

2階の弱双曲型方程式に対するコーシー問題

— Gevrey クラスでの —

愛媛大 エ 猪狩勝寿

$\mathbb{R}^d$ の open set Ω で定義された函数 $\varphi(x) \in C^\infty$ がクラス $\gamma_{loc}^{(\alpha)}$ に属するとは, 任意の compact set $K \subset \Omega$ に対し, 定数 ρ および C が存在して,

$$(1) \quad |\partial_x^p \varphi(x)| \leq \frac{|p|!^\alpha}{\rho^{|p|}} C, \quad x \in K$$

をすべての $p = (p_1, \dots, p_d)$ に対し 満たすことである。特に (1) が $\forall x \in \Omega$ に対して成立するなら, $\varphi(x)$ は $\gamma^{(\alpha)}$ に属するといふ。また $\varphi(x) \in \gamma^{(\alpha)}$ の support がコンパクトであるとき, $\varphi(x) \in \gamma_0^{(\alpha)}$ と記す。

歴史 Y. Ohya [1] は偏微分方程式

$$(2) \quad \partial_t^m u + \sum_{\substack{|a|+|j| \leq m \\ j < m}} a_{\alpha j}(x, t) \partial_x^a \partial_t^j u = f(x, t),$$

$(x, t) \in \Omega = \mathbb{R}^n \times [0, h]$, $h > 0$, に対するコーシー問題を考察

し、特性根が *real* かつ根の重複度が一定なる仮定の下に、

- (3) $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{このコーシー問題が } \gamma_{loc}^{(\alpha)}, 1 < \alpha < \frac{m}{m-1}, \text{ で適切} \\ \text{である。} \\ \cdot \text{有限依存領域が存在する。} \end{array} \right.$

を示した。その際、方程式の低階の項には条件が課せられておらず、クラス $\mathcal{E}$ でのコーシー問題と状況が異なっている。

その後、Leray-Ohya [2] は方程式の主部が *strictly hyperbolic operators* の種になっている場合を考察し、結果を精密化した。また Steinberg^[3] は、主部が1階の *hyperbolic pseudo differential operators* の種に分解される場合を考察した。

以上において考察されたのは、特性根が "smooth" な場合であると言える。

問題 特性根が *smooth* にならない場合でも、特性根が *real* であることを仮定すれば、(3) が従うか？

この問題の部分的解決が既に与えられている。Beale [4] は、方程式の係数が $\mathcal{E}$ に依存せず、かつ特性根は *real* で ($\xi \neq 0$ で) 0 にならないという仮定の下で (3) を示した。また、Ivrii [5] は方程式の主部の係数が *analytic* でありかつ特性根が実であることを示せば (3) が従うことを示した。

さて得られた結果を以下に述べよう。我々は2階の方程式のみを考察する。2階の偏微分方程式

$$(E) \quad L[u] = \delta^2 u - \partial_i a^{ij} \partial_j u - b^i \partial_i u - c u = f(x, t),$$

$(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, h]$, $h > 0$, を考えよう。ここで, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\delta = \partial_t + a^i \partial_i + b^0$, $a^{ij} = a^{ji}$ であり, 同じ添字に対する和の記号は省略している。

次の (A_1) , (A_2) を仮定する。

仮定 (A_1) : 次の (i), (ii), (iii) が満たされるとする;

(i) 係数 $\in C^{(n)}(\Omega)$,

(ii) $a^i(x, t)$, $a^{ij}(x, t)$ は real-valued,

(iii) $a^{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq 0$, for $\forall (x, t, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$.

仮定 (A_2) : $[\delta, \partial_i a^{ij} \partial_j] = \partial_i b^{ij} \partial_j + \text{低階}$, $b^{ij} = b^{ji}$, と表わしたとき, 次の (iv) または (iv') が満たされるものとする;

(iv) 定数 $A (\geq 0)$ が存在し, $\forall (x, t, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ に対し,

$$b^{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq -A a^{ij}(x, t) \xi_i \xi_j,$$

(iv') 定数 $A (\geq 0)$ が存在し, $\forall (x, t, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ に対し,

$$b^{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq A a^{ij}(x, t) \xi_i \xi_j.$$

このとき, 次の定理が成り立つ。

定理 $(A_1), (A_2)$ を仮定する。また $1 < \alpha < 2$ とする。
 すると、任意の $f(x, t) \in \gamma_{loc}^{(\alpha)}(\Omega)$ および 任意の初期データ
 $(u(x, 0), \partial_t u(x, 0)) \in \gamma_{loc}^{(\alpha)}(\mathbb{R}^n)$ に対し、 Ω で (E) を満たす解
 $u(x, t) \in \gamma_{loc}^{(\alpha)}(\Omega)$ が存在し、解は $\mathcal{E}^2$ で一意である。更に
 有限な依存領域が存在する。

注意 C_{x_0, t_0} , $(x_0, t_0) \in \Omega$, は次のように定義される backward cone とする:

$$C_{x_0, t_0} = \{(x, t) \in \Omega; \mu |x_0 - x| < t_0 - t\}$$

ここで, $\mu^{-1} = \sup_{(x, t) \in \Omega, |z|=1} |a^i(x, t) \xi_i + \sqrt{a^{ij}(x, t) \xi_i \xi_j}|$. すると、定理の後半は次のことを意味する: $u(x, t) \in \mathcal{E}^2$ がある
 $(x_0, t_0) \in \Omega$ に対し, $L[u] = 0$ in C_{x_0, t_0} , $u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0$ on $C_{x_0, t_0} \cap \{t=0\}$ を満たすなら, $u(x, t) = 0$ in C_{x_0, t_0} が従う。

注意 a^{ij} を具体的に書けば,

$$(4) \quad b^{ij} = (a^{ij})'_t + a^k (a^{ij})'_{x_k} - (a^i)_{x_k}' a^{kj} - a^{ik} (a^j)_{x_k}'$$

注意 $0 < t_1 \leq h$ とし, backward コーシ - 問題

$$(5) \quad L[u] = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, t_1]; \quad u|_{t=t_1} = g(x), \quad \partial_t u|_{t=t_1} = \psi(x)$$

を考えよう。変数変換: $y = -x$, $s = t_1 - t$, により (5) は

$$(5') \quad \mathcal{L}[v] = \tilde{f} \text{ in } \mathbb{R}^n \times [0, t_1]; \quad v|_{s=0} = \tilde{\varphi}(y), \quad \partial_s v|_{s=0} = \tilde{\psi}(y)$$

に変換される。ここで $\mathcal{L}(y, s; \partial_y, \partial_s) = \mathcal{L}(-y, t_1 - s; -\partial_y, -\partial_s)$ である。 $\mathcal{L}$ が (i), (ii), (iii), (iv) (または (iv')) を満たすなら $\mathcal{L}$ は (i), (ii), (iii), (iv') (または (iv)), respectively を満たすことは容易に確かめられる。故に $(A_1), (A_2)$ を $\mathcal{L}$ に対して仮定すれば, 定理により コーシ-問題 (5') が, 従って backward コーシ-問題 (5) が $\gamma_{loc}^{(\alpha)}$, $1 < \alpha < 2$, で well-posed であることがわかる。

例 1 偏微分方程式 (E) で 特に $\delta = \partial_t$ の場合:

$$(6) \quad \partial_t^2 u - \partial_i a^{ij} \partial_j u - b^0 \partial_t u - b^i \partial_i u - cu = f,$$

$(x, t) \in \Omega = \mathbb{R}^n \times [0, h]$, $h > 0$, を考え, $a^{ij} = a^{ij}(x)$ (t に 依 存 しない) を仮定しよう。このとき (4) より明らかに, $b^{ij}(x, t) \equiv 0$ である。だからこの場合は, (A_1) を仮定すれば, (6) に対する コーシ-問題は $\gamma_{loc}^{(\alpha)}$, $1 < \alpha < 2$, で well-posed であることが定理よりわかる。 ($\because (A_2)$ は自動的に満たされる)。

例 2 $\mathbb{R}^1 \times [0, h]$, $h > 0$, で

$$(7) \quad \partial_t^2 u - \partial_x a \partial_x u - b^0 \partial_t u - b \partial_x u - cu = f$$

を考えよう。係数 $\in \gamma^{(\alpha)}$ とする。簡単のために次の 2 つの場合を考えよう。(i): $a(x, t) = \varphi(x) t^k$; $\varphi(x) \geq 0$, $k(z_0)$ は整

数, (0): $q(x, t) = \varphi(x)(h-t)^k$; $\varphi(x) \geq 0$, $k (\geq 0)$ は整数.

(1) の場合, 仮定 (A_2) の (iv) が満たされ, (0) の場合は (iv') が満たされることは明らかである. 故に (1), (0) いずれの場合も, (7) に対するコーシ-問題は $\gamma_{loc}^{(\alpha)}$, $1 < \alpha < 2$, で well-posed である.

証明の方針

まず, L^2 の意味での Gevrey 函数族 $\Gamma^{(\alpha)}$, $\Gamma^{(\alpha)}[0, h]$ を導入しておこう. $\varphi(x) \in \Gamma^{(\alpha)}$ とは, $\varphi(x) \in \mathcal{D}_2^\infty$ であり, かつ定数 ρ および C が存在して, 任意の p に対し $\|\partial_x^p \varphi(x)\| \leq (|p|!)^\alpha / \rho^{|p|} C$ を満たすことである. また $\varphi(x, t) \in \Gamma^{(\alpha)}[0, h]$ とは, $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}_2^\infty[0, h]$ であり, かつ定数 ρ, C が存在して, 任意の p, k に対し $\sup_{0 \leq t \leq h} \|\partial_x^p \partial_t^k \varphi(\cdot, t)\| \leq C(|p|+k)!^\alpha / \rho^{|p|+k}$ を満たすことである. ソボレフの lemma により, $\gamma_0^{(\alpha)} \subset \Gamma^{(\alpha)} \subset \gamma^{(\alpha)}$, および $\gamma_0^{(\alpha)}(\Omega) \subset \Gamma^{(\alpha)}[0, h] \subset \gamma^{(\alpha)}(\Omega)$ であることがわかる.

次の存在定理が証明される.

定理 (Ex). $(A_1), (A_2)$ を仮定し, $1 < \alpha < 2$ とする. すると任意の $f \in \Gamma^{(\alpha)}[0, h]$ および任意の初期データ $(u(x, 0), \partial_t u(x, 0)) \in \Gamma^{(\alpha)}$ に対し, 方程式 (E) の解 $u(x, t) \in \Gamma^{(\alpha)}[0, h]$ が存在する.

証明は逐次近似法による. $L_0 = \delta^2 - \partial_i a^{ij} \partial_j$, $M = b^i \partial_i + C$ とおけば, 方程式 (E) は

$$(E) \quad L_0[u] = f + M[u]$$

となる. $u_i(x, t)$, $i \geq 1$, を次のように定める:

$$(8) \quad \begin{cases} L_0[u_1] = f, & \text{初期データ } 0, \\ L_0[u_i] = M[u_{i-1}], & \text{初期データ } 0, \quad i \geq 2. \end{cases}$$

実際次々に定まることは, 次の定理 (Oleinik [6]) による: 「 $(A_1), (A_2)$ を仮定する (係数 $\in \mathbb{R}$ でよい). すると方程式

$$(9) \quad L_0[u] = f$$

に対するコーシー問題は $\mathcal{D}'_2$ -適切である。」 $\delta = \partial_t$ の場合, この定理は, Oleinik [6] の低階のない場合である. そうでない場合も, わずかな修正をすれば, [6] と同じ方針で証明される.

明らかに, $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x, t)$ は初期データ 0 の (E) の形式解を与えるから, 問題はその収束を吟味することにある. (A_2) の (iv) を仮定するか, (iv') を仮定するかにより, その手法は異なる. 簡単のために, (iv) が仮定される場合だけ考えよう.

逐次評価 $\kappa_{i, l+r}(t)$ を次式で定義する:

$$(10) \quad \kappa_{i, l+r}(t) = \frac{t^i}{i!} \frac{(l+r)!}{\rho^{l+r}} C e^{k\gamma(l+r+1)t} (1+\beta t)^{l+r+1},$$

ここで, i, l, r は整数を値 (≥ 0) にもつパラメーター, ρ と C はある定数, k, γ, β は適当に定められた定数である. また $\max_{|p|=l} \|\partial_x^p f(\cdot, t)\| = \|f(\cdot, t)\|_l$ と表わす. すると次の逐次評価がなりたつ:

「 (A_1) および (A_2) の (iv) を仮定する. ^($\alpha \geq 1$) すると, (9) の右辺 f が

$$(11) \quad \|f(\cdot, t)\|_l e^{\gamma(l+1)t} \leq \kappa_{i, l+r}(t)$$

を満たすならば, (9) の 0-initial data をもつ解 $u(x, t)$ は

$$(12) \quad \|u(\cdot, t)\|_l e^{\gamma(l+1)t} \leq K_1 \kappa_{i+2, l+r}(t)$$

を満たす. ここで K_1 は i, l, r に依存しないう定数である。」

さらに次のことが言える:

「 $u(x, t)$ が

$$(13) \quad \|u(\cdot, t)\|_l e^{\gamma(l+1)t} \leq \kappa_{i, l+r}(t)$$

を満たすならば, ($\alpha \geq 1$ ならば)

$$(14) \quad \|M[u](\cdot, t)\|_l e^{\gamma(l+1)t} \leq K_2 \kappa_{i, l+r+1}(t)$$

が従う. ここで $M = b^i \partial_i + c$, $b^i, c \in \gamma^{(\alpha)}(\Omega)$, K_2 は i, l, r によらないう定数である。」

上記の2つの逐次評価を用いれば, 形式解 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x, t)$ の

収束が確かめられる。

解の存在 方程式 (E) において, $f \in C^{(\alpha)}[0, R]$ だから
定数 ρ, C が存在して

$$(15) \quad \|\partial_x^p f(\cdot, t)\| \leq \frac{|p|!^\alpha}{\rho^{|p|}} C$$

を満たす。よって明らかに $\|\partial_x^p f(\cdot, t)\| e^{\gamma(l+1)t} \leq K_{0,l}(t)$, $l=|p|$.

上記の2つの逐次評価を交互に繰り返し用いれば,

$$(16) \quad \|u_i(\cdot, t)\|_l e^{\gamma(l+1)t} \leq K_2^{i-1} K_1^i K_{2i, l+i-1}(t)$$

が導かれる。故に

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|u_i(\cdot, t)\|_l \leq \sum_{i=1}^{\infty} K_2^{i-1} K_1^i K_{2i, l+i-1}(t).$$

$$\rho^{-1} e^{R\gamma h} (1+\beta h) = B_1, \quad K_2 K_1 B_1 = B_2, \quad K_1 C e^{R\gamma h} (1+\beta h) = B_3$$

とおけば

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \|u_i(\cdot, t)\|_l &\leq t^2 B_3 B_1^l \sum_{i=1}^{\infty} (B_2 t^2)^{i-1} \frac{(l+i-1)!^\alpha}{(2i)!} \\ &\leq t^2 B_3 (2^\alpha B_1)^l l!^\alpha \sum \left(\frac{2^\alpha}{4} B_2 t^2\right)^{i-1} (i-1)!^{\alpha-2}, \end{aligned}$$

が容易に確かめられる。故に $1 \leq \alpha < 2$ ならば, $0 \leq t \leq R$ で

右辺は一様収束するから, $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x, t) = u(x, t)$ とおけば,

$$(17) \quad \|u(\cdot, t)\|_l \leq \text{const.} (2^\alpha B_1)^l l!^\alpha t^2.$$

これで, $u(x, t)$ が x に関して α の Gevrey 函数であることもわかった. (x, t) の函数として, $u(x, t)$ が $\mathcal{P}^{(\alpha)}[0, h]$ に属することの証明は略す.

証明の 2-nd step は有限な依存領域の存在を示すことである. それが証明されれば, 1 の分割の手法により, $\gamma_{loc}^{(\alpha)}$ の解の存在が示される.

逐次評価の証明に関しては言及しなかったが, 論文 (Cauchy problem in Gevrey classes for non-strictly hyperbolic equations of second order, to appear) を参照されたい.

(終)

参考文献

- [1] Y. Ohya : Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristique multiple, J. Math. Soc. Japan 16 (1964), 268-286.
- [2] J. Leray and Y. Ohya : Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts, Colloque de Liège, (1964), C.N.R.B.
- [3] S. Steinberg : Existence and uniqueness of solutions of hyperbolic equations which are not necessarily

strictly hyperbolic, *J. Diff. Eq.*, 17 (1975), 119-153.

- [4] R. Beals : Hyperbolic equations and systems with multiple characteristics, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 48 (1972), 123-152.
- [5] V. Ja. Ivrii : Correctness of the Cauchy problem in Gevrey classes for non-strictly hyperbolic operators, *Math. USSR Sbornik*, 25 (1975), 365-387.
- [6] O.A. Oleinik : On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 (1970), 569-586.