

ベナール対流における形の形成

同志社大学・工学部 水島二郎 (Jiro Mizushima)
大和忠夫 (Tadao Yamato)

1. はじめに

下から熱せられた流体層に発生するきれいな六角形のセルパターンの写真 (図 1) を見て多くの人達が好奇心をかき立てられてきた。Bénard (1900) は実験によりこの対流の発生する条件を定量的に調べた。Rayleigh (1916) は Bénard の実験のモデル化を行い、流体層の不安定性によりこの対流が起こること、すなわち無次元量 (レイリー数) R がある臨界値 R_c よりも大きいとき対流が発生することを理論的に示した。Rayleigh のモデルは二枚の平行平板間に満たされた流体層の熱対流であり、一方 Bénard の実験は上の面が空気に接している厚さ 1mm 程度の流体層中に発生する熱対流であった。このような違いはあっても Rayleigh の理論は対流の発生する機構を明解に示しており、線形安定性理論の有効性を示すことになった。後に、Pearson (1958) は Bénard の実験のような薄い流体層では浮力よりも表面張力の温度依存性による力の方がより大きな効果を及ぼすことを示し、どちらの影響がより大きいかに判定する基準を具体的に示した。今では、表面張力の影響が大きいときに発生する熱対流をマランゴニ対流、浮力の効果が大きいときはベナール対流と呼んでいる。したがって、Bénard が詳しく調べた対流はマランゴニ対流に分類される。

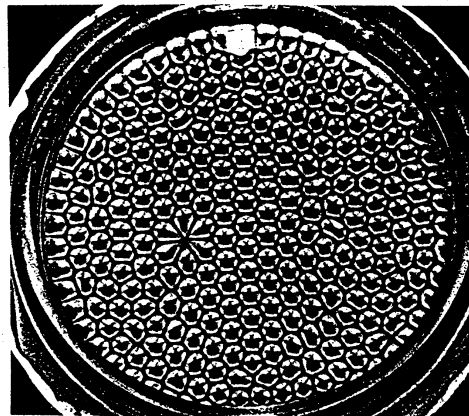


図 1. 熱対流における六角形セルパターン. Koschmieder 1974.

ベナール対流の発生の機構をみごとに説明した線形安定性理論も六角形セルパターンがなぜ選ばれるかという説明をすることはできなかった。六角形のセルパターンの説明にはなんらかの非線形理論が必要であった。非線形理論の試みとして Gor'kov (1957) と Malkus & Veronis (1958) はエネルギー方程式から、レイリー数が臨界値 R_c よりもわずかに大きいときに生じるベナール対流の定常解の振幅と平面形を求めた。計算を行ったいくつかの平面形に対して最も熱伝達効率が大きい対流が生じるという判定基準で調べると、上下対称な境界条件の下では通常の流体の場合、六角形よりも四角形の方が起こり易いという結論となった。同時期に Stuart (1958) は平面ポアズイユ流とテイラークエット流についてほぼ同じ方

法で定常解を求めている。

Lortz (1961) と Busse (1962) は Malkus & Veronis (1958) と同様な方法で定常解を計算しさらにその定常解の線形安定性を調べた。Lortz は浮力項以外は流体の物理的性質が一定であるとするブシネスク近似を用いたが、Busse は流体の粘性率・熱伝導率・定圧比熱・熱膨張係数が温度に依存する効果も取り入れた。定常解の線形安定性を調べた結果、上下対称な境界条件の下ではロール解のみが安定であるが、上下非対称な境界条件の下では臨界レイリー数の 3.4 倍以上のレイリー数で六角形セルパターンが安定となりうることを示した。Lortz と Busse のこれらの論文は出版されていないので直接に読むことはできないが、Segel (1965b) が自分の論文の中でこれらの論文の簡単な紹介を行っている。

ランダウが提案したような攪乱の振幅を支配する発展方程式の導出は Palm (1960), Segel & Stuart (1962), Segel (1962, 1965a, 1965b) によって行われ、弱非線形安定性理論の基礎づけが行われた。同時期に Stuart (1960) と Watson (1960) が弱非線形安定性理論の基礎固めを行い、ランダウの提案した振幅方程式を流体の運動方程式から導き、平面ポアズイユ流や平面クエット流の安定性を調べている。Palm や Segel たちは動粘性係数が温度に線形に依存すると仮定し、二つの自由境界面に挟まれた流体層の安定性を調べた。彼らの求めた方程式は次の振幅方程式で代表される。

$$\begin{aligned}
 \frac{dA_1}{dt} &= \epsilon A_1 + a A_2 A_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - A_1 (R_1 A_1^2 + P A_2^2 + P A_3^2) \\
 \frac{dA_2}{dt} &= \epsilon A_2 + a A_1 A_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - A_2 (P A_1^2 + R_1 A_2^2 + P A_3^2) \\
 \frac{dA_3}{dt} &= \epsilon A_3 + a A_1 A_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - A_3 (P A_1^2 + P A_2^2 + R_1 A_3^2) \\
 A_1 \frac{d\theta_1}{dt} &= a A_2 A_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
 A_2 \frac{d\theta_2}{dt} &= a A_1 A_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
 A_3 \frac{d\theta_3}{dt} &= a A_1 A_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)
 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、 A_1, A_2, A_3 はお互いに 60° 傾いた波数ベクトルをもつ三つのモードの振幅であり、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ はそれらのモードの位相である。この方程式系の係数を定め、その解の性質を調べるとロール解と六角形セルパターンの安定性がわかる。その結果は図 2 で要約される。図 2 に示すように六角形セルパターンは臨界レイリー数 R_c よりも小さいレイリー数で現れ、レイリー数を大きくしていくと $R = R_2$ で不安定となり、やがてロール状の対流が発生する。逆に大きいレイリー数で安定であるロール状の対流はレイリー数を小さくしていくと $R = R_1$ で不安定となり六角形セルパターンが生じる。すなわちヒステリシスの現象が観察される。これで六角形セルパターンの発生の機構は明らかになったかに見えるが、まだ解明されていない点が二つある。その一つはなぜある特定の大きさの波数を持ったモードだけが生き残るのか。もう一つはなぜお互いに 60° 傾いた波数ベクトルを持つモードだけが生き残るのか。

Mizushima (1993) は下面が固体、上面が自由境界を持つ水平流体層における二次元ロール解の非線形平衡解をニュートン法により求め、その振幅分布は二次の共鳴項を持つ振幅方程式系で記述できることを示した。さらに彼はそこで得られた振幅方程式を一般化し Zakharov

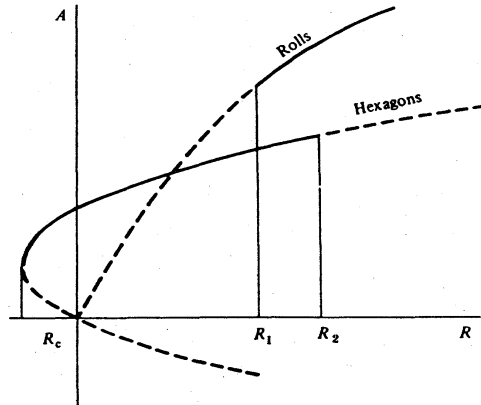


図2. 二次元ロール解と六角形セル状解の平衡振幅. 実線は安定な平衡振幅. 波線は不安定な平衡振幅. Segel 1965b.

(1968) が重力波に対して求めた連続波数に対する方程式に似た形をモデル方程式として提案した。モデル方程式系の解の性質を詳しく調べた結果、二次の共鳴項がなく、三次の非線形項の係数が一定のときは最大増幅波数をもつモードのみが生き残り単一モードが得られること、二次の共鳴項があるときには混合モード解が存在することを示した。

この論文では Mizushima (1993) の提案したモデル方程式を二次元波数を持つモードに対する振幅方程式に拡張し、三次元ベナール対流における平面形を選択を調べる。ここでも、Mizushima と同様下面が固体、上面が自由境界を持つ水平流体層における熱対流を取り扱う。上下境界条件の非対称性により系全体の非対称性を実現しているので Busse (1962) や Segel (1965a, 1965b) が考慮にいたした粘性の温度依存性はここでは考えない。2節で基礎方程式と線形安定性について述べ、3節で Mizushima (1993) の簡単な紹介を行う。4節で三次元攪乱に対するモデル方程式について詳しく調べ、モデル方程式を数値シミュレーションにより調べた結果を示す。5節で結論といくつかの問題点を指摘する。

2. 基礎方程式と線形安定性

深さが d の流体層を考える。底面は熱伝導性の良い固体壁、上面は自由表面とするが、表面張力の影響は小さいと仮定し考慮に入れないものとする。底面の温度が常に上面より $\delta\theta$ だけ高くなるように底面を熱するか上面を冷やす。流体の熱拡散係数 κ および動粘性係数 ν は温度に依らず一定であるとする。このときベナール対流を特徴づける無次元パラメータは次式で定義されるレイリー数 R とプラントル数 P の2つである。

$$R = \frac{\gamma g \delta \theta d^3}{\nu \kappa}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (2)$$

ここで、 γ は流体の熱膨張係数であり、 g は重力加速度を表す。

座標系は鉛直方向に z 軸をとり、それに直角に x 軸と y 軸をとる。浮力項を除いては流体の物質的な性質は一定であるとするブシネスク近似を用いると、流体の速度 $\mathbf{u}$ と熱伝導状態からの温度のずれ θ を支配する方程式は無次元形で次のように書くことができる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \Gamma + PR\theta \lambda + P\Delta \mathbf{u}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \lambda \cdot \mathbf{u} + \Delta \theta, \quad (5)$$

ここで、 λ は z 方向の単位ベクトルであり、(4)式において勾配の形でかける項はすべて $\nabla \Gamma$ の項に含まれている。自由表面と固体壁における速度 $\mathbf{u}$ と温度 θ に対する境界条件は次のように書ける。

$$\begin{aligned} u = v = w = \theta = 0 \quad \text{at } z = -1, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = w = \theta = 0 \quad \text{at } z = -1, \end{aligned} \quad (6)$$

流体が静止し熱伝導状態にある系の線形安定性を調べるため(4)、(5)式で非線形項を無視し、 $\mathbf{u}$ と θ について次式で表される x, y 方向のフーリエモードを考える。

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) \propto \tilde{\mathbf{u}}(z) \exp\{i(\alpha_x x + \alpha_y y) + st\}, \quad (7)$$

$$\theta(x, y, z, t) \propto \tilde{\theta}(z) \exp\{i(\alpha_x x + \alpha_y y) + st\}, \quad (8)$$

フーリエモードに対する線形化された方程式は次のように書くことができる。

$$s\left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2\right)\tilde{w} = \alpha^2 P R \tilde{\theta} + P\left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2\right)^2 \tilde{w}, \quad (9)$$

$$s\tilde{\theta} = \tilde{w} + \left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2\right)\tilde{\theta}, \quad (10)$$

ここで $\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2$ であり境界条件は次のようになる。

$$\tilde{w} = \frac{d\tilde{w}}{dz} = \tilde{\theta} = 0 \quad \text{at } z = -1, \quad \tilde{w} = \frac{d\tilde{w}}{dz} = \tilde{\theta} = 0 \quad \text{at } z = 0. \quad (11)$$

これらの式を解くことにより線形増幅率 $s = \alpha c_i$ を得ることができ、その結果を図3に示す。線形中立安定曲線はプラントル数に依存せず、攪乱の線形臨界レイリー数 R_c は1100.649でありそのときの水平方向の臨界波数 α_c は2.682である。

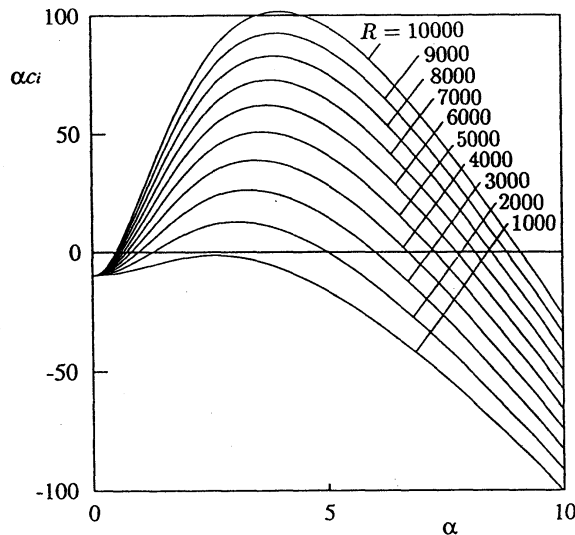


図3. 線形増幅率 $s = \alpha c_i$ の分布. $P = 7.0$.

3. 二次元ロール状攪乱に関するこれまでの研究のまとめ

3.1. 二次元ロール状攪乱の非線形平衡解

この節では、二次元ロール状攪乱の非線形平衡解について述べる。流れ場は y 方向に一定であり、 y 方向の速度成分 v がゼロであると仮定する。 (x, z) 平面での流れ関数 ψ を導入し、 ψ と θ を次のように x 方向にフーリエ展開する。

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n e^{in\alpha x}, \quad \theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n e^{in\alpha x}, \quad (12)$$

攪乱は z 方向に対称性を持たないが、いま取り扱っている問題は $z = -1$ と $z = 1$ に二枚の平板間のベナール対流において z 方向に奇対称な攪乱が発生する問題と等価であるので、 ψ_n および θ_n を奇数次のチェビシェフ多項式で展開する。すなわち、 ψ_n, θ_n を次のように展開する。

$$\psi_n = \sum_{m=0}^M a_{nm}(1-z^2)^2 T_{2m+1}(z), \quad \theta_n = \sum_{m=0}^M b_{nm}(1-z^2) T_{2m+1}(z). \quad (13)$$

ここで、 $T_n(z)$ は n 次のチェビシェフ多項式である。これらの展開式を (3), (4), (5) 式を ψ と θ で書き表した式に代入し、 $\partial/\partial t = 0$ とおいて得られる $2(N+1)(M+1)$ 個の実係数 a_{nm} と b_{nm} に対する代数方程式をガレルキン法を用いたニュートン・ラフソンの方法で解いた。

$w_n \equiv -i\alpha\psi_n$ のように定義すると w_1 は波数 α を持つフーリエ成分の振幅であり、いまの場合実数である。 $P = 7.0$ の場合の非線形平衡解の $z = -1/\sqrt{2}$ での振幅 w_1 の分布を図 4 に示す。この図からわかるように平衡振幅は $R = 1200$ に対しては 1 本の曲線から成り立っているが、 $R = 1500$ に対しては 2 本の曲線から、 $R = 2000$ に対しては 3 本の曲線から成り立っている。さらに大きな R に対して平衡振幅を表す曲線はより多くの曲線から構成されるであろうことが容易に想像できる。

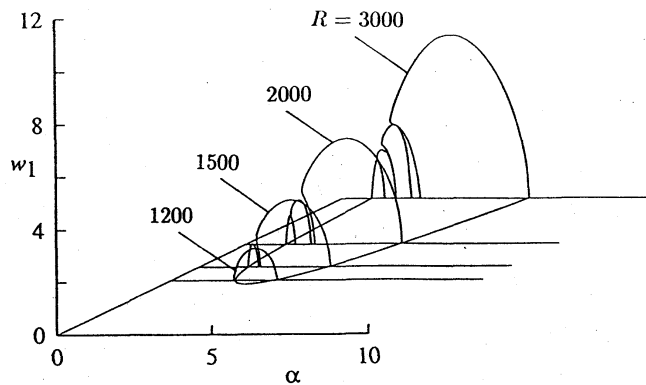


図 4. 非線形平衡解の $z = -1/\sqrt{2}$ での振幅 $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$ の分布.
二次元ロール解. $P = 7.0$.

後の比較のために $R = 1500$ での平衡振幅の分布を図 5 に示す。計算の方法から分かるように図 5 に示す解は $n = 0$ から $n = N$ までのすべてのフーリエモードが含まれているという意味ですべて混合解である。非対称な攪乱が発生するメカニズムは異なっているが

Busse (1987) が求めた分岐ダイアグラムとここで得られた分岐ダイアグラムは本質的には同じものを表している。そのことは次節で弱非線形安定性を調べるとさらに明らかになる。

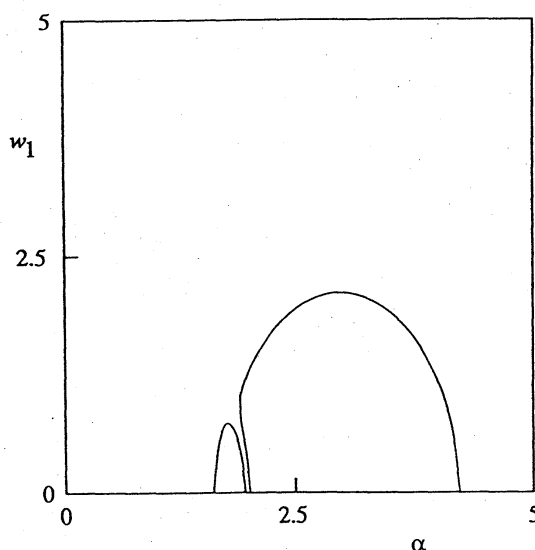


図 5. 非線形平衡解の $z = -1/\sqrt{2}$ での振幅 $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$ の分布.
二次元ロール解. $P = 7.0$. $R = 1500$.

3.2. 弱非線形安定性理論

さきに求めた平衡振幅のうち, $R = 1200$ の場合の平衡振幅は振幅展開法を用いた通常の弱非線形安定性理論により波数 α を持つ単一の基本モードの複素振幅 A_1 に対する振幅方程式が次のように得られる。

$$\frac{dA_1}{dt} = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1. \quad (14)$$

この振幅方程式に従えば、増幅攪乱 ($\lambda_1 > 0$) はランダウ係数 λ_{-111} が負のときは平衡振幅 $|A_1|_{eq} = (-\lambda_1/\lambda_{-111})^{1/2}$ を持つ。(13) 式に従う限り、線形不安定な攪乱が振幅ゼロまで減衰することは不可能である。攪乱の振幅が小さくなると非線形項が無視でき、線形安定特性により攪乱は成長することが予想される。

$R = 1500$ の場合の平衡振幅は線形不安定な攪乱も振幅ゼロまで減衰している。これは基本波と高調波との非線形共鳴が起こっているためであり、非線形共鳴の効果を考慮に入れると振幅方程式は次のようになる。

$$\frac{dA_1}{dt} = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-12} A_1^* A_2 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-212} |A_2|^2 A_1, \quad (15)$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \lambda_2 A_2 + \lambda_{11} A_1^2 + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2, \quad (16)$$

ここで、 A_1 および A_2 はそれぞれ波数 α を持つ基本波および波数 2α を持つ高調波に対する複素振幅である。また、すべての係数 λ_i , λ_{lm} および λ_{lmn} は実数である。この方程式は Busse (1987) が導いた方程式と同じ形をしており, Dangelmayr (1986), Dangelmayr & Armbruster (1986) が正規形の理論を用いて導いた方程式の特別な形になっている。

方程式 (15) と (16) の係数を実際に計算し、平衡解を求めた。図 6 に $P = 7.0$, $R = 1500$ における平衡振幅 w_1 の分布を示す。 $\alpha \simeq 1.85$ では $2(\alpha c_i)_{\alpha=1.85} \simeq (\alpha c_i)_{\alpha=3.70}$ となり、狭い意味の共鳴が起こり通常の‘振幅を一意的に定める方法’では λ_{11} を正確に定めることはできないので、 $1.67 \leq \alpha \leq 2.07$ に対しては (16) 式の λ_{11} の評価には可解条件を用いた。また、 $\alpha > 2.10$ では λ_2 が負となるので、(14) 式を用いて w_1 を求めた。点線で示した平衡振幅はこの平衡解が不安定、実線は安定であることを示している。特に、 $\alpha \leq 3.98$ においては平衡解はサブハーモニック不安定である。すなわち、この平衡解は $\alpha = \alpha_1 > 3.98$, $A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$ の単一モード解であるが、この解を $\alpha = \alpha_1/2$, $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$ の単一モード解であると見なすことも可能である。このときこの平衡解は A_1 の摂動に対して不安定となる。いいかえれば、 $\alpha = \alpha_1 \geq 3.98$ の単一モード解は $\alpha = \alpha_1/2$ の混合解に遷移する。図 6 に示した弱非線形安定性理論から得られた結果はフーリエ打ち切りの方法から計算した結果図 5 と比較すると、定性的にはもちろんのこと定量的にもよく一致していることがわかる。

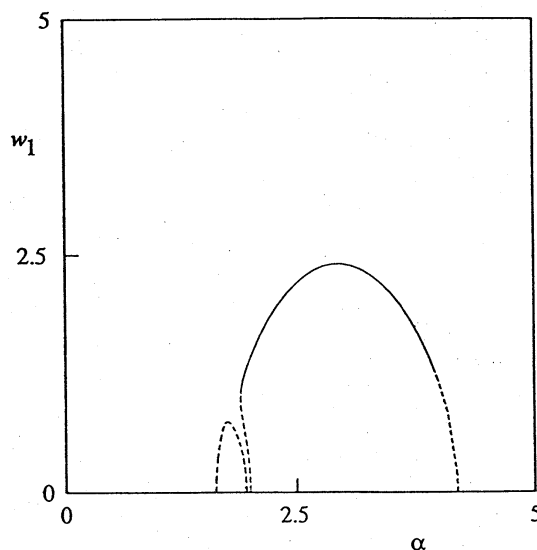


図 6. 弱非線形安定性理論から求めた w_1 の分布. 二次元ロール解. $P = 7.0$. $R = 1500$.

$R = 2000$ においては基本波と第一高調波および第二高調波との 3 波共鳴を取り扱わなければならない。 $R = 3000$ ではそれらに加えてさらに第三高調波との共鳴も考慮にいれた 4 波共鳴を取り扱う必要がある。また、これまで行われてきた弱非線形安定性理論および非線形平衡解を求める方法では、ある波数 α_1 を採りその波数を基本波としてその高調波 $n\alpha_1$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) のみを考慮に入れているのであるが、 $R = 1500$ の場合に明らかになったように基本波のサブハーモニック ($\alpha_1/2$) を考慮に入れば新たな不安定が生じ流れの遷移の仕方が変わってしまうことがありうる。この議論をさらに拡張すると基本波のサブハーモニックだけではなく α_1 以外のすべての波数をもつ攪乱が基本波に影響を与える可能性が想像できる。このように考えると‘基本波’という概念があまり意味をもたないことが分かる。

3.3. モデル方程式

ある波数のモードの振幅の発展はそのモード以外のすべての増幅モードからも影響を受けるはずである。そのような発想から振幅方程式を導くことを考えてみる。ある波数をもつモードの時間発展には連続無限個のモードが影響を与えるが、ここではもう少し問題を単純化して連続的な波数をもつ無限個のモードを有限個のモードで代表することを考え

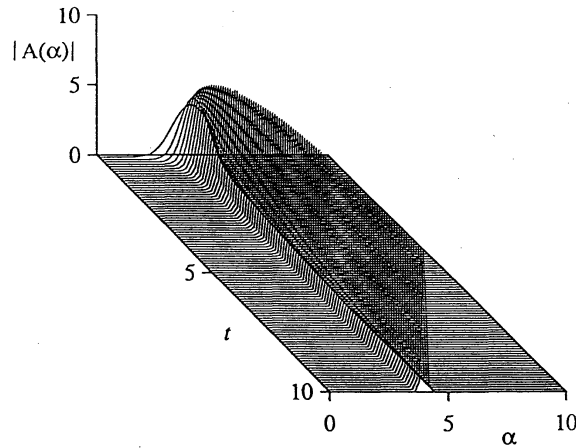


図7. 非線形共鳴がないときの振幅の時間発展. 二次元ロール解. $R = 10000$, $d_{np} = -1.0$.

る。波数領域 $0 < \alpha \leq \alpha_{max}$ の範囲にあるモードを考え、この波数領域を N 等分して波数 $\Delta\alpha \times n$ ($n = 1, 2, \dots, N$) を持つ N 個のモードのみを取り扱う。ここで、 $\Delta\alpha = \alpha_{max}/N$ である。波数 $n\Delta\alpha$ を持つモードの振幅 A_n を支配する発展方程式は流体運動の基礎方程式から振幅展開の方法により導くことができる。

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_p f_{np} A_{n-p} A_p + \sum_{p,q} g_{npq} A_{n-p-q} A_p A_q, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

ここで、いくつかの注意が必要である。中心多様体定理によれば、系は不安定モードの振幅だけで記述でき、安定モードの振幅は不安定モードの振幅と関数関係で結ばれている。しかし、ここでは特に安定モードの振幅も方程式 (17) で支配されているとしている。方程式 (17) ではすべてのモードが非線形共鳴を行っており、前節で求めた振幅方程式の自然な一般化になっている。方程式 (17) の導出に関していえば振幅展開の範囲内で厳密であり、連続量 α を離散的な有限個のモードで近似はしているがモデルではない。しかし、(17) 式は係数として a_n が N 個、 f_{np} が N^2 個、 g_{npq} が N^3 個あり、現実にこれだけの係数を正しく評価することには大変である。ここで、‘正しく’ という意味は係数の評価においては非斉次方程式を解く必要があるが、狭い意味の共鳴があるときには前節でも行ったように特別な配慮が必要であり、このため係数の評価を‘正しく’ 行うのは非常に難しくなるという意味である。

モデル方程式 (17) において係数 $f_{np} \equiv 0$ 、 $p + q \neq 0$ に対しては $g_{npq} \equiv 0$ の特別な場合について調べることにする。このとき方程式 (17) は

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_p d_{np} A_p^2 A_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

となる。

方程式 (18) 式の定常解は単一モード解と混合モード解がある。単一モード解は $A_{neq} = \sqrt{-a_n/d_{nn}}$ となる。この単一モード解は自分自身のゆらぎに対しては常に安定であるが $q \neq n$ であるモード q のゆらぎに対しては $a_q < a_n \times d_{qn}/d_{nn}$ のとき安定であり、 $a_q > a_n \times d_{qn}/d_{nn}$ のとき不安定である。このことから、もし d_{np} が q に依存せず一定であるならば線形増幅

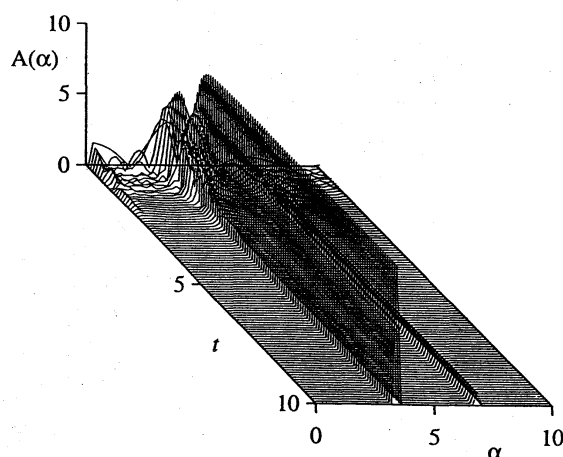


図8. 非線形共鳴があるときの振幅の時間発展. $R = 10000$, $-b_{np} = c_{np} = \beta = 1.0$.

率が最大のモードだけが安定に残り、それ以外のモードは不安定になり、そのエネルギーは線形増幅率最大のモードに吸収されてしまうことが想像できる。 d_{np} が q に依存して変化するときでも比 d_{qn}/d_{nn} が1に近いときには線形増幅率最大のモードを含んでその周りのモードが生き残り、それ以外のモードは不安定なって、減衰してしまう。混合モード解は d_{np} が n と p に依存しないで一定のときには存在しないが、一定でないときには存在する。混合解が存在する条件は d_{np} がつくる行列の行列式が正則であることである。混合モード解の安定条件は簡単に書き下すことができるが、その物理的解釈は簡単ではないのでここでは議論を行わないことにする。

方程式(18)を初期値問題として数値的に解く。 $\alpha_{max} = 20.0$, $\Delta\alpha = 0.2$, $N = 100$ とする。線形増幅率は図3に示したものをうい、ランダウ係数に相当する係数 d_{np} は最も簡単な場合として $d_{np} \equiv -1.0$ を用いることにする。初期条件は $A_n = 0.01$ ($n = 1, 2, \dots, N$)とした。 $R = 10000$ の場合の結果を図7に示す。この図で $A(\alpha) = A_n$, $\alpha = n \times 0.2$ である。図から分かるように初め($t \leq 0.5$)は各モードはそれぞれの持つ線形増幅率に従って増幅するが、振幅が大きくなると非線形効果によって、より増幅率の大きいモードによりその成長が抑えられ、最大増幅率を持つモード以外は減衰させられてしまう。その結果充分時間が経ったのちには最大増幅モードのみが生き残り他のモードは減衰してしまう。

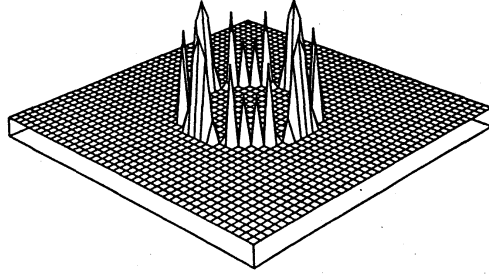
次に全てのモードが共鳴をする場合を取り扱う。ただし、2次の非線形相互作用はすべて取り入れるが、3次の非線形項は $A_p^2 A_n$ の形の項のみを取入れ、それ以外の3次の非線形項は重要でないと仮定する。この仮定では変調不安定モードを排除していることになっている。変調不安定性は一般に定常波解を変調し新たにもう1つの振動数を生み出す可能性をもっているが後で示すように2次の非線形項が同じ役割を果たすことが分かる。このとき方程式(17)は次のように書き換えることができる。

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_{p=1}^{N-n} b_{np} A_p A_{n+p} + \sum_{p=1}^{[n/2]} c_{np} A_p A_{n-p} + \sum_{p=1}^N d_{np} A_p^2 A_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

方程式(19)を初期値問題として数値的に解く。ここでも $\alpha_{max} = 20.0$, $\Delta\alpha = 0.02$, $N = 100$ とする。また、ランダウ係数に相当する係数 d_{np} は最も簡単な場合として $d_{np} \equiv -1.0$ を用

いる。共鳴項の係数を $-b_{np} = c_{np} = \beta = 1.0$ とし、初期条件を $A_1 = 0.01$, $(n = 1, 2, 3, \dots, N)$ にとり、 $R = 10000$ とした場合の結果を図8に示す。この図からわかるように A_n は時間が充分に経つと定常的な値に漸近し、定常状態では波数が $1:2$ の関係にある $\alpha = 3.4$ と 6.8 の波数を持つ二つのモードがゼロでない振幅を持つことがわかる。

(a)



(b)

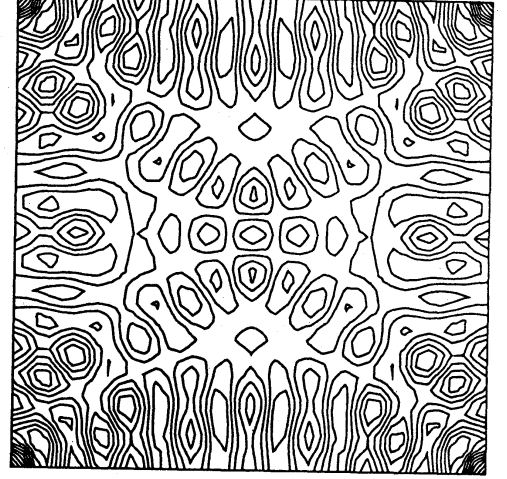


図9. 非線形共鳴がないときの振幅の分布. $R = 10000$. $t = 10$
(a) 波数空間での振幅の分布. (b) (x, y) -波数空間での振幅の分布.

4. 三次元攪乱に対するモデル方程式

この節では、前節で紹介した二次元ロールに対するモデル方程式を三次元攪乱に拡張し、ベナール対流の平面形を調べる。二次元波数領域 $-\alpha_{max} \leq \alpha_x, \alpha_y \leq \alpha_{max}$ の範囲にあるモードを考える。 α_x および α_y をそれぞれを N 等分して、 $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y) = (\Delta\alpha \times n_x, \Delta\alpha \times n_y)$ (ただし、 $-N \leq n_x, n_y \leq N$) を持つ $(2N+1)^2$ 個のモードのみを取り扱うことにする。ここで $\Delta\alpha = \alpha_{max}/N$ である。方程式 (12) を三次元攪乱に拡張して、波数 $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y) = (\Delta\alpha \times n_x, \Delta\alpha \times n_y)$ を持つモードの振幅 A_n を支配する方程式を次のように仮定する。

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_p f_{np} A_{n-p} A_p + \sum_{p,q} g_{npq} A_{n-p-q} A_p A_q, \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{n} = {}^t(n_x, n_y)$, $(-N \leq n_x, n_y \leq N)$ である。 a_n は線形増幅率であり、 $|\alpha| = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}$ のみの関数である。 f_{np} は非線形共鳴項の係数、 g_{npq} は広い意味でのランダウ係数である。

まず、モデル方程式 (20) において非線形共鳴項の係数がゼロ、すなわち $f_{np} \equiv 0$ の場合を調べる。さらに簡単化のために、 $\mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ に対して $g_{npq} = d_{np}$, $\mathbf{p} + \mathbf{q} \neq 0$ に対して $g_{npq} \equiv 0$ であり、しかも d_{np} は $|\mathbf{n}|$ および $|\mathbf{p}|$ にのみ依存する特別な場合を考える。このとき方程式 (20) は、

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_p d_{np} A_p^2 A_n, \quad (21)$$

となる。 A_n の初期条件が $|\mathbf{n}|$ のみに依存しているときには方程式 (21) の解は $|\mathbf{n}| \equiv n$ と時間 t のみの関数となる。その定常解もまた単一モード解と混合モード解が可能である。単

一モード解は $A_{neq} = \sqrt{-a_n/(2\pi n d_{nn})}$ となる。この単一モード解に対する安定性は二次元ロール状攪乱における方程式 (18) の場合と同様であり、自分自身のゆらぎに対しては常に安定であるが $q \neq n$ であるモード $q(|\mathbf{q}|)$ のゆらぎに対しては $a_q < a_n \times d_{qn}/d_{nn}$ のとき安定であり、 $a_q > a_n \times d_{qn}/d_{nn}$ のとき不安定である。このことから、もし d_{qn} が q に依存せずに一定であるならば線形増幅率が最大のモードだけが安定に残り、それ以外のモードは不安定になり、そのエネルギーは線形増幅率最大のモードに吸収されてしまうことが想像できる。このことから安定モードは線形増幅率最大のモードであり波数空間において半径 $|\alpha|$ の円周上に存在することがわかる。 $p d_{dp}$ が作る行列式が正則であれば混合モード解も存在し得るが、ここでは議論を行わない。

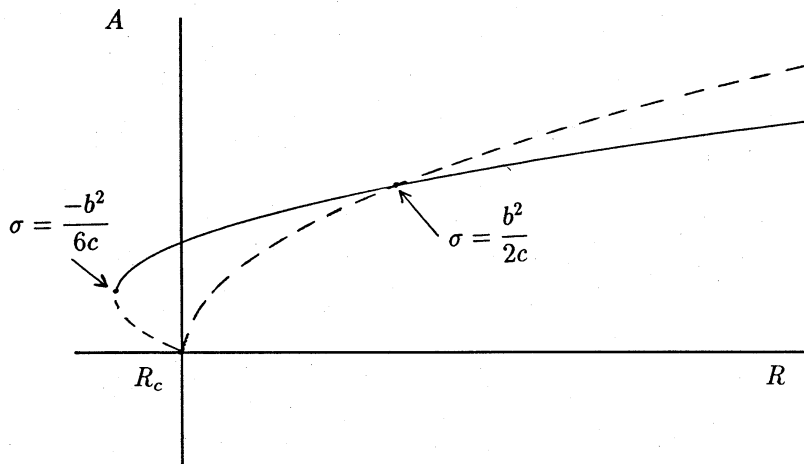


図 10. 二次元ロール解と六角形セル状解の平衡振幅。実線は安定な平衡振幅。波線は不安定な平衡振幅。

方程式 (21) を初期値問題として数値的に解く。ここで $\alpha_{max} = 10.0$, $\Delta\alpha = 0.5$, $N = 20$ とした。線形増幅率は図 3 に示したものを、ランダウ係数に相当する係数 d_{np} は最も簡単な場合として $d_{np} \equiv -1.0$ を用いることにする。初期条件は $A_n = 0.01$ ($-N \leq n_x, n_y \leq N$) とした。 $R = 10000$ の場合の $t = 10$ での波数空間における振幅の分布図を図 9(a) に示す。また、そのときの (x, y) -平面での振幅の分布を図 9(b) に示す。今回の計算は予備的な計算であり、 $t = 10$ ではまだ十分に平衡状態には達していないが、非線形効果によって各モードはより増幅率の大きいモードによりその成長が抑えられ、最大増幅率を持つモードのみが生き残りそのモードは最大線形増幅波数を半径とする円周上に存在しているのがわかる。この結果は上の単一モードの安定性の解析結果とよく一致している。

次に、各モードが非線形共鳴を行う場合を取り扱う。さきに述べたように非線形共鳴項がないときには最大増幅率を持つモードのみが生き残り、他のモードはすべて減衰してしまう。すなわち、波数空間では原点を中心として最大増幅波数の円周上に有限振幅のモードが並んでいる。二次の非線形共鳴は三つのモードの波数が $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{n}$ の関係を満たしているときにのみ可能である。波数空間で原点を中心とした円周上にあるモードがこの条件を満たすためには三つのモードの波数ベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ と $\mathbf{n}$ は正三角形をなしていなければならない。すなわち、三つのベクトルの方向が互いに 60° 異なっている必要がある。したがって、非線形共鳴を行うモードは $|\alpha|$ の大きさが同じで方向が互いに 60° 異なる三つのモードである。これらの三つのモードの振幅をそれぞれ A_1, A_2, A_3 とすると方程式 (20) は次のようになる。

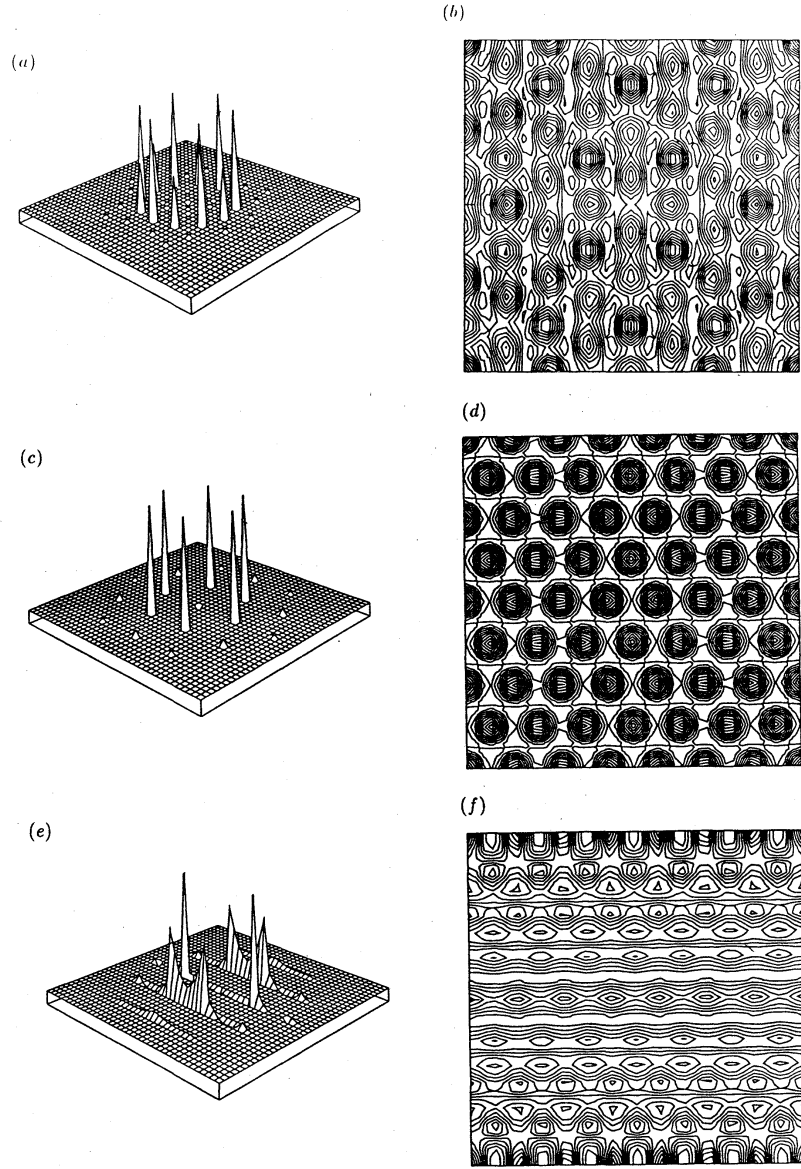


図 11. 非線形共鳴があるときの振幅の分布. $R = 10000$. $t = 10$
 (a), (c), (e): 波数空間での振幅の分布. (b), (d), (f): (x, y) -
 波数空間での振幅の分布. (a), (b): $\beta = 0.1$. (c), (d):
 $\beta = 0.3$. (e), (f): $\beta = 0.5$.

$$\frac{dA_1}{dt} = \sigma A_1 + 2bA_2A_3 - 2cA_1(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2),$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \sigma A_2 + 2bA_1A_3 - 2cA_2(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2), \quad (22)$$

$$\frac{dA_3}{dt} = \sigma A_3 + 2bA_1A_2 - 2cA_3(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2).$$

ここで、 σ は最大増幅モードの線形増幅率である。また、簡単化のために $f_{np} \equiv b$ とおいた。さらに $\mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ に対して $g_{npq} = c$, $\mathbf{p} + \mathbf{q} \neq 0$ に対して $g_{npq} \equiv 0$ とおいた。単一モード解すなわち二次元ロール解は $A_1 \neq 0$, $A_2 = A_3 = 0$ とおくことにより得られる。その定常

解は、

$$A_{1eq} = \sqrt{\frac{\sigma}{2c}}$$

となる。この単一モード解は自分自身のゆらぎに対しては安定であるがその他の二つのモードのゆらぎに対しては不安定である。すなわち、二次元ロール解は全てのレイリー数において不安定である。六角形セルパターンは混合モード解の一つであり、 $A_1 = A_2 = A_3 \neq 0$ とおくことにより得られる。その定常解は、

$$A_{neq} = 0, \quad \frac{b - \sqrt{b^2 + 6c\sigma}}{6c}, \quad \frac{b + \sqrt{b^2 + 6c\sigma}}{6c}$$

の三つである。このうちはじめの二つは不安定であるが、定常解 $A_{neq} = (b + \sqrt{b^2 + 6c\sigma})/6c$ は $-b^2/6c < \sigma$ であるすべての σ に対して安定である。すなわち全てのレイリー数で安定である。これらの結果まとめると図 10 のようになる。この図において波線は不安定な平衡振幅を表し、実線は安定な平衡振幅を表す。六角セル状の攪乱は亜臨界不安定であり、その平衡解の下分岐が不安定、上分岐が安定である。ロール攪乱は超臨界不安定であるがその平衡解も不安定である。

方程式 (20) を初期値問題として数値的に解く。ここでも $\alpha_{max} = 10.0$, $\Delta\alpha = 0.5$, $N = 20$ とした。また、簡単化のために二次の共鳴項の係数 f_{np} は $|\mathbf{n}| \geq |\mathbf{p}|$ かつ $|\mathbf{n}| \geq |\mathbf{n} - \mathbf{p}|$ ならば $f_{np} = \beta$, $|\mathbf{n}| < |\mathbf{p}|$ または $|\mathbf{n}| < |\mathbf{n} - \mathbf{p}|$ ならば $f_{np} = -\beta$ とおいた。三次の非線形項の係数は共鳴を行わない場合と同様に $\mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ に対して $g_{npq} = d_{np}$, $\mathbf{p} + \mathbf{q} \neq 0$ に対して $g_{npq} \equiv 0$ であり、さらに、最も簡単な場合として $d_{np} \equiv -1.0$ を用いた。初期条件は $A_n = 0.01$ ($-N \leq n_x, n_y \leq N$) とした。 $R = 10000$, $\beta = 0.1, 0.3, 0.5$ の場合の $t = 10$ での波数空間における振幅の分布図を図 11(a), (c), (e) に示す。また、そのときの (x, y) -平面での振幅の分布を図 11(b), (d), (f) に示す。 $\beta = 0.1$ では、セルは縦方向につながって見える。 $\beta = 0.3$ の場合、振幅はすでに平衡状態に達しており、方向が互いに 60° 異なる三つのモードのみがほぼ同じ大きさで生き残りその他のモードは減衰していることがわかる。また (x, y) 平面の振幅分布では六角形のきれいなセルパターンが見られる。 $\beta = 0.5$ では、セルは横方向につながって見える。これらの結果は上で述べた混合モード解の安定性の結果ともよく一致している。 β の値が 0.6 より大きくなると各モードは不規則に増幅、減衰を繰り返して平衡状態になることはない。

5. 結論といくつかの問題点

この論文では Mizushima (1993) の提案したモデル方程式を二次元波数を持つモードの振幅方程式に拡張し、その三次元攪乱に対するモデル方程式を詳しく調べ、実際に数値シミュレーションを行うことにより三次元ベナール対流における平面形の選択を調べた。Palm (1960) や Segel (1962, 1965a, 1965b) たちの求めた振幅方程式の解の性質とここで求めたモデル方程式の性質には相違点がある。Palm や Segel たちの振幅方程式の場合、図 2 に示したようにレイリー数が R_1 あるいは R_2 以下では六角形セルパターンが安定でありそれ以上ではロール解が安定となる。しかし、ここで得られた結果は図 10 に示したように臨界レイリー数 R_c よりも小さいレイリー数で六角形セルパターンが現れ、この解はレイリー数を大きくしても常に安定でありロール解は常に不安定である。Palm や Segel たちと同様の結果はランダウ係数に相当する三次の非線形項の係数 d_{np} を定数とせず、 $\mathbf{p}$ に依存するとおくことにより得られる。その詳細については他の機会に述べる。

本来、振幅方程式の係数は流体の運動を支配する基礎方程式から評価されるものである。ここでは係数の値を適当に定めれば、六角形のセルパターンが生じることを示し、そのパターンの形成機構を説明した。さらにこの研究を進めるためには流体の運動方程式からこれらの係数を‘正しく’定める方法を見いだす必要がある。

References

- Bénard, H. 1900 Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Revue Gén. Sci. Pur. Appl.* **11**, 1261-1271, 1309-1328.
- Busse, F.H. 1962 Das Stabilitätsverhalten der Zellarkonvektion bei endlicher Amplitude. Inaugural Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität, Munich.
- Busse, F.H. 1987 Transition to asymmetric convection rolls, in *Bifurcation : Analysis, Algorithms, Applications* (ed. T. Küpper, R. Seydel and H. Troger), pp.18-26. Birkhäuser.
- Dangelmayr, G. 1986 Steady-state mode interactions in the presence of $O(2)$ -symmetry, *Dyn. Stab. Syst.* **1**, 159-185.
- Dangelmayr, G. & Armbruster, D. 1986 Steady-state mode interactions in the presence of $O(2)$ -symmetry and in non-flux boundary value problems, *Contemp. Maths* **56**, 53-67.
- Gor'kov, L.P. 1957 Stationary convection in a plane liquid layer near the critical heat transfer point, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 402-407.
- Lortz, D. 1961 Instabilitäten der stationären Konvektionsströmungen endlicher Amplitude, Inaugural Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität, Munich.
- Malkus, W.V.R. & Veronis, G. 1958 Finite amplitude cellular convection, *J. Fluid Mech.* **4**, 225-260.
- Mizushima, J. 1993 Mechanism of mode selection in Rayleigh-Bénard convection with free-rigid boundaries, *Fluid Dynamics Research*, in print.
- Palm, E. 1960 On the tendency towards hexagonal cells in steady convection, *J. Fluid Mech.* **8**, 183-192.
- Pearson, J.R.A. 1958 On convection cells induced by surface tension, *J. Fluid Mech.* **4**, 489-500.
- Rayleigh, Lord 1916 On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, *Phil. Mag.* **32**, 529-546.
- Segel, L.A. 1962 The non-linear interaction of two disturbances in thermal convection problem, *J. Fluid Mech.* **14**, 97-114.
- Segel, L.A. 1965a The structure of non-linear cellular solutions to the Boussinesq equations, *J. Fluid Mech.* **21**, 345-358.
- Segel, L.A. 1965b The non-linear interaction of a finite number of disturbances to a layer of fluid heated from below, *J. Fluid Mech.* **21**, 359-384.
- Segel, L.A. & Stuart, J.T. 1962 On the question of the preferred mode in cellular thermal convection, *J. Fluid Mech.* **13**, 289-306.
- Stuart, J.T. 1958 On the non-linear mechanics of hydrodynamical stability, *J. Fluid Mech.* **4**, 1-21.

- Stuart, J.T. 1960 On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* **9**, 353-370.
- Watson, 1960 On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 2. The development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow, *J. Fluid Mech.* **9**, 371-389.
- Zakharov, 1968 Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech Tech. Phys.* **2**, 190-194.