mathfrak{F}_w \neq \{0\}$ を仮定する。一般的には $\mathfrak{F}_z + \mathfrak{F}_w \subset [\mathfrak{S}_z + \mathfrak{S}_w] \subset \mathfrak{F}$ が成り立つ。[4] では、我々は $\mathfrak{F}_z + \mathfrak{F}_w = [\mathfrak{S}_z + \mathfrak{S}_w]$ を満たす不変部分空間の構造について研究した。

$\mathbb{D}$ を複素数平面の単位円 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ とする。任意の $\alpha \in \mathbb{D}$, $m, n \in \mathbb{N}$ に対して関数 $\psi_\alpha^{(m,n)}$ を

$$\psi_\alpha^{(m,n)}(z, w) = \frac{z^m \bar{w}^n - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z^m w^n}$$

で定義する。このとき $\psi_\alpha^{(m,n)}$ は任意の $(k, \ell) \in \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$ に対して $\widehat{\psi_\alpha^{(m,n)}}(k, \ell) = 0$ を満たす $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数である。更に、 $L^2(\mathbb{T})$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)}$ を

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)} = [H^2(\mathbb{T}^2) + \psi_\alpha^{(m,n)} H^2(\mathbb{T}^2)]$$

とおくと、次を得る。

Theorem 4.1 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)}$ ならば、次が成り立つ。

$\mathfrak{F}_w = H^2(w)$ 、 $\mathfrak{F}_z = \psi_\alpha^{(m,n)} H^2(z)$ 、 $\mathfrak{S}_w = \psi_\alpha^{(m,n)} H^2(z) + [1, z, \dots, z^{m-1}]$ 、 $\mathfrak{S}_z = H^2(w) + [\psi_\alpha^{(m,n)}, w\psi_\alpha^{(m,n)}, \dots, w^{n-1}\psi_\alpha^{(m,n)}]$ 。更に、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{F}_z + \mathfrak{F}_w + [z, \dots, z^m] + [w\psi_\alpha^{(m,n)}, \dots, w^{n-1}\psi_\alpha^{(m,n)}] \\ &= \mathfrak{F}_z + \mathfrak{F}_w + [z, \dots, z^{m-1}] + [w\psi_\alpha^{(m,n)}, \dots, w^n\psi_\alpha^{(m,n)}]. \end{aligned}$$

そこで、定理 4.1 の逆として、次の定理を得る。

Theorem 4.2 $\mathfrak{M}$ を zw -pure な $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間とし、 m と n を自然数とする。そのとき、ある $\alpha \in \mathbb{D}$ が存在して $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)}$ が成り立つことと、 $\text{supp } \hat{\varphi} \subset \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$ を満たす $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数 φ が存在して $\mathfrak{F}_w = H^2(w)$ 、 $\mathfrak{F}_z = \varphi H^2(z)$ 、 $\mathfrak{G}_w = \varphi H^2(z) + [1, \dots, z^{m-1}]$ 、 $\mathfrak{G}_z = H^2(w) + [\varphi, w\varphi, \dots, w^{n-1}\varphi]$ となることは同値である。

特に $\hat{\varphi}(0,0) = 0$ であるとする、 $\alpha = 0$ より次が成り立つ。

Corollary 4.3 $\mathfrak{M}$ を zw -pure な $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間とし、 m と n を自然数とする。このとき、 $\mathfrak{M} = \overline{w^n} H_{m,n}^2(\mathbb{T}^2)$ が成り立つことと、 $\text{supp } \hat{\varphi} \subset \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$ 、 $\hat{\varphi}(0,0) = 0$ を満たす $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数 φ が存在して $\mathfrak{F}_w = H^2(w)$ 、 $\mathfrak{F}_z = \varphi H^2(z)$ 、 $\mathfrak{G}_w = \varphi H^2(z) + [1, \dots, z^{m-1}]$ 、 $\mathfrak{G}_z = H^2(w) + [\varphi, w\varphi, \dots, w^{n-1}\varphi]$ となることは同値である。

最後に定理 4.2 の反例を挙げる。即ち、ある unimodular 関数 ϕ_z が存在して $\mathfrak{F}_w = H^2(w)$ 、 $\mathfrak{F}_z = \phi_z H^2(z)$ を満たすが、 $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)}$ の形をしていない例である。

Example 4.4 $\psi_\alpha^{(m,n)}$ は先に定義したものとし、 $\phi_z = z\psi_\alpha^{(1,1)}$ と置く。更に H_w^2 に含まれる不変部分空間 $\mathfrak{M}_z$ を

$$\mathfrak{M}_z = [H^2(\mathbb{T}^2) + \phi_z H^2(\mathbb{T}^2)]$$

で定義する。 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_z$ が成り立つとすると、 $\mathfrak{F}_w = H^2(w)$ 、 $\mathfrak{F}_z = \phi_z H^2(z)$ 、 $\mathfrak{G}_z = H^2(w) + [\phi_0]$ 、 $\mathfrak{G}_w = \phi_z H^2(z) + [1, z]$ が成り立つ。ただし、 $\phi_0 = \phi_z - \langle \phi_z, z \rangle z$ である。従って、

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_z + \mathfrak{F}_w + [z, z^2]$$

が成り立つ。

Example 4.5 $\psi_\alpha^{(m,n)}$ は先に定義したものとし、 $\phi_w = \bar{w}\psi_\alpha^{(1,1)}$ と置く。更に H_w^2 に含まれる不変部分空間 $\mathfrak{M}_w$ を

$$\mathfrak{M}_w = [H^2(\mathbb{T}^2) + \phi_w H^2(\mathbb{T}^2)]$$

で定義する。 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_w$ が成り立つとすると、 $\mathfrak{F}_w = H^2(w)$ 、 $\mathfrak{F}_z = \phi_w H^2(z)$ 、 $\mathfrak{G}_z = H^2(w) + [\phi_w, w\phi_w]$ 、 $\mathfrak{G}_w = \phi_z H^2(z) + [\phi_0]$ が成り立つ。ただし、

$$\phi_0 = z\bar{w} + \frac{1 - |\alpha|^2}{\bar{\alpha}}$$

である。従って

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_z + \mathfrak{F}_w + [z\bar{w}, z\phi_0]$$

が成り立つ。

以上の2つの例は、定理4.2は $\mathfrak{G}_w = \phi_z H^2(z) + [1, z, \dots, z^{m-1}]$ 、 $\mathfrak{G}_z = H^2(w) + [\phi_z, \dots, w^{n-1}\phi_z]$ という条件無しでは成り立たないことを示している。

参考文献

- [1] D. Gaspar and N. Suciu, *On invariant subspaces in the bitorus*, J. Operator Theory, **30**(1993), 227-241.
- [2] P. Ghatage and V. Manderkar, *On Beurling type invariant subspaces of $L^2(\mathbb{T}^2)$ and their equivalence*, J. Operator Theory, **20** (1988), 31-38.
- [3] H. Helson, *Lectures on invariant subspaces*, Academic Press, New York, 1964.
- [4] G. Ji, T. Ohwada and K.-S. Saito, *Certain invariant subspace structure of $L^2(\mathbb{T}^2)$* , Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 2361-2368.
- [5] R. Mandrekar, *The validity of Beurling theorems in polidisc*, Proc. Amer. Math. Soc., **103** (1988), 145-148.

- [6] T. Nakazi, *Certain invariant subspaces of H^2 and L^2 on a bidisc*, Canad. J. Math., **40** (1988), 1722-1280.
- [7] T. Nakazi, *Invariant subspaces in the bidisc and commutators*, J. Austral. Math. Soc., **56** (1994), 232-242.