

C^* 環と K 理論

横浜市大 中神 祥臣 (Yoshiomi Nakagami)

1. まえがき 環または C^* 環のカテゴリーから可換群のカテゴリーへの K ファクター を定義して, 環または C^* 環のもつ特徴を K 群の性質を用いて調べるのが K 理論の目的である. とくに対象が環, C^* 環または可換 C^* 環のどれであるかにより, それぞれ代数的 K 理論, C^* 環の K 理論または位相的 K 理論という. これらの間には

$$\begin{array}{ccccc} \text{代数的 K 理論} & \supset & C^*\text{環の K 理論} & \supset & \text{位相的 K 理論} \\ \text{(代数幾何)} & & \text{(作用素環)} & & \text{(代数的位相幾何)} \\ \text{Grothendieck} & & ? & & \text{Atiyah-Hirzebruch} \end{array}$$

の関係があるが, C^* 環の K 理論は広い意味での位相的 K 理論と解釈するのが自然である (バナッハ環の K 理論もある).

代数的 K 理論や位相的 K 理論は Riemann-Roch 型の定理を定式化する中で生み出され, 既に二十数年の歴史をもつ. C^* 環の K 理論に関しては, 古くは Atiyah, Breuer, Coburn, Douglas, Singer 等の仕事や, 漸く後の Kasparov による K ホモロジーの定義 (1973), BDF 理論 (1973~7), Elliott の次元

群の定義 (1976) などあったが、本格的に始まったのは Connes [4], Cuntz [5], Kasparov [6], Pimsner-Voiculescu [7] 等、仕事が出始めた頃からであり、ここ 2, 3 年の活況が目覚ましい。ここでは便宜上、これまで得られた成果を三つに大別してみる。

1.1 まず、 K 群を C^* 環の代数的不変量として求めたものの代表例を表にする。

C^* 環	K^0 群	K^1 群	K_0 ホモロジー	K_1 ホモロジー
AF 環	次元群	0		
Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ ($n \geq 2$)	$\mathbb{Z}/(n-1)$	0	$\mathbb{Z}/(n-1)$	0
$\mathcal{O}_\infty$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$
Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_A$	$\mathbb{Z}^n/(1-A)\mathbb{Z}^n$	$\text{Ker}(1-A)$	$\mathbb{Z}^n/(1-A)\mathbb{Z}^n$	$\text{Ker}(1-A)$
無理数回転環 A_θ	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$		
被約群 C^* 環, $G = F_n$ ($n \geq 2$)	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^n$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^n$
$G = \mathbb{Z}/n * \mathbb{Z}/m$	$\mathbb{Z}^{n+m-1}$	0	$\mathbb{Z}^{n+m-1}$	0
葉層 C^* 環, $(V, F) = (\mathbb{T}^2, \text{Fol I})^{\text{rel}}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$		
$(V, F) = (\mathbb{T}^2, \text{Fol II})^{\text{rel}}$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$		
群 C^* 環, G : 単連結, 可解 n -群	$\begin{cases} \mathbb{Z} & (\dim G = \text{偶}) \\ 0 & (= \text{奇}) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & (\dim G = \text{偶}) \\ \mathbb{Z} & (= \text{奇}) \end{cases}$		
G : Heisenberg 群 ($\dim G = \text{奇}$)	0	0		$\mathbb{Z}^2$
G : 運動群	自由可換群	0		
$G = SL(2, \mathbb{C})$	0	無限階自由群		

1.2 つぎに, 各種の未解決な問題を K 群を用いて解決した例をあげる.

1.2.1 (Kaplansky の問題) 単純 C^* 環で自明でない射影元をもたないものがあるか? Blackadar は K 理論と無関係に単位的 C^* 環の例を作り肯定的に解決. その後 K 理論を用いて Connes, Cuntz, Pimsner-Voiculescu 等が各種の例を作った. 葉原 C^* 環の場合には, この問題と葉原多様体の葉に横断的閉部分多様体 ^{すかどう問題} が存在 $\wedge$ がほぼ同内容になる. ^{注2}

1.2.2 (Kadison の予想) 単純 C^* 環 $C^*_{red}(F_n)$ は自明でない射影元をもたない. Cuntz, Pimsner-Voiculescu が K 理論を用いて肯定的に解決.

1.2.3 AF 環の AF 環による拡大は AF 環か? Brown は K ホモロジーを用いて肯定的に解決.

1.2.4 Weighted shift の分類に成功.

以上は C^* 環固有の問題であったが, 他分野とも関連したものととしては

1.2.5 (Kirillov, Fell 等の問題) 3次元 Heisenberg 群 G に対し, 完全系列 $0 \rightarrow C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes K \rightarrow C^*(G) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow 0$ は分裂するか? Kasparov により肯定的に解決.

1.2.6 (Novikov の予想) C^∞ 多様体 X の higher signature はホモトピー不変である. Mishchenko と Kasparov はそれぞれ独立に

に, 分類空間 BG の K フังก์ターを用いて, 予想が肯定的である多様体の例を作っている. Kasparov は $\pi_1(X)$ が連結リー群の離散部分群に含まれていれば肯定的なことを示した.

1.3 最後に, Atiyah-Singer 型の定理に使われている例をあげる. 指数定理には各種のものがあるが, 一般に指数は整数値とは限らず, 適当な C^* 環の K 群に値をとることが多い.

1.3.1 (Connes) 葉層多様体 (V, F) の葉の空間 V/F を調べるために普通は, 横断測度を用いて指数定理を定式化するが, 横断測度が存在しないときや, 存在しても指数が零に成ってしまう場合には, K 群を用いた定式化が考えられる. 例えば C^∞ 多様体に単連結可解リー群が自由に作用しているときなどはうまく行き, 一般の葉層構造に対しても成立が予想されている. これにより 1.2.1 を解決.

1.3.2 (Connes-Moscovici) 等質空間 G/H 上の G 不変微分作用素 P により与えられる方程式 $Pu=0$ の L^2 解は既約離散系列の有限和であることを示している.

1.3.3 (Baum-Douglas) K ホモロジーを用いて各種指数定理の統一化の試み.

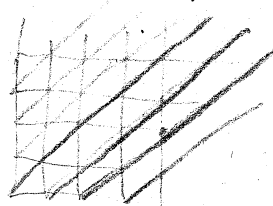
1.3.4 (Mischenko-Fomenko) ある多様体に対する Novikov の予想の解決. 1.2.6 参照.

1.3.5 (Connes) 非可換微分幾何への応用. これを用いて

例 - Chern 類の値の整数値であることや、微分差分方程式の自明でない解を持つことなどが議論できる。

以上でわかるように C^* 環で K 理論を研究する動機にはいろいろな事事が考えられるが、今後も、 C^* 環の位相的性質の研究、各種指数定理を用いた研究、表現論への応用、非可換微分幾何や微分差分方程式の研究などが期待される。なお、非可換微分幾何の重要性は境界氏によっても提唱されている。(コンパクト) 多様体 V の接ベクトル場 $X \in TV$ は可換 C^* 環 $C(V)$ 上の非有界微分子である。 A_θ 上の微分子の形をきめた高井氏の仕事は Connes の例と一致していることは興味深い。

(a, b)



$(a, b) \mapsto a - b$

2. K 群の定義

2.1 可換半群 H から可換群 G を $(H \times H)/D$ ($D = \{(h, h) : h \in H\}$) により作る。 $j(h) = \{(h+h', h') : h' \in H\}$ とすれば、 j は H から G への準同型写像である。 H から可換群への準同型写像のうちで、ここで作った (G, j) は普遍性をもたすので、 G を H の Grothendieck 群 という。定義より直ちに

$$j(h) = j(h') \iff \exists h'' \in H : h + h'' = h' + h''$$

可換半群 H_1, H_2 の Grothendieck 群をそれぞれ G_1, G_2 とする： $H_i \xrightarrow{j_i} G_i$ ($i=1, 2$)。準同型写像 $\varphi: H_1 \rightarrow H_2$ があると、 $H_1 \xrightarrow{j_1} G_1$ と $H_2 \xrightarrow{j_2} G_2$ の間に $\varphi \downarrow \quad \downarrow \hat{\varphi}$ という可換図式が導かれる。与えられると、 (G_1, j_1) の普遍性を用いて G_1 から G_2 への準同型写像 $\hat{\varphi}$ が導かれる： $\hat{\varphi} \circ j_1 = j_2 \circ \varphi$ 。このとき φ が全射なら、 $\hat{\varphi}$ も全

射である. たとえば, $H = \mathbb{N}^n$ ならば, $G = \mathbb{Z}^n$ である.

2.2 単位的 C^* 環 A と無限次元可分ヒルベルト空間上のコンパクト作用素の全体 K とのテンソル積 $A \otimes K$ の射影元全体 $\text{Proj}(A \otimes K)$ を Murray-von Neumann の同値関係で割, $T = \text{Proj}(A \otimes K) / \sim$ (つまり, $\text{Proj}(A \otimes K)$ の連結成分の全体) は加法

$$[e_1] + [e_2] = [e'_1 + e'_2] \quad \text{if } e_1 \sim e'_1, e_2 \sim e'_2, e'_1 e'_2 = 0$$

により可換半群になる. この半群の Grothendieck 群を A の K 群 または K^0 群 といい, $K(A)$ または $K^0(A)$ と書く.^{注3}

$$j([e_1]) = j([e_2]) \iff \exists [e] : [e_1 + e] = [e_2 + e]$$

二つの単位的 C^* 環 A, B の間の準同型写像 $\varphi: A \rightarrow B$ は自然に K 群の間の準同型写像 $\varphi_*: K(A) \rightarrow K(B)$ を導く. つまり, K は共変ファンクターである.

一般に, C^* 環 A に単位元 1 を加えて得られる単位的 C^* 環を $A^\sim$ とすれば, $0 \rightarrow A \rightarrow A^\sim \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \rightarrow 0$ は C^* 環の完全系列で, φ は分裂している. したがって

$$K(A^\sim) = \text{Ker}(\varphi_*) \oplus K(\mathbb{C})$$

となる. ここで A の K 群 (または K^0 群) を改めて $\text{Ker} \varphi_*$ により定義する.

A が単位的であれば, 前のものと一致する. 今後 $j([e]) \in [e]$ と記す.

例. $K(\mathbb{C}) = K(K) \cong \mathbb{Z}, \quad K(\mathcal{L}(\ell_2)) = 0.$

2.2.1 $n \times n$ 行列全体 $M_n = M_n(\mathbb{C})$ の増加分の間に $x \in M_n \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}$ のような埋蔵を考えると, $K = \varinjlim M_n$ である. 単位的 C^* 環に対し次のような半群同型対応がある:

$$\text{Proj}(K \otimes A) / \sim \longleftrightarrow \varinjlim \text{Proj}(M_n \otimes A) / \sim \longleftrightarrow (\text{有限生成射影的 } A \text{ 加群全体}) / \cong$$

$$M_n(A) \curvearrowright A^{\oplus n} \curvearrowright A$$

7

ここで、バナハ空間 $\underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_n$ は $n \times n$ 行列 $M_n(A)$ が作用する自由 A 加群である。

したがって、 $M_n(A)$ の射影元 e に対し、射影的 A 加群 $e(A \oplus \cdots \oplus A)$ が対応している。

2.2.2 X がコンパクトで、 $A = C(X)$ の場合には、位相的 K 理論の K 群 $K(X)$ と C^* 環の K 群 $K(C(X))$ は一致する。さらに、代数的 K 理論の K 群とも一致

$$(\text{有限生成射影的 } C(X) \text{ 加群全体}) / \cong \longleftrightarrow \text{Vect}(X) / \sim$$

$$\longleftrightarrow X \text{ 上の連続ヒルベルト場 \& 同値類の全体}$$

X が局所コンパクトなときは、 $C(X \cup \{\infty\}) \cong C_0(X) \sim$ であるから、 $K(X) = K(C_0(X))$ 。

2.3 $(A \sim \otimes K) \sim$ のユニタリ元全体 $U((A \sim \otimes K) \sim)$ は乗法群になる。これを、その単位元の連結成分 $U_0((A \sim \otimes K) \sim)$ で割って得られる群（すなわち、 $U((A \sim \otimes K) \sim)$ の連結成分の全体）を A の K' 群 とし、 $K'(A)$ と表す。 A が単位的なときは $A \sim$ のかわりに A を用いて定義してもよい。一般には、 $K'(A) = K'(A \sim)$ 。注3

$$\text{例 } K'(\mathbb{C}) = K'(K) = 0, \quad K'(L(f)) = 0 \quad (\text{Kuiper})$$

2.3.1 $n \times n$ ユニタリ行列 $U(n)$ の列の中に $u \in U(n) \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in U(n+1)$ のような埋蔵を行うと、 $U(\text{代数的 } \varinjlim M_n) = \varinjlim U(n)$ となる。したがって、単位的 C^* 環 A に対しては、次の同型対応がある：

$$\begin{aligned} K'(A) = U((A \sim \otimes K) \sim) / U_0((A \sim \otimes K) \sim) &\longleftrightarrow \varinjlim U(n, A) / U_0(n, A) \longleftrightarrow \varinjlim GL(n, A) / GL_0(n, A) \\ &\longleftrightarrow \varinjlim \pi_0(GL(n, A)) \end{aligned}$$

$$\text{例 } K'(C(X)) = H^1(X, \mathbb{Z}) = [X, \mathbb{C}^*] \quad (\text{1次元トポロジ群})$$

2.3.2 二つの単位的 C^* 環の間の準同型写像 $\varphi: A \rightarrow B$ は自然な準同型写像 $\varphi_*: K'(A) \rightarrow K'(B)$ を導く。

2.4 C^* 環 A に実構造、つまり、 A 上の写像 $a \mapsto a^*$ で

$$(i) (ma + b)^- = \bar{m} a^- + b^- \quad (m \in \mathbb{C})$$

$$(ii) (a^-)^- = a$$

$$(iii) (ab)^- = a^- b^-$$

$$(iv) (a^*)^- = (a^-)^*$$

をみたすものを与え、これにより不変なものへの議論を制限すれば、実ベクトル束に対応するK理論も得られる。

2.5 コンパクト群 G と C^* 系 (A, G, α) に対して、 G の $A \otimes K(L^2(G)) \otimes K$ への作用 $\tilde{\alpha}$ を $\tilde{\alpha}_t = \alpha_t \otimes \rho_t \otimes \text{id}$ とする。ただし、 ρ は G の右正則表現が与えられる K 上の作用である。このとき、 $\text{Proj}((A \otimes K(L^2(G)) \otimes K)^{\tilde{\alpha}})/\sim$ の Grothendieck 群を Equivariant K群 といい、 $K_G(A)$ と書く。 $A = C(X)$ のときは、 $K_G(A) = K_G(X)$ である。 $K_G(A) \cong K(A \rtimes_r G)$ が成り立っている。

3. K群の基本的性質 K群を具体的に求めるときに使う性質のうちで代表的なものを幾つかあげておく。なかでも、ホモトピー不変性、六項完全系列、Bottの周期性が成り立つことは、K理論が一般コホモロジー理論であることを示している。連続性はホモトピー不変性と関連した性質であるし、Mayer-Vietorisの完全系列は六項完全系列とほぼ同値な内容である。最も大切なのがThom同型である。これはBottの周期性を一般化したものであって、 $\mathbb{Z}$ の接合積に関する六項完全系列と同値である。3.1~3.8のうちで接合積と関係した3.6, 3.7以外はBanach環でも証明されている。

3.1 連続性 $K(\varinjlim A_n) = \varinjlim K(A_n)$

3.2 ホモトピー不変性 C^* 環 A, B に対し、 $\varphi = \{\varphi_t : t \in [0, 1]\}$ を $[0, 1]$ から $\text{Hom}(A, B)$ への連続写像とすれば、K群の準同型写像として、 $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_*$ 。

3.3 半完全系列 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow J \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow 0$ に対し系列 $K^0(J) \xrightarrow{\iota_*} K^0(E) \xrightarrow{\varphi_*} K^0(A)$, $K^1(J) \xrightarrow{\iota_*} K^1(E) \xrightarrow{\varphi_*} K^1(A)$ はともに完全である。

証明 3.5の終りで必要となる K 群の完全性のみを示す. K^0 群に対しては Bott の周期性が示された時点で、自働的にわかる. E は単位元をもつものと仮定する. $v \in J^\sim$ は $w + \lambda 1$ ($w \in J$) と表せるので, $\varphi_*(\iota_*[v]) = [\lambda] = 0$. 逆に, $[u] \in \text{Ker } \varphi_*$ とする. $\varphi_*([u]) = 0$ であるから, $\varphi(u) \in U_0((K \otimes A)^\sim)$. したがって, $\varphi(u') = \varphi(u)$ をみたす $u' \in U_0((K \otimes E)^\sim)$ がある. $[u] = [u' * u]$ である. また, $\varphi(u' * u) = 1$ であるから, $v' \equiv u' * u \in J^\sim$. したがって, $\iota_*([v]) = [u' * u] = [u]$.

3.4 Index 写像 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow K \rightarrow \mathcal{L}(f) \xrightarrow{\varphi} Q(f) \rightarrow 0$ に対し, $\varphi^*(GL(Q(f)))$ は f 上の フリートホルム作用素の全体と一致する. どのような元 x に対し, $\text{ind}(x) = \dim(\text{Ker } x) - \dim(\text{Coker } x) \in \mathbb{Z}$ が指数 (index) である. これを抽象化して $K^1(Q(f))$ から $K^0(K) \cong \mathbb{Z}$ への写像 δ を作りた. もっと一般に次の補題が成り立つ. δ のことを Index 写像 または Connecting 写像 という.

補題 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow J \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow 0$ に対し, $K^1(A)$ から $K^0(J)$ への準同型写像 δ が存在して, $K^1(E) \xrightarrow{\varphi_*} K^1(A) \xrightarrow{\delta} K^0(J) \xrightarrow{\iota_*} K^0(E)$ が完全系列になる.

証明の概略. E が単位元をもつ場合の δ の構成: $0 \rightarrow J \otimes M_n \xrightarrow{\iota \otimes \text{id}} E \otimes M_n \xrightarrow{\varphi \otimes \text{id}} A \otimes M_n \rightarrow 0$ は完全である. 同様の完全系列が M_n のかわりに K に対しても成り立つ. $[u] \in K^1(A)$ に対し, $u \in U(A \otimes M_n)$ と仮定できる. $(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) \in U_0(A \otimes M_{n+m})$ となるような u' を選ぶ (たとえば, $u' = u*$ とすればよい). この場合には, $(\varphi \otimes \text{id})(v) = (\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$ となる $v \in U_0(E \otimes M_{n+m})$ がある. $v(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})v^*$ は $\varphi \otimes \text{id}$ の核に入るから, $J \otimes M_n \subset J \otimes K$ の元である. $(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$ は $J^\sim \otimes K$ の元であるから, $v(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})v^* \in J^\sim \otimes K$. したがって, $[v(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})v^*] - [(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})] \in K^0(J^\sim)$.

実は, これは $K^0(J)$ の元である. 実際, 完全系列 $0 \rightarrow J \otimes K \rightarrow J \otimes K \xrightarrow{\varphi \otimes \text{id}} C \otimes K \rightarrow 0$ を考えれば, $\psi_*([v(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})v^*] - [\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}]) = 0$. 逆に, $K'(A)$ から $K^0(J)$ への Index 写像を $\delta([uJ]) = [v(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})v^*] - [\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}]$ で定義する. これが well defined であることを検証する際に, 上で u' とした u^* にしなからたことが生じてくる. δ が準同型写像であることは $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて示される.

$K'(A)$ における完全性: $[w] \in K'(E)$ に対しては, 上の $v \in \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^* \end{pmatrix}$ とすれば, $\delta \circ \varphi_*([wJ]) = [v(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})v^*] - [\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}]) = 0$. 逆に, $\delta([uJ]) = [v(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})v^*] - [\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}])$ が 0 ならば, $J \otimes K$ において $v(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})v^* \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. したがって, $w \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0_{n+k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^* & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix} w^* = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0_{n+k} \end{pmatrix}$ となる $w \in U(J \otimes M_{n+m+k})$ がある. ゆえに, $w \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix}$ は $v_1 \in E \otimes M_n$ により $\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}$ と表せる. したがって, $(\varphi \otimes \text{id})(v_1) = u$, かつ $\varphi_*([uJ]) = [uJ]$.

$K^0(J)$ における完全性: $L_*([v(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})v^*]) = L_*([\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}])$ であるから, $L_* \circ \delta = 0$. 逆に, $L_*([eJ] - [1_nJ]) = 0$ ならば, $\begin{pmatrix} L(e) & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix}$. したがって, $v \begin{pmatrix} L(e) & 0 \\ 0 & 1_{m+k} \end{pmatrix} v^* = 1_{n+m+k}$ となる $v \in U(E \otimes M_{n+m+k})$ がある. $u = (\varphi \otimes \text{id})(v)$ とすれば, $\delta([uJ]) = L_*([eJ] - [1_nJ])$.

E が単位元をもたないとき: C^* 環の系列 $0 \rightarrow J \xrightarrow{\iota} E \rightarrow A \rightarrow 0$ が完全になるような系列 $K'(E) \rightarrow K'(A) \xrightarrow{\delta} K^0(J) \rightarrow K^0(E)$ は完全である. $K^0(E) = K^0(E) \oplus \mathbb{Z}$ であるが, $\iota: J \rightarrow E$ は単射であるから, L_* の像は $K^0(E)$ に値をとる.

例 $J = K$, $E = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $A = \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ のときは, $K^0(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = K'(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = 0$ であるから, $K'(\mathcal{Q}(\mathcal{H})) \cong K^0(K) \cong \mathbb{Z}$.

3.4.1 $K'(A) \cong K^0(A \otimes C_0(\mathbb{R}))$.

単位区間 $I = [0, 1]$ 上の $C(I) = \{f \in C(I) : f(0) = f(1) = 0\}$ とすれば, $A \otimes C_0(\mathbb{R}) \cong$

$A \otimes C_0(I)$. これを A の懸垂 (Suspension) といい SA と書き, $A \otimes \{f \in C(I) : f(0) = 0\}$ を A の錐 (Cone) といい CA と書けば, C 環の完全系列 $0 \rightarrow SA \rightarrow CA \rightarrow A \rightarrow 0$ を得る. いま, $a \in CA$ の CA/SA における剰余類と A における $a(1)$ とを同一視している. 一般に, CA の元 a はホモトピー $\{\varphi_t : t \in [0, 1]\} : (\varphi_t a)(s) = Q(ts) \ (s \in I)$ により可縮 (Contractible) であるから, $K(CA) = 0, K'(CA) = 0$ である. いま 3.4 の補題を上記の完全系列に適用すれば, 3.4.1 が得られる.

3.5 Bott の周期性 $S^2 A = S(SA)$ とすれば, $K^i(S^2 A) = K^i(A) \ (i=1, 2)$.

これを示すには 3.4.1 とよく似た次の式を示せばよい.

3.5.1 $K^0(A) \cong K^1(A \otimes C_0(\mathbb{R}))$

3.4.1 の証明に倣へ, この証明には技巧が要求される. いまは Atiyah [3] の方法を用いる. まず, $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ の上の $C_0(\Pi) = \{f \in C(\Pi) : f(1) = 0\}$ と $C_0(\mathbb{R})$ とを同一視して, $K^0(A) \cong K^1(A \otimes C_0(\Pi))$ を示すことにする.

証明の概略. A が単位元をもたずるとき: (i) $Q_n(A) = \{a \in M_n(A) : a = a^*, \text{Sp}(a) \in \mathbb{Z}\}$ と定義 $a \in Q_n(A) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q_{n+1}(A)$ を考える. $a \in \bigcup Q_n(A)$ のスノグナル分解 $a = \sum_{|j| \leq \|a\|} j e_j$ に対し, $[a] = \sum_{|j| \leq \|a\|} j [e_j]$ とすれば, $K^0(A) \cong \varinjlim Q_n(A)/\sim$.

(ii) $K^1(SA) = K^1((SA)^\sim)$ について考える. $(SA)^\sim$ は $\{f \in A \otimes C(\Pi) : f(1) \in \mathbb{C}\}$ と同一視できる. したがって, $(SA)^\sim$ の元は Stone-Weierstrass 定理により, Laurent 多項式 $z \in \Pi \mapsto \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j a_j \in A$ により一様近似される. 同様のことが $(SA)^\sim$ の n 次元 $M_n((SA)^\sim)$ に対してもいえる. したがって, $K^1(SA) = \varinjlim U(M_n((SA)^\sim)) / U_0(M_n((SA)^\sim))$.

(iii) (Exponential 写像) (i) のスノグナル分解 $a = \sum j e_j \in M_n(A)$ に対し, $e^{2\pi i t a} = (1 - e_0) + \sum_{|j| \leq \|a\|} e^{2\pi i t j} e_j \ (t \in [0, 1])$ を作る. $\Pi \cong [0, 1]$ とすれば, これは (ii) の元 $\delta(a)$

$$\begin{aligned} \exp(\varepsilon e_j) &= 1 + \varepsilon e_j + \frac{\varepsilon^2}{2} e_j^2 + \dots \\ &= (e^{\varepsilon - 1}) e_j + 1 = e^{\varepsilon} e_j + (1 - e_j) \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{T} \mapsto (1 - e_0) + \sum z^j e_j \in M_n(A)$ と見なすことができた。 $\delta(a) \in M_n((SA)^\sim)$ である。

(iv) 対応 $[a] \in K^0(A) \mapsto [\delta(a)] \in K^1(SA)$ が well defined であること、同型写像であることを示す。後者を示すには、Laurant 多項式を二つの Taylor 多項式の差を表し、 $\text{Proj}(K \otimes A)$ から $U(K \otimes (SA)^\sim)$ の Taylor 多項式全体への対応をつける。その際、Atiyah の方法を用いると、多項式から 1 次式の計算に帰着できる。

(v) (Atiyah のトリック) Taylor 多項式 $z \in \mathbb{T} \mapsto \sum_{j=0}^n z^j a_j \in A$ を与える。基本変形を繰り返して

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ z & 1 & & \\ & z & \ddots & \\ & & z & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} - z a_n & a_n \\ z & 1 & & & \\ & z & \ddots & & \\ & & z & 1 & \\ & & & z & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} - z a_n & 0 \\ z & 1 & & & \\ & z & \ddots & & \\ & & z & 1 & \\ & & & z & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^n z^j a_j & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

最初の行列は $M_{n+1}(A)$ の値をもつ 1 次式であり、最後は A に値をもつ n 次多項式である。

これを用いると (iv) の対応が 1 対 1 であることをわかる。

A が単位元をもたないとき：次の完全系列より明らかである。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K^1(A \otimes C_0(\mathbb{R})) & \rightarrow & K^1(A^\sim \otimes C_0(\mathbb{R})) & \rightarrow & K^1(C_0(\mathbb{R})) \rightarrow 0 \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & K^0(A) & \rightarrow & K^0(A^\sim) & \rightarrow & K^0(\mathbb{C}) \rightarrow 0 \end{array}$$

3.6 六項完全系列 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow J \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow 0$ に対して次の完全系列が成り立つ

$$\begin{array}{ccccc} K^0(J) & \xrightarrow{\iota_*} & K^0(E) & \xrightarrow{\varphi_*} & K^0(A) \\ \uparrow \sigma & & & & \downarrow \sigma \\ K^1(A) & \xleftarrow{\varphi_*} & K^1(E) & \xleftarrow{\iota_*} & K^1(J) \end{array}$$

3.4 の補題, 3.4.1, 3.5.1 を完全系列 $0 \rightarrow J \otimes C_0(\mathbb{R}) \rightarrow E \otimes C_0(\mathbb{R}) \rightarrow A \otimes C_0(\mathbb{R}) \rightarrow 0$ に適用して, 3.3 を用いればよい。

3.7 Thom 同型

$$K^0(A) \cong K^1(A \rtimes \mathbb{R}), \quad K^1(A) \cong K^0(A \rtimes \mathbb{R})$$

α が自明な作用のときは, $A \rtimes \mathbb{R} \cong A \otimes C_0(\hat{\mathbb{R}})$ であるから, 3.4.1 と 3.5.1 と同内容である。

Connes による証明の外にも, Rieffel, Elliott 等のものがある。ここでは方針だけを示す。

証明の方針。まず $A = \mathbb{C}$ の場合を考察し, $K^1(C^*(\mathbb{R}))$ の生成元を求める ($\mathbb{C} \rtimes \mathbb{R} =$

$C^*(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{R})$. $C^*(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{T})$, $C_0(\mathbb{T}) \cong C(\mathbb{T})$ であるから, Bott の周期作
 と同型対応 3.5.1 により, $K^0(\mathbb{C}) \cong K^1(C(\mathbb{T}))$. 1次元の射影元 e に対応する $K^0(\mathbb{C})$ の元
 $[e]$ は $K^0(\mathbb{C})$ の生成元である. 3.5.1 の証明より, $[e]$ に対応するユニタリ元 $z \mapsto (1-e) + ze$

1) 同値類 $[e]$ は $K^1(C(\mathbb{T}))$ の生成元である:
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longleftrightarrow & K^0(\mathbb{C}) & \longleftrightarrow & K^1(C(\mathbb{T})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & [e] & & [z \mapsto (1-e) + ze] \end{array}$$

そこで $C(\mathbb{T})$ で Winding 数 1 の関数 $z \mapsto z$ に対応する $C^*(\mathbb{R})$ の元 ξ を求める:

$$\begin{array}{ccccc} C(\mathbb{T}) & \xleftrightarrow{\text{Cayley 変換}} & C_0(\hat{\mathbb{R}}) & \xleftrightarrow{\text{Fourier 変換}} & C^*(\mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ z \mapsto z & & \hat{f}(\mu) = \frac{\mu-i}{\mu+i} = 1 + \hat{g}(\mu) & & 1 + \lambda(g) \end{array}$$

ここで $\hat{g}$ が $C_0(\hat{\mathbb{R}})$ の元となるように λ を決める. 実際, $\hat{g}(\mu) = -2i/(\mu+i)$. また, λ は $L^2(\mathbb{R})$
 上の正則表現であり $\lambda(g) = \int g(t) \lambda(t) dt$ である. $t \mapsto \lambda(t)$ の無限小生成元 $\xi \in iH$ とすれば,
 $\lambda(t) = e^{it\xi}$ ($H = -i \frac{d}{dt}$). H のスペクトル分解 $H = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda)$ を用いると, $\lambda(g) = \iint_{\mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}}} g(\lambda) e^{it\lambda} dE(\lambda) dt$
 $= \hat{g}(-H)$ となる. したがって, $K^1(C^*(\mathbb{R}))$ の生成元は $[1 + \hat{g}(-H)]$ と表せる.

このように $A = \mathbb{C}$ の場合の議論を, 接合積の場合に考え直す. $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ は $L^1(\mathbb{R}, A)$ を稠密な部分
 $*$ 環と見做す. ここで, $a \in A$ と $f \in L^1(\mathbb{R}, A)$ に対し, $(af)(t) = a f(t)$, $(fa)(t) =$
 $f(t) \alpha_t(a)$ とおくと, $af, fa \in L^1(\mathbb{R}, A)$ となるので, A の元は $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ の Multiplier と
 見ることが出来る. このことを念頭に, 3.4.1 の Index 写像に相当する写像を構成する. $[e] \in K^0(A)$
 に対し, e が d_t で不変でないときには, α の移動 $\alpha'_t = \text{Ad}_{u_t} \circ \alpha_t$ を用いて, $d'_t(e) = e$ と
 するようにする. こうしても, $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \cong A \rtimes_{\alpha'} \mathbb{R}$ であるから, あるいは $d_t(e) = e$ と仮定できる. さ
 ら, $t \mapsto d_t$ を導くユニタリ表現で $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ の Multiplier に値をもつものを $t \mapsto v(t)$ とし, 無限
 小生成元 $\xi \in iH$ とすれば, $d_t(x) = v(t)xv(t)^*$, $v(t) = e^{it\xi} \in M(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R})$. $He = eH$ となる.
 $A = \mathbb{C}$ の場合と同様に, $1 + \hat{g}(eHe)$ は $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ の Multiplier であり可逆である. したがって
 $K^1(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R})$ の元 $[1 + \hat{g}(eHe)]$ が定まる. ここで, $\delta([e]) = [1 + \hat{g}(eHe)]$ とおけば, δ

14

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \square & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \\
 \downarrow \cup & & \downarrow & & \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\
 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \square & \rightarrow & \mathbb{Z}
 \end{array}$$

$\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 0$
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

は $K^0(A)$ から $K^1(A \rtimes_{\alpha} R)$ への同型写像と τ する. $K^1(A)$ から $K^0(A \rtimes_{\alpha} R)$ への同型写像も容易に導き出される.

3.7.1 離散接合後に対する六項完全系列 ([7]) C^* 接合後 $B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}$ に対する

の系列は完全である:

$$\begin{array}{ccccc}
 K^0(B) & \xrightarrow{id - \beta_*} & K^0(B) & \xrightarrow{\iota_*} & K^0(B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \\
 K^1(B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\iota_*} & K^1(B) & \xleftarrow{id - \beta_*^*} & K^1(B)
 \end{array}$$

これは Pimsner-Voiculescu により示され, その後から Cuntz, Connes, Elliott 等による

別証明が与えられた. Thom 同型を用いた証明: $(A, R, \alpha) = \text{Ind}_{\mathbb{Z} \uparrow R}(B, \mathbb{Z}, \beta)$ とする. すな

わち, A を $\{f \in B \otimes C(R) : f(t+1) = \beta(f(t))\}$ とし, $(\alpha_t f)(s) = f(s-t)$ とする. このときには,

$A \rtimes_{\alpha} R \cong (B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}) \otimes K$. Thom 同型により, $K^*(A) \cong K^*(B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z})$, $K^1(A) \cong K^0(B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z})$. 又

C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow SB \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\rho} B \rightarrow 0$ を $\varphi(f) = f(0)$ により与えたと, 六項完全系列

$$\begin{array}{ccccc}
 K^0(SB) & \xrightarrow{\iota_*} & K^0(A) & \xrightarrow{\rho_*} & K^0(B) \\
 \delta_1 \uparrow & & \downarrow \delta_0 & & \\
 K^1(B) & \xleftarrow{\rho_*} & K^1(A) & \xleftarrow{\iota_*} & K^1(SB)
 \end{array}$$

が得られる. ここで δ_0, δ_1 は詳細に検討すればよい.

直接の証明. $\mathbb{Z}$ により与えられる等長作用素 S から生成される C^* 環を $C^*(S)$ とすれば, C^* 環の

完全系列 $0 \rightarrow K \xrightarrow{\iota} C^*(S) \xrightarrow{\rho} C(T) \rightarrow 0$ が得られる. ただし, ι は K を生成元行列単位

$e_{ij} (i, j \geq 0)$ から $S^i(1 - SS^*)S^{*j}$ への対応であり, $\varphi(S) = (z \mapsto z)$ である. つぎに, C^* 系 $(B,$

$\mathbb{Z}, \beta)$ に対し, $B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z} \cong C^*(B \otimes 1, u \otimes p(\mathbb{Z}))$ を $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ へ制限したものを E とすれば, E は

$B \otimes 1$ と $u \otimes S$ により生成され, C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow B \otimes K \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\rho} B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ が得ら

れる. ところで, $\iota(u \otimes e_{ij}) = u^i u^{*j} \otimes L_0(e_{ij})$. L は ρ による六項完全系列をもとに, 六角形の

完全系列

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K^0(B) & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 K^0(B) & \rightarrow & K^0(E) & \rightarrow & K^0(B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \\
 K^1(B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}) & \leftarrow & K^1(E) & \leftarrow & K^1(B) \\
 & \nwarrow & \uparrow & \nearrow & \\
 & & K^1(B) & &
 \end{array}$$

を得る.

この論法は A_0 や $C^*(F_n)$ の K 群を求めるときに有効である. なお, この 3.7.1 から

Thom 同型を導くことができた.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \boxed{K^0} \\ & \uparrow & & & \downarrow \\ \boxed{K^1} & \longleftarrow & \mathbb{Z}^2 & \longleftarrow & \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

15

3.8 Mayer-Vietoris 完全系列 $A_i \xrightarrow{j_i} B$ ($i=1,2$) に対し, $A_1 \oplus_B A_2$ を A_1 と A_2

の B 上のファイバー積とすると,
$$\begin{array}{ccccccc} K^0(A_1 \oplus_B A_2) & \xrightarrow{i_*} & K^0(A_1) \oplus K^0(A_2) & \xrightarrow{j_*} & K^0(B) \\ \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K^1(B) & \xleftarrow{j_*} & K^1(A_1) \oplus K^1(A_2) & \xleftarrow{i_*} & K^1(A_1 \oplus_B A_2) \end{array}$$
 は完全系列である. したがって, $i_*(a) = (i_{1*}a, i_{2*}a)$, $j_*(q, b) = j_{1*}q - j_{2*}b$ である.

ファイバー積の説明から始める. 可換図式 $A \begin{array}{c} \xrightarrow{j_1} A_1 \\ \xrightarrow{j_2} A_2 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{j_1} B \\ \xrightarrow{j_2} B \end{array}$ において, (i) j_1 または j_2 は全射, (ii) $j_1(a) = j_2(a_2)$ をみたす任意の $(a_1, a_2) \in A_1 \oplus A_2$ に対し $i_1(a) = a_1$, $i_2(a) = a_2$ をみたす a が一意に存在する. このとき, A を A_1 と A_2 の B 上の ファイバー積 といい, $A_1 \oplus_B A_2$ と書く. これは $A_1 \oplus A_2$ の部分 C^* 環 $\{(a_1, a_2) \in A_1 \oplus A_2 : j_1(a_1) = j_2(a_2)\}$ と同型である.

さて, $J_1 = \text{Ker } i_1$, $J_2 = \text{Ker } i_2$ とする. j_1 が全射なら, i_2 は J_1 の J_2 への同型写像になる:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J_1 & \xrightarrow{i_1} & A & \xrightarrow{j_1} & A_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i_2|_{J_1} & & \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\ 0 & \longrightarrow & J_2 & \xrightarrow{i_2} & A_2 & \xrightarrow{j_2} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

実際, $x \in J_1$ なら, $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$ を用いて, $i_2(x) \in J_2$. 逆に, $y \in J_2$ なら, i_2 が全射であるから, $i_1(x) = 0$, $i_2(x) = y$ をみたす $x \in A$ が唯一つある. したがって, i_2 を J_1 へ制限したものは, J_1 から J_2 への同型写像である. したがって, 六項完全系列を用いて,

新しい完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & K^1(A) & \xrightarrow{i_*} & K^1(A_1) & \xrightarrow{\delta} & K^0(J_1) & \xrightarrow{i_*} & K^0(A) & \xrightarrow{i_*} & K^0(A_1) \\ & \downarrow i_{2*} & & \downarrow j_{1*} & & \parallel (i_2|_{J_1})_* & & \downarrow i_{2*} & & \downarrow j_{1*} \\ \longrightarrow & K^1(A_2) & \xrightarrow{j_*} & K^1(B) & \xrightarrow{\delta'} & K^0(J_2) & \xrightarrow{i_*} & K^0(A_2) & \xrightarrow{j_*} & K^0(B) \end{array}$$

を作る. $\delta' = i_{1*} \circ (i_2|_{J_1})_* \circ \delta$ を $K^1(B)$ から $K^0(A)$ への準同型写像とみると, 完全系列 $K^1(A) \xrightarrow{i_*} K^1(A_1) \oplus K^1(A_2) \xrightarrow{j_*} K^1(B) \xrightarrow{\delta'} K^0(A) \xrightarrow{i_*} K^0(A_1) \oplus K^0(A_2) \xrightarrow{j_*} K^0(B)$ が得られる. 懸念により, Mayer-Vietoris 完全系列が得られる.

逆に, Mayer-Vietoris 完全系列を初めに証明しておいてから, 六項完全系列を示すこともできる. その際には, δ' を Index 写像の構成と同じように作ればよい.

u. Mayer-Vietoris 完全系列は層 C^* 環の K 群を求めるときに有効である.

4. Kasparov の KK 理論

ここでは, C^* 環 A, B から可換群 $KK(A, B)$ への KK フังก์ターを考へる. これは Atiyah の K ホモロジーや BDF 理論を一般化したものであるが, $KK(\mathbb{C}, B) \cong K(B)$, $KK(A, \mathbb{C}) \cong K_0(A)$ が成り立ち, K 群と K ホモロジーの両方の性質を備えている. さらに KK フังก์ターには, 結合法則を満たす Kasparov 積 $(x, y) \in KK(A, B) \times KK(B, C) \mapsto y \circ x \in KK(A, C)$ が定義できるので, この積に関して $KK(A, B)$ または $KK(B, C)$ が可逆な元を含めば, $K_0(A) \cong K_0(B)$ または $K(B) \cong K(C)$ となる. Kasparov 自身による群 C^* 環の研究や Connes による葉層 C^* 環の研究では, このような可逆元の存在を論じたものが多い. 高井氏の講演もそうである (同氏の講演記録参照)

4.1 C^* 環の拡大と K_1 ホモロジー C^* 環完全系列 $0 \rightarrow K \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ に

与えられる C^* 環 E を A の 拡大, または K の A による 拡大 という. このような拡大の分類をするには, 通常次の同式
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\iota} & E & \xrightarrow{\pi} & A \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \varphi & & \downarrow \tau \\ 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\iota} & L(\varphi) & \xrightarrow{\rho} & Q(\varphi) \rightarrow 0 \end{array}$$
 により, E を K の Multiplier 環 $M(K) = L(\varphi)$ の部分 C^* 環へ埋蔵し, この拡大を A から $Calkin$ 環 $Q(\varphi)$ の中への (単位的) 単準同型写像 $\tau = \rho \circ \varphi^{-1}$ と対応させ, 拡大の分類を単準同型写像の分類に帰着させる. $Ext(A)$ はこのような (単位的) 単準同型写像全体を $Q(\varphi)$ の内部自己同型で割ったものとして定義される. 単準同型写像 τ を含む同値類を $[\tau]$ と表すことにすれば, $Ext(A)$ は加法 $[\tau_1] + [\tau_2] = [\tau_1 \oplus \tau_2]$ により

可換半群になる. ただし, φ が可算無限次元であることを用いて得られる関係

$$\begin{array}{ccc} L(\varphi) \oplus L(\varphi) & \subset & L(\varphi \oplus \varphi) \subset L(\varphi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q(\varphi) \oplus Q(\varphi) & \xrightarrow{\quad} & Q(\varphi) \end{array}$$

は今後も断わりなく利用する. とくに τ が持

ち上げ (Lifting) $p: A \xrightarrow{\rho} Q(\varphi)$ とするとき, つまり単準同型写像 $\varphi: A \rightarrow L(\varphi)$ が存在して上の同式が可換になるときには, $[\tau] = 0$ である. さらに, A が

核型 α ときは, $\text{Ext}(A)$ は可換群になり, K_1 ホモロジー のものである. $\therefore$ 得られた反変

ファンクター Ext は K 群と同じような性質をもったことが省略する.

例 $\text{Ext}(\mathbb{Q}) = 0$

Pimsner-Popa-Voiculescu はこれをさらに一般化し, 拡大 $0 \rightarrow K \otimes C(X) \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ の分類を行った. Kasparov [6] はこれと独立に, (ほぼ) 同時に $0 \rightarrow K \otimes B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ の分類を論じた.

4.2 K_0 ホモロジー 単準同型写像 $\varphi: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ と $\varphi(a)F = F\varphi(a) \in K(\mathcal{H})$ ($\forall a \in A$) とみたときフレッドホルム作用素 $F \in \varphi^{-1}(U(K(\mathcal{H})))$ からなる (φ, F) の全体を考える. この集合のホモトピー-数全体は加法 $[\varphi_1, F_1] + [\varphi_2, F_2] = [\varphi_1 \oplus \varphi_2, F_1 \oplus F_2]$ により可換半群になるので, その Grothendieck 群 $K_0(A)$ を A の K_0 ホモロジー または K_0 ホモロジー とする.

ここでは直感的な意味がわからない. そこで, 動機がわかるように説明しよう.

無限次元可分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, 単準同型写像 $\psi_i: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$ および

$\psi_i(a)F = F\psi_i(a)$: コンパクト ($\forall a \in A$) とみたとき $\mathcal{H}_0$ から $\mathcal{H}_1$ へのフレッドホルム作用素

F とみたとき五つ組 $(\mathcal{H}_1, \psi_1, \mathcal{H}_2, \psi_2, F)$ の全体を $\mathcal{EU}(A)$ とする (階層型作用素の一般化).

これは加法 $(\mathcal{H}_1, \psi_1, \mathcal{H}_2, \psi_2, F) + (\mathcal{H}'_1, \psi'_1, \mathcal{H}'_2, \psi'_2, F') = (\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}'_1, \psi_1 \oplus \psi'_1, \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}'_2, \psi_2 \oplus \psi'_2, F \oplus F')$ により可換半群になる. これを次の三条件により決まる同値関係で割ったものが $K_0(A)$ である: (i)

$\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への $\mathcal{U}$ -等変作用素 u_1, u_2 が

存在して, $u_1 \psi_1(a) = \psi'_1(a) u_1$, $u_2 F = F' u_1$, $u_2 \psi_2(a) = \psi'_2(a) u_2$ とき, $(\mathcal{H}_1, \psi_1, \mathcal{H}_2, \psi_2, F) \sim (\mathcal{H}'_1, \psi'_1, \mathcal{H}'_2, \psi'_2, F')$; (ii) $(\mathcal{H}_1, \psi_1, \mathcal{H}_2, \psi_2, F) + (\mathcal{H}_1, \psi_1, \mathcal{H}_2, \psi_2, 1) = (\mathcal{H}_1, \psi_1, \mathcal{H}_2, \psi_2, F)$; (iii) $\psi(a) - \psi'(a) \in K$ かつ F, F' の極分解 $F = U|F|$, $F' = U'|F'|$ に対し

$u-v' \in K$ とき, $(\psi, \varphi, \psi, \varphi, F) \sim (\psi, \psi', \psi, \psi', F')$. 実際, $K_0(A)$ は可換群になる.
 $(\psi, \varphi, \psi, \varphi, 1)$ を含む類が零元であり, $(\psi_1, \varphi_1, \psi_2, \varphi_2, F)$ を含む類の逆元は $(\psi_2, \varphi_2, \psi_1, \varphi_1, F^*)$ を含む類である. K_0 は反複因子になる.

前の定義との関係を見るためには, $(\psi_1, \varphi_1, \psi_2, \varphi_2, F) \in ((\psi_1 \circ \varphi_2), (\varphi_1 \circ F^*))$ のようにおこしにしてみよう.

例 $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, $K_0(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (n: \text{偶数}) \\ \mathbb{Z} & (n: \text{奇数}) \end{cases}$

4.3 KK 因子 Kasparov 自身による定義から始める. A, B を C^* 環とする. 準同型写像 $\psi: A \rightarrow M(K \otimes B)$ と $F \in M(K \otimes B)$ から成る対 (ψ, F) の中では, $[\psi(a), F], (F^2 - 1)\psi(a), (F - F^*)\psi(a)$ がどれも $K \otimes B$ に含まれるようなものの全体は加法 $(\psi, F) + (\psi', F') = (\psi \oplus \psi', F \oplus F')$ により可換半群になる. ところで, 右辺では $M(K \otimes B) \oplus M(K \otimes B) \subset M_2(M(K \otimes B)) \subset M(M_2(K \otimes B)) \subset M(K \otimes B)$ のような同視を行っている. この半群のホモモルフォイズムの全体 $KK(A, B)$ は可換群になる. 上の三つの関係のうちどれも 0 となる (ψ, F) の類が零元であり, (ψ', F') を含む類の逆元は $(\psi', -F')$ を含む類である. 注4

もう少し直感的な定義が Cuntz により与えられている. これを用いると, Kasparov のように B に狭義正値元の存在を仮定せずに KK 群が定義できる.

A から B への 疑似準同型写像 (quasihomomorphism) $A \rightarrow E \supset J \subset B$ とは, A から E への準同型写像の対 $(\psi, \bar{\psi})$ で, $\psi(a) - \bar{\psi}(a)$ が J に含まれるようなものである (J は E の閉イデアルであり, B の部分 C^* 環である). 通常はこの外に, E が $\psi(A)$ と $\bar{\psi}(A)$ により, J が $\psi(a) - \bar{\psi}(a)$, $a \in A$ により生成され, J が E において essential であることも仮定する. こうすると, 疑似準同型写像 $(\psi, \bar{\psi})$

は1次形式 $D_\psi(a) = \psi(a) - \bar{\psi}(a)$, 2次形式 $Q_\psi(a, b) = \psi(a)D_\psi(b)$ $a, b \in A$ により一意に定まる. そこで, $(\psi_0, \bar{\psi}_0)$ と $(\psi_1, \bar{\psi}_1)$ がホモトピーであることと, D_{ψ_0}, Q_{ψ_0} が, D_{ψ_1}, Q_{ψ_1} とホモトピーであることとを定数とする.

A から $K \otimes B$ への疑似準同型写像のホモトピー類の全体が $KK(A, B)$ と一致し, 加法は $(\psi_1, \bar{\psi}_1) + (\psi_2, \bar{\psi}_2) = (\psi_1 \oplus \psi_2, \bar{\psi}_1 \oplus \bar{\psi}_2)$ で与えられる. $\tau = \tau^*$ として, 右辺では $(K \otimes B) \oplus (K \otimes B) \subset M_2(K \otimes B) \subset K \otimes B$ のように同一視を行なう. $[\psi, \psi] = 0$, $[\bar{\psi}, \psi] = -[\psi, \bar{\psi}]$ である.

4.4 Kasparov 積 KK フังก์ターで最も重要な役割を果たすのが Kasparov 積 $(x, y) \in KK(A, B) \times KK(B, C) \mapsto y \circ x \in KK(A, C)$ である. $\tau = \tau^*$ として, A は可分であることと仮定する. x, y の代表元である疑似準同型写像を $(\psi, \bar{\psi}): A \rightarrow E_1 \supset J_1 \subset K \otimes B$, $(\psi_1, \bar{\psi}_1): B \rightarrow E_2 \supset J_2 \subset K \otimes C$ とする. $(\psi, \bar{\psi})$ を $K \otimes B$ へ拡張して $(\psi \oplus \text{id}, \bar{\psi} \oplus \text{id})$ を改めて $(\psi, \bar{\psi})$ と書く. これを J_1 へ制限して $(\psi, \bar{\psi})|_{J_1}$ とし, E_1 へ拡張するとき, $(\psi, \bar{\psi})$ と $(\psi, \bar{\psi})|_{J_1}$ の合成が疑似準同型写像に成ることを確かめたい. $(\psi, \bar{\psi})|_{J_1}$ とホモトピーな疑似準同型写像の中で E_1 へ拡張でき, しかも $E_1 \subset M(J_1)$ とおき, $(\psi, \bar{\psi})$ と書く. そこで $\alpha = \begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \bar{\psi} \end{pmatrix}$, $\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{\psi} & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$ とおき, $\alpha(A)$ と $\bar{\alpha}(A)$ の生成する C^* 環を D , $\text{Ad}(\tau)$ を D へ制限して τ とおくとすれば, $\alpha(a) - \tau(\bar{\alpha}(a)) \in M_2(J_2)$. したがって, $(\alpha, \tau \circ \bar{\alpha})$ は A から $K \otimes C$ への疑似準同型写像である. これを含むホモトピー類を $y \circ x$ とする.

Kasparov 積の結合法則 $z \circ (y \circ x) = (z \circ y) \circ x$ が成り立つこともわかる.

4.5 基本的性質 KK フังก์ターは $\mathcal{O}$ -左理想に関し双変, $\mathcal{O}$ -右理想に関し共変である. この外, K 群 a と b を述べたものと同一の性質が成り立つ.

4.5.1 $KK(A, \mathbb{C}) \cong K_0(A)$ Kホモロジー

4.5.2 $KK(\mathbb{C}, B) \cong K^0(B)$ K群

これらの証明は Cuntz の定義に戻るとおもしろい。

4.5.3 $KK(A_1, B_1) \times KK(A_2, B_2) \rightarrow KK(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)$ の

同型が定義できる。

4.5.4 $K_n K^m(A, B) = KK(S^n A, S^m B)$ とおくと, Bott の周期性
周期性 $KK(A, B) \cong K_2 K(A, B) \cong K_1 K^1(A, B) \cong KK^2(A, B)$ が成り立つ。ただし, 添
 字が 0 のときは省いていい。とくに $KH_0(S^2 A) = KH_0(A)$

4.5.5 A が核型ならば, $KK^1(A, B) \cong \text{Ext}(A, B)$. 一般の C^* 環の

ときは, $KK^1(A, B)$ は $\text{Ext}(A, B)$ の可逆な部分である。

2
完全
列 $\left[\begin{array}{l} 4.5.6 \quad 0 \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0 \text{ が完全で, } E \text{ が核型ならば, } \cdots \rightarrow K_n(E, B) \\ \rightarrow K_n K(J, B) \rightarrow K_{n-1} K(A, B) \rightarrow K_{n-1} K(E, B) \rightarrow \cdots \text{ も完全である.} \end{array} \right.$

2
列の
完全
列 $\left[\begin{array}{l} 4.5.7 \quad 0 \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0 \text{ が完全で, } J \text{ が狭義正値元をもてれば,} \\ \cdots \rightarrow KK^n(A, E) \rightarrow KK^n(A, B) \rightarrow KK^{n+1}(A, J) \rightarrow KK^{n+1}(A, E) \rightarrow \cdots \text{ も完全で} \\ \text{ある.} \end{array} \right.$

4.5.8 普遍係数定理 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow K \otimes B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ に

対し $0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(K^0(A), K^0(B)) \oplus \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(K^1(A), K^1(B)) \rightarrow \text{Ext}(A, B) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}$

$(K^0(A), K^1(B)) \oplus \text{Hom}(K^1(A), K^0(B)) \rightarrow 0$ も完全である。ただし, $\gamma([E])$

$= (\delta, \delta)$ である。これにより, C^* 環の拡大が K 群から定まる量により系統的に分類

できる。とくに, $A = C(X)$ ($X \subset \mathbb{C}$), $B = \mathbb{C}$ の場合が BDF 理論で重要にな

る。

5 例 いくつかの例を選んで、もう少し詳しい解説をする。

5.1 AF環 順序群 (G, G^+) が次の二つの条件を満たすとき 次元群 と

いう: (I) $a + \dots + a \in G^+$ ならば, $a \in G^+$; (II) $a_i \leq a_j$ ($i, j=1, 2$) ならば, $a_i \leq c \leq a_j$ ($i, j=1, 2$) を満たす c が存在. AF環の安定同型類と次元群は1対1に対応している. AF環の次元群は $K^0(A)$ に射影元 a 大, 小関係を入れたものである. AF環でない C^* 環の K^0 群にも順序を考へることは有意義と思われる. (武元氏の講演記録参照)

5.2 無理数回転環 $A_\theta = C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ ($(\alpha f)(z) = f(e^{2\pi\theta i} z)$) は

交換関係 $uv = e^{2\pi\theta i} vu$ を満たす二つのユニタリ作用素 u, v から生成される C^* 環に同型である. Powers は A_θ が単純であることを示し, Rieffel は $p = f_1 u$

$+ f_0 + u^* f_{-1}$ という形の自明でない射影元を作つて, Kadison の予想に決着を

つけた. (注: 差分方程式により記述される概 Mathieu ハミルトニアン $h(\lambda) =$

$u + u^* + \lambda(v + v^*)$ のスペクトルに ~~no~~ ^{ここがわかる} ~~Mass gap~~ ^{がある} があり, A_θ には自明でない

射影元がある. ~~事実~~ Powers は Rieffel が上の p を与える前から知っていたそうである). ^{A_θ が射影元をもつていて, この事を}

つづいて, Pimsner-Voiculescu は $K^0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$, $K^1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$ であ

て, それぞれの生成元が, $[1], [p]$ および $[u], [v]$ であること, A_θ 上の

規格化されたトレース τ により $\tau(K^0(A_\theta)) = \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ となることを示した. これ

により, $A_\theta \cong A_{\theta'}$ ($\theta, \theta' \in [0, 1]$) であるための完全条件が, $\theta = \theta'$ または

$\theta = 1 - \theta'$ であることが判明した. この最後の結果に対し, Cuntz は簡単な

別証を与えている.

2次元トラス $V = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ 上の流れ $T_t(x, y) = (x + \theta t, y + t) \pmod{\mathbb{Z}^2}$

から導かれる葉層構造を F ($dz = \theta dy$) とすれば, $C^*(V, F) \cong C(V) \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ となる. ただし, $d_t f = f \circ T_t^{-1}$. 軌道の切口として, $\{1\text{-次元トラス } X = \{(x, 0) \in V : x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\} \text{ を考え, } \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}} \text{ が誘導した変換を } S \text{ とすれば, } Sx = x + \theta \pmod{\mathbb{Z}} \text{ とする. } C(X) \text{ 上で } \beta g = g \circ S^{-1} \text{ とすれば, } C^*\text{-系 } (C(X), \mathbb{Z}, \beta) \text{ は } C^*\text{-系 } (C(V), \mathbb{R}, \alpha) \text{ を誘導する. したがって, } C(V) \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \cong (C(X) \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}) \otimes K \cong A_0 \otimes K \text{ となり, } C^*(V, F) \text{ と } A_0 \text{ の } K\text{-理論は一致する.}$

5.3 自由群 F_n ($n \geq 2$) の群 C^* -環の研究は Kadison の予想 " $C^*_{red}(F_n)$ は自明でない射影元をもたない" を目標に行われた. まず Cohen が $C^*(F_n)$ は自明でない射影元をもたないことを示し, Cuntz が $K^0(C^*(F_n)) \cong \mathbb{Z}$, $K^1(C^*(F_n)) \cong \mathbb{Z}^n$ を示した. ついで, Pimsner-Voiculescu が $K^0(C^*_{red}(F_n))$ の生成元が $[1]$ であることを示し, 予想を肯定的に解決した. Cuntz は, $KK(C^*(G), C^*_{red}(G))$ が Kasparov 積に閉じた多元環を含むとき, K -乗順ということにし, 乗順群, 自由群等が K -乗順であることと, 性質 T をもつ無限群は K -乗順でないことを示した. これにより上の結果はさらに見通し良くなった.

Cuntz は正則表現から導かれた準同型写像 $\varphi: C^*(G) \rightarrow C^*_{red}(G)$ に対し, $K^*(C^*(G)) \cong K^*(C^*_{red}(G)) \oplus K^*(\text{Ker } \varphi)$ を予想している. Lance は上の Pimsner-Voiculescu の結果を一般化して, 別証を行っている. その際, 可算離散無限群でない性質 Λ という条件を導入している. これが成ると, 長田孝のいう Haagerup の性質が成るが, K -乗順も含め T : これら三つの条件の相互関係はわかっていない. 乗順群や自由群を含むが, 性質 T をもつ群を含まない可算離散無限群のクラスが決まってくる (長田孝の講演

Heisenberg Lie 群 の K^0, K^1 はともに 0

23

記録参照). $K_*(C^*(F_n)) \cong \mathbb{Z}^n$ (菅原氏の証明がある).

5.4 Fell + Kirillov は 3次元ハイゼンベルグ群 $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ に対し, C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes K \rightarrow C^*(G) \xrightarrow{\varphi} C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow 0$ は分裂する?, という問題を提えた. $T=T^*$ し, φ は表現 $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (q, \phi) \mapsto e^{i(ax+by)}$ から導かれ $T=0$ である. Kasparov は $\text{Ext}(C_0(\mathbb{R}^2), C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})) \cong \mathbb{Z}^2$ であり, 上の拡大は $(-1, -1)$ に対応していることを示し, 分裂していないことを示した. Rosenberg も $2n+1$ 次元ハイゼンベルグ群 H_{2n+1} に対して同様の結果を普遍係数定理を用いて示し, その系として $K^0(C^*(H_{2n+1})) = K^1(C^*(H_{2n+1})) = 0$ を示した.

Kasparov はこの結果をさらに拡張している.

単連結, 可解リー群 G の群 C^* 環の K 群は Kasparov により求められた. G は単連結, 閉正規部分群と $\mathbb{R}$ の半直積に表せるので, Thom 同型を繰り通して, $K^j(A) \cong K^{j+i}(A \rtimes_\alpha G)$ ($j = \dim G \pmod{2}$). ここで, $A = \mathbb{C}$ とすればよい.

群 G が $\mathbb{R}^n$ とコンパクト群 H の半直積で与えられた運動群のときは, $C^*_{red}(G) \cong C(\hat{\mathbb{R}}^n) \rtimes_\alpha H$. したがって, $K^*(C^*_{red}(G)) \cong K^*_H(C(\hat{\mathbb{R}}^n)) \cong K^*_H(\mathbb{C}) \cong R(H)$. したがって, $R(H)$ は H の表現環である.

5.5 最後に Connes による非可換微分幾何について少し触れておく. リー群 G の作用する C^* 系 (A, G, α) に対し, A 上に規格化された α 不変トレース τ の存在を仮定すれば, $K^*(A) = K^0(A) \oplus K^1(A)$ から G の de Rham コホモロジー環 $H^*_\mathbb{R}(G)$ への群準同型写像 $ch_\tau: K^*(A) \rightarrow H^*_\mathbb{R}(G)$ が構成できる.

例 1. $(A, \mathbb{R}, \alpha)$ の場合には, $ch_\tau([u]) = \frac{1}{2\pi i} \tau(\delta(u)u^*)$, $u \in U(A)$.

$$[u] \in K^1(A) \xrightarrow{ch_\tau}$$

これを用いると、単位元のない単純 C^* 環では、自明でない射影元は存在しないものゝ例が作れる。

$$K^0(A) \ni [e]$$

例 2. $(A, \mathbb{R}^2, d)$ の場合には $ch_2([e]) = \tau(e) + c_1(e) \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \in H_R^*(G)$.

ただし、 $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ は $G = \mathbb{R}^2$ のリー環の標準基底である。このとき、 $c_1(e)$ は Chern 数 といわれ、 $c_1(e) = \frac{1}{2\pi i} \tau(e [\delta_1(e), \delta_2(e)])$ とする。ただし、 δ_1, δ_2 は $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ に対応して d から導かれる微分である。たとえば、 $A = A_\theta$ のときには、

$c_1(K^0(A_\theta)) = \mathbb{Z}$ であり、 $\theta < 1$ は $c_1(p) = 1$ とする。したがって、 θ は有理数と仮定

イクル擾動を行っても、 p を不変にする作用は作れないことがわかる。

例 3. $G = \mathbb{R}^n$ の場合には指数定理を一般化して、 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow A \otimes \mathbb{R}^n \rightarrow E \rightarrow A \otimes C(S^{n-1}) \rightarrow 0$ が得られる。ただし、表象 $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n, A^0)$ に対応する擬微分作用素は $P_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\alpha}(s) V_s ds \in M(A \otimes \mathbb{R}^n)$ であり、 $\sigma(P_\alpha)$ はその主表象である。 $D \in E$ の閉閉型作用素 a のときには、 $\hat{c}(\sigma(D)) = \langle ch_2(\sigma(D)), \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n \rangle$ とする。ただし、 $\hat{c}$ は Index 写像 $K^1(A \otimes C(S^{n-1})) \rightarrow K^0(A \otimes \mathbb{R}^n)$ である。 G がリー群の場合にも同様の式が成り立つようにある。

とくに、 $A = A_\theta$, $G = \mathbb{T}^2$ とすると、 $A_\theta \otimes \mathbb{T}^2 \cong K$ となり、 $\hat{c} \circ \delta$ は整数値になる。これは $c_1(p) = 1$ の別の解釈と一致している。

以上の議論の中で、Chern 指標を定義するには、接続、曲率などの概念が必要になるが、たとえば、 $A = C(\mathbb{R}^n)$, $G = \mathbb{R}^n$ のときには、それらも擬微分作用素などの概念も通常のものの延長線上にある。

文 献

(1) 入門解説

- [1] Taylor, J. L., Banach algebras and topology, Algebras and Analysis (Ed. J. H. Williams) Academic Press, 1975
- [2] Karoubi, M., K-theory, An introduction, Springer-Verlag, 1978
- [3] Atiyah, M., K-theory, Benjamin, 1967

(2) C^* 環のK理論研究の本格化

- [4] Connes, A., Sur la théorie non commutative de l'intégration, Algèbre d'Opérateurs (Ed. P. de la Harpe) Springer Lecture Notes in Math. 725.
- [5] Cuntz, J., K-theory for certain C^* -algebras, Ann. of Math., 113 (1981), 181-197.
- [6] Kasparov, G. G., The operator K-functor and extensions of C^* -algebras, Izv. Acad. Nauk. SSSR, 44 (1980), 571-636.
- [7] Pimsner, M. and D. Voiculescu, Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-products of C^* -algebras, J. Operator Theory 4 (1980), 93-118.

(1) C^* 環のK理論の概説

- [8] Connes, A., A survey of foliations and operator algebras, Proc. Symp. Pure Math. 38 (1981),
- [9] Cuntz, J., The internal structure of simple C^* -algebras, Proc. Symp. Pure Math. 38 (1981),

- [10] Cuntz, J., K -theory and C^* -algebras, Preprint 1983.
- [11] Douglas, R. G., C^* -algebra Extensions and K -homology, Ann. of Math. Studies, No 95, 1980.
- [12] Rosenberg, J., Homological invariants of extensions of C^* -algebras, Proc. Symp. Pure Math. 38 (1981)