

場の理論を統計力学に応用する 一つの試み

高 橋 康
Univ. of Alberta.
Edmonton, Canada

(5月7日受理)

§ 1. Introduction

場の理論を統計力学に応用しようという話は、今にはじまった事ではないが、今迄になされている事は、場の理論を使って、green 関数の方程式をみちびいたり、場の理論で用いられる Feynman diagramme を用いたりする事に限られている様である。然し green 関数の方法は、場の理論の中では、もっとも場の理論らしくない部分であって、本当に場の理論を統計力学や多体問題に応用しようと思ったら、もっと変換論をうまく使える様に定式化し直さなければならない。

然し、熱平衡系に変換論を使う事は仲々むつかしい。というのは、統計力学では、ある物理量 A の熱平衡に於ける平均値が、 $\exp(-\beta H)$ をかけてその trace をとるという具合に定式化されている。しかし、trace というオペレーションは、その計算に使う完全直交系のとり方に無関係であるので、変換の効果が出て来ない。この点は、trace オペレーションの強みでもあり、弱味でもあるわけである。

そこで、ある物理量の熱平衡に於ける平均値を、通常やられる様に、trace オペレーションで定義しないで、適当に定義した温度に依存する状態での期待値として定義する事を考えてみよう。その様な状態(これを以下簡単に、真空とよんでおく。)を定義すると、それから Fock space を構成する事により、場の理論でよく使われるいろいろな変換をしたり、有限温度に於ける bound states を議論したり、又、Goldstone theorem を model independent な方法で証明したりする事が可能になる。

以下話を次の順序で簡単に紹介する。

§ 2. Trace を expectation value で表現する事

§ 3. Examples

§ 4. 二三の公式

§ 5. Goldstone theorem

§ 6. Example

§ 2. Trace を expectation value であらわす事

ある物理量 A の熱平衡に於ける平均値は

$$\langle A \rangle = z^{-1}(\beta) \text{Tr} [e^{-\beta H} A] \quad (2.1)$$

で与えられる。ここで

$$z(\beta) = \text{Tr} [e^{-\beta H}]$$

であり、 H は Hamiltonian. ここではカノニカル集合を考えるが、グランドカノニカル集合の場合への拡張は容易であろう。我々は、そこで、温度（の逆数） β に depend するある状態 $|O(\beta)\rangle$ をてきとうに定義し、

$$\langle A \rangle = \langle O(\beta) | A | O(\beta) \rangle \quad (2.2)$$

となる様にしたい。どの様に $|O(\beta)\rangle$ を定義したらよいか。先づ、最も conservative な立場をとり、 $|O(\beta)\rangle$ が、 H を diagonal にする完全系 $|n\rangle$ で展開できたとしてみる。即ち

$$|O(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta) |n\rangle \quad (2.3)$$

但し、

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (2.4)$$

(2.3) を (2.2) に入れ、それが (2.1) と一致するという条件をおいてみると、

$$f_n^*(\beta) f_m(\beta) = z^{-1}(\beta) e^{-\beta E_n} \delta_{nm} \quad (2.5)$$

となり、これは、 $f_m(\beta)$ が普通の c -数である限り不可能である。然し、(2.5) は

いわば $f_n(\beta)$ の直交関係であるから、 $f_n(\beta)$ をベクトルとすれば、不可能な関係ではない。それで、(2.4) と全く同じスペクトラムを有する新しい operator $\tilde{H}$ を考えてみよう。即ち

$$\tilde{H} |\tilde{n}\rangle = E_n |\tilde{n}\rangle \quad (2.6)$$

そして、 $f_n(\beta)$ として

$$f_n(\beta) = |\tilde{n}\rangle z^{-1/2}(\beta) e^{-\beta E_n/2} \quad (2.7)$$

と identify してみる。すると明らかに (2.5) はみたされている。

$$\begin{aligned} f_n^*(\beta) f_m(\beta) &= \langle \tilde{n} | \tilde{m} \rangle z^{-1}(\beta) e^{-\beta(E_n + E_m)/2} \\ &= z^{-1}(\beta) e^{-\beta E_n} \delta_{nm} . \end{aligned}$$

従って、(2.7) を (2.3) に代入すると

$$|O(\beta)\rangle = z^{-1/2}(\beta) \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n\rangle |\tilde{n}\rangle \quad (2.8)$$

即ち、 $|O(\beta)\rangle$ は $|n\rangle$ と $|\tilde{n}\rangle$ の直積で展開する事が可能である。

ここでわかった事は、 $\langle A \rangle$ を expectation value で表現したいなら、もとの Hilbert 空間内にとどまっている限り、それは不可能である。しかしもとの Hilbert 空間と同じものをも一つ考え、その二つの Hilbert 空間の直積空間を考えると、それが可能になる。

この様な構造を理解するために、以下に例をあげよう。

§ 3. Examples

前節で導入した state vector $|O(\beta)\rangle$ の構造を理解するために、Hamiltonian

高橋 康

$$H = \omega a^+ a \quad (3.1)$$

及び変換関係

$$\{a, a^+\} = 1$$

$$\{a, a\} = 0$$

で記述される系を考える。この場合、state vector space は、真空

$$|0\rangle$$

と一粒子状態

$$a^+ |0\rangle$$

ではられ、普通の統計力学によると、熱平衡に於ける粒子数の平均値は、

$$\langle a^+ a \rangle = \frac{\text{Tr}(a^+ a e^{-\beta H})}{\text{Tr}(e^{-\beta H})} = \frac{e^{-\beta \omega}}{1 + e^{-\beta \omega}} \quad (3.2)$$

となる。一方、前節のやり方に従うと、先づH と同じ系

$$\tilde{H} = \omega \tilde{a}^+ \tilde{a}$$

$$\{\tilde{a}, \tilde{a}^+\} = 1$$

$$\{\tilde{a}, \tilde{a}\} = 0$$

を導入し、この系の state vectors $|\tilde{0}\rangle$ 及び $\tilde{a}^+ |\tilde{0}\rangle$ と前の state vectors との直積 vector

$$|0, \tilde{0}\rangle, a^+ |0, \tilde{0}\rangle, \tilde{a}^+ |0, \tilde{0}\rangle, a^+ \tilde{a}^+ |0, \tilde{0}\rangle$$

ではられる空間を考える。定義(2.8)により、

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\beta\omega}}} (1 + e^{-\beta\omega/2} a^+ \tilde{a}^+) |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.3)$$

となるから,

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | a^+ a | 0(\beta) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega}}{1 + e^{-\beta\omega}} \langle 0, \tilde{0} | \tilde{a} a a^+ a a^+ \tilde{a}^+ | 0, \tilde{0} \rangle \\ &= \frac{e^{-\beta\omega}}{1 + e^{-\beta\omega}} \end{aligned}$$

を得る。これは正に (3.2) に一致するから

$$\langle 0(\beta) | a^+ a | 0(\beta) \rangle = \langle a^+ a \rangle \quad (3.4)$$

となる。

(3.3) をながめると

$$u(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\beta\omega}}} \quad (3.5)$$

$$v(\beta) = \sqrt{\frac{e^{-\beta\omega}}{1+e^{-\beta\omega}}}$$

とおいた時,

$$|0(\beta)\rangle = (u(\beta) + v(\beta) a^+ \tilde{a}^+) |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.6)$$

と書ける。但し

$$u^2(\beta) + v^2(\beta) = 1 \quad (3.7)$$

即ち、もとの真空 $|0, \tilde{0}\rangle$ と $|0(\beta)\rangle$ とは、Bogoliubov 変換でむすばれている事がわかる。今、

$$G_F \equiv -i \cos^{-1} u(\beta) (\tilde{a} a - a^+ \tilde{a}^+) \quad (3.8)$$

とおくと、

$$|0(\beta)\rangle = e^{-i G_F} |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.9)$$

となる。従って $|0(\beta)\rangle$ に対応して次の operator を導入するのが便利である。

$$\begin{aligned} a(\beta) &= e^{-i G_F} a e^{i G_F} = u(\beta) a - v(\beta) \tilde{a}^+, \\ \tilde{a}(\beta) &= e^{-i G_F} \tilde{a} e^{i G_F} = u(\beta) \tilde{a} + v(\beta) a^+. \end{aligned} \quad (3.10)$$

これに従うと

$$\begin{aligned} a(\beta) |0(\beta)\rangle &= e^{-i G_F} a |0, \tilde{0}\rangle = 0 \\ \tilde{a}(\beta) |0(\beta)\rangle &= e^{-i G_F} \tilde{a} |0, \tilde{0}\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

となり、状態 $|0(\beta)\rangle$ は、この意味で、新しい温度に依存する operator $a(\beta)$ と $\tilde{a}(\beta)$ の“真空”と呼んでよい量である。

変換 (3.10) はカノニカルだから、この変換によって新しい真空と、温度に依存する operator とによって、新しい Fock space を作る事が出来る。それは

$$|0(\beta)\rangle, \quad a^+(\beta) |0(\beta)\rangle, \quad \tilde{a}^+(\beta) |0(\beta)\rangle, \quad a^+(\beta) \tilde{a}^+(\beta) |0(\beta)\rangle$$

である。

以上 Fermion を考えたが、Boson に対しても全く平行に議論をすすめる事が出来

る。結果だけを書くと、

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{u(\beta)} \exp\left(\frac{v(\beta)}{u(\beta)} a^+ \tilde{a}^+\right) |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.12)$$

但し

$$u(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} \quad (3.13)$$

$$v(\beta) = \frac{1}{\sqrt{e^{\beta\omega} - 1}}$$

で

$$u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1 \quad (3.14)$$

をみたす。従ってこの場合にも、Bogoliubov 変換を

$$G_B = -i \cosh^{-1} u(\beta) (\tilde{a} a - a^+ \tilde{a}^+) \quad (3.15)$$

によって generate する事が出来、

$$|0(\beta)\rangle = e^{-i G_B} |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.16)$$

となる。

$$\begin{aligned} a(\beta) &= e^{-i G_B} a e^{i G_B} = u(\beta) a - v(\beta) \tilde{a}^+ \\ \tilde{a}(\beta) &= e^{-i G_B} \tilde{a} e^{i G_B} = u(\beta) \tilde{a} - v(\beta) a^+ \end{aligned} \quad (3.17)$$

なる operator を定義して、 $|0(\beta)\rangle$ と $a^+(\beta)$, $\tilde{a}^+(\beta)$ から Fock space を作る事が出来る。

§ 4. 二三の公式

以上をもつと複雑な場合に拡張する事は容易であろう。Free な場なら、例によって Fourier 展開すると § 3 の場合 a や $\tilde{a}$ に $|abe|$ をつけて和をとっておけばよい。この稿では、その様な事を explicit に行ったり、実際計算をやって見せたりしないが実際計算をやる時に必要な二三の公式をかかげておこう。

今、二つの operator $A(t)$ と $B(t')$ を考え、それらの積を $|0(\beta)\rangle$ ではさむと

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | A(t) B(t') | 0(\beta) \rangle \\ = \langle 0(\beta) | B(t') A(t+i\beta) | 0(\beta) \rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

を証明する事が出来る。この関係は通常 trace を定義を用いて証明されるが、我々の formalism では、 $|0(\beta)\rangle$ の定義及び波のついた系とつかない系とが全く同じスペクトラムをもつ事を用いて証明される。(証明は、間もなく出る preprint をみられたい。)

又、 $|0(\beta)\rangle$ の定義により

$$(H - \tilde{H}) | 0(\beta) \rangle = 0 \quad (4.2)$$

が成立つ。運動量 operator についても

$$(\vec{p} - \vec{\tilde{p}}) | 0(\beta) \rangle = 0 \quad (4.3)$$

が成立つ。これらは、実際計算に便利な関係である。例えば、

$$\begin{aligned} A(t) | 0(\beta) \rangle &= e^{iHt} A(0) e^{-iHt} | 0(\beta) \rangle \\ &= e^{iHt} A(0) e^{-i\tilde{H}t} | 0(\beta) \rangle \\ &= e^{i(H-\tilde{H})t} A(0) | 0(\beta) \rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

という様な事が出来る。ここで、波のついた operator と、つかない operator は変換する（反変換する）事を用いて $\tilde{H}$ を $A(0)$ の左にもっていった。

以上で、熱平衡に於ける物理量の平均値を温度 dependent な真空の期待値としてあらわす道具だてが出来た事になるが、はじめにも言った様に、この Formalism では、物理量の真空期待値をとって、話を green 函数の間の関係にひき直す以上の事が出来る。例えば、有限温度に於ける Bound state の問題を、場の理論における Bethe - salpeter の立場から議論する事が可能になる。この点は、最後に goldstone theorem の例として discuss する事にしよう。

§5. goldstone theorem

次に、我々の formalism を用いて、統計力学に於ける Goldstone の定理を考えてみよう。通常の trace による統計力学では、trace operation が、representation independent であるために、場の理論での Goldstone の定理の証明がそのまま用いられない。（この点、岩波現代物理学の基礎、物性Ⅱの中嶋氏の議論を参照されたい。）しかし、我々の formalism では、場の理論に於ける証明がそのまま成立つにちがいない。

場の理論では、ある dynamical variable F は、Heisenberg の運動方程式

$$i \dot{F} = [F, H] \quad (5.1)$$

をみたしている。従って、 F が時間に依存しないなら

$$[F, H] = 0 \quad (5.2)$$

であり、 H が operation $e^{i\alpha F}$ に対して不変である：

$$e^{-i\alpha F} H e^{i\alpha F} = H' = H \quad (5.3)$$

この場合、 H を H' に変換する generator は F である。generator F は、任意の場の量、例えば、 $\phi(x)$ を $\phi'(x)$ に変換する。即ち、

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= e^{-i\alpha F} \phi(x) e^{i\alpha F} \\
&= \phi(x) + i\alpha [\phi(x), F] + O(\alpha^2)
\end{aligned}
\tag{5.4}$$

だから、 α を無限小とすると

$$\alpha [\phi(x), F] = -i(\phi'(x) - \phi(x)). \tag{5.5}$$

任意の変換を考えた時、(その変換のパラメーターが α)、場の量 $\phi(x)$ のうける変換が(5.5)であらわされるわけである。例えば、空間的推進変換

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x} + \underline{\alpha}$$

に対し、generator F は、total momentum $\underline{P}$ であり

$$\phi'(x) - \phi(x) = \underline{\alpha} \underline{\nabla} \phi(x)$$

即ち

$$[\phi(x), \underline{P}] = -i \underline{\nabla} \phi(x)$$

をうる。

さて、一般の方程式(5.5)にもどり、その熱平衡に於ける平均値を考えてみよう。

$$\alpha \langle 0(\beta) | [\phi(x), F] | 0(\beta) \rangle = -i \langle 0(\beta) | \phi'(x) - \phi(x) | 0(\beta) \rangle \tag{5.6}$$

仮にある特定の operator $\phi(x)$ につき、(5.6)の右辺が $\beta > \beta_c$ で0にならなかったとしよう。その時、真空 $|0(\beta)\rangle$ は、考えている変換の generator F の固有 vector ではありえない。なぜなら、仮にそうだとすると、(5.6)の右辺は

$$\begin{aligned}
\alpha \langle 0(\beta) | [\phi(x), F] | 0(\beta) \rangle &= \alpha (f - f) \langle 0(\beta) | \phi(x) | 0(\beta) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

となってしまふからである。ここで

$$F | 0(\beta) \rangle = f | 0(\beta) \rangle$$

とした。

(5.6)の右辺が $\beta > \beta_c$ で0でない様な時, **wave vector** を0にしたとき, **frequency** が0になる様な **mode** が存在する。(wave vector が結晶の reciprocal lattice vector に一致したとき, frequency が0になる mode が存在する。)これが, いわゆる goldstone の定理だが, その証明を, 場の理論と同じ様にやると, 次の様になる。

先づ generator F が, それに対応する density を空間積分したものであらわされる事に着目する:

$$F = \int d^3x F_0(\underline{x}, t) \quad (5.7)$$

又は, lattice を考える場合には

$$F = \sum_{\underline{l}} F_0(\underline{x}_{\underline{l}}, t) \quad (5.7)'$$

$$\underline{x}_{\underline{l}} = \underline{a} \ell_1 + \underline{b} \ell_2 + \underline{c} \ell_3$$

で, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ は, lattice vector である。理論が上のオペレーションに対して不変であり, 且つ, long range force がなくて物質が localize されていると, 良くしられている様に,

$$\dot{F} = 0 \quad (5.8)$$

を証明する事が出来る。goldstone の定理の証明には, 先づ

$$\begin{aligned} & \langle 0(\beta) | [\phi(x), F_0(\underline{x}', t)] | 0(\beta) \rangle \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d\underline{p} dp_0 e^{i\underline{p}(\underline{x}-\underline{x}')} I(\underline{p}_0, \underline{p}) (1 - e^{-\beta p_0}) e^{-i p_0(t-t')} \end{aligned} \quad (5.9)$$

と Fourier 変換し, (5.6) と比較するために (5.9) を空間積分すると

$$\begin{aligned} & \langle 0(\beta) | [\phi(x), F] | 0(\beta) \rangle \\ &= \frac{i}{2\pi} \int dp_0 \, d\underline{p} \, e^{\underline{i p x}} \delta(\underline{p}) I(p_0, \underline{p}) (1 - e^{-\beta p_0}) e^{-i p_0(t-t')} \\ &\neq 0 \quad \text{for } \beta > \beta_c. \end{aligned}$$

ここで F が time independent の条件 (5.8) を用いると

$$p_0 I(p_0, \underline{0}) (1 - e^{-\beta p_0}) = 0$$

即ち

$$\bullet I(p_0, \underline{0}) (1 - e^{-\beta p_0}) = a(\beta) \delta(p_0)$$

又は

$$I(p_0, \underline{k}) (1 - e^{-\beta p_0}) = a(\beta) \delta(p_0)$$

仮定により

$$a(\beta) \neq 0 \quad \text{for } \beta > \beta_c$$

だから, 結局

$$\begin{aligned} I(p_0, \underline{p} + \underline{k}) (1 - e^{-\beta p_0}) &= a_1(\beta, \underline{p} + \underline{k}) \delta(p_0) \\ &+ a_2(\beta, \underline{p} + \underline{k}) \delta(p_0 - E_{\underline{p}}) \\ &+ a_3(\beta, \underline{p} + \underline{k}) \delta(p_0, \underline{p}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

但し

$$a(\beta) = a_1(\beta, \underline{k}) + a_2(\beta, \underline{k}) + a_3(\beta, \underline{k}) \neq 0 \quad (\beta > \beta_c) \quad (5.11)$$

$$\lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{k}} E_{\underline{p}} = 0$$

$$\lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{k}} A(\underline{p}_0, \underline{p}) = \delta(\underline{p}_0)$$

式(5.10)によると、 a_3 は energy gap のない不安定な粒子、 a_2 は、energy gap のない安定な粒子、 a_1 は、wave vector によらず $\underline{p}_0 = 0$ なる mode の存在を示すが、(5.11)により、これらが全部消えてしまう事はない。これが Goldstone の定理である。言うまでもなく、仮に、long range force が存在すると(5.8)が成立たなくなるから、上の証明があてはまらなくなる。

上の様な non-relativistic な議論では、Goldstone boson (energy gap のない粒子)は必ずしも spin が 0 のものである必要はない。(phonon!)

ここで見た様に、 $I(\underline{p}_0, \underline{p} + \underline{k})(1 - e^{-\beta \underline{p}_0})$ という量は、この場合 singular であるので、trace に関する identity が成立たず、これが、trace formulation で Goldstone theorem の証明が出来なかった理由である。

ここに出て来た量 $a(\beta, \underline{p} + \underline{k})$ は、order parameter であり、それが 0 でないという事が、Goldstone boson の存在を保証している。

§ 6. Example

前節の Goldstone theorem を具体的に理解するために、superconductivity の Gorkov 理論を、我々の立場から、ながめ直してみよう。

先づ Beshe-Salpeter の wave function を

$$\langle 0(\beta) | T(\psi_{\uparrow}(\underline{x}, t) \psi_{\downarrow}(\underline{x}', t')) B_q^+(\beta) | 0(\beta) \rangle$$

で定義する。 $B_q^+(\beta)$ は、bound state の creation operator である。(4.4)の処方を用いると、これは内部運動と外部運動に分離できて

$$\begin{aligned} & \langle 0(\beta) | T(\psi_{\uparrow}(\underline{x}, t), \psi_{\downarrow}(\underline{x}', t')) B_q^+(\beta) | 0(\beta) \rangle \\ & \equiv x_q(\underline{x} - \underline{x}', t - t') e^{i \underline{q}(\underline{x} + \underline{x}')/2} e^{-i \underline{q}_0(t + t')/2} \end{aligned} \quad (6.1)$$

となる。chain 近似に於ける $\chi_q(\underline{x}-\underline{x}', t-t')$ は、方程式

$$\begin{aligned} & \left[i \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{q_0}{2} - \epsilon \left(-(\underline{\nabla} + \frac{i}{2} \underline{q})^2 \right) \right] \left[i \frac{\partial}{\partial t'} - i \frac{q_0}{2} - \epsilon \left(-(\underline{\nabla}' + \frac{i}{2} \underline{q})^2 \right) \right] \\ & \times \chi_q(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = g \chi_q(\underline{0}, 0) \delta(\underline{x}-\underline{x}') \delta(t-t') \end{aligned} \quad (6.2)$$

を満たす。但し ϵ は、energy gap を含んだ電子のエネルギーで、その gap Δ は、

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{g}{(2\pi)^3} \int d\underline{p} \frac{1}{2 \epsilon(\underline{p}^2)} \frac{1 - e^{\beta \epsilon}}{1 + e^{\beta \epsilon}} \quad (6.3) \\ \epsilon(\underline{p}^2) &= \sqrt{\frac{1}{2m} \underline{p}^2 - \zeta + \Delta^2}, \end{aligned}$$

により定まる。(6.2) を積分すると、Bethe-Salpeter wave function $\chi_q(\underline{0}, 0)$ のみたす式として

$$[1 - Q(\underline{q}, q_0, \beta)] \chi_q(\underline{0}, 0) = 0 \quad (6.4)$$

をうる。但し

$$\begin{aligned} Q(\underline{q}, q_0, \beta) &= -\frac{g}{(2\pi)^3} \int d\underline{p} \left[\frac{1}{1 + e^{\beta(-\frac{q_0}{2} + \epsilon_+)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(-\frac{q_0}{2} - \epsilon_-)}} \right] \\ &\quad \times \frac{1}{\epsilon_- + \epsilon_+} \end{aligned}$$

with

$$\epsilon_{\pm} = \epsilon\left(\left(\underline{p} \pm \frac{1}{2} \underline{q}\right)^2\right)$$

式(6.4)によると、Bethe-Salpeter wave function が 0 でないのは

$$[1 - Q(\underline{q}, q_0, \beta)] = 0 \quad (6.5)$$

にかぎられる。これが bound state の energy q_0 を q の関数として与えるが、この q_0 が $q \rightarrow 0$ で消えてしまう事は、(6.3) から明らかである。即ち、(6.5) に於いて $q \rightarrow 0$, $q_0 \rightarrow 0$ とすると、それは(6.3)に帰するからである。斯くて、われわれは、Goldstone boson が spin $\uparrow$ と $\downarrow$ の電子の bound state である事を chain 近似でたしかめた事になる。

Goldstone の定理の一般論にあらわれた変換関係(5.6)は、この場合

$$\langle 0(\beta) | [\psi_{\uparrow}(x), \psi_{\downarrow}(x), F] | 0(\beta) \rangle = -i \langle 0(\beta) | \psi_{\uparrow}(x) \psi_{\downarrow}(x) | 0(\beta) \rangle \quad (6.6)$$

$$F = \int dx' \{ \psi_{\uparrow}^+(x') \psi_{\uparrow}(x') + \psi_{\downarrow}^+(x') \psi_{\downarrow}(x') \}$$

であり、(6.6)の右辺が、order parameter になっている。

§7. おわりに

以上、温度 dependent な真空 $|0(\beta)\rangle$ を定義し、それから、温度 dependent な場の量を用いて Fock space を作ると、統計力学を、場の理論とよく似た形に定式化出来る事を示した。真空期待値を問題にしている限り、今までの統計力学のやり方とあまりちがわないが、それでも、Goldstone 定理の証明などには、trace operation よりずっと便利である。物理量の non diagonal element (例えば Bethe-Salpeter wave function) を問題にする時は、勿論、今迄の trace のやり方では出来ない事が出来る様になる。

場の理論と平行に統計力学を定式化すると、場の理論に使われた種々の変換論が使い易くなる利点がある。例えば、場の理論に於ける reduction formula を用いると、linear response theory の導出は簡単である。Bloch-Nordsieck 変換や Tani-Foldy 変換も使ってみたいが、今のところまだやっていない。

最後に一つ注意しておき度いのは、場を扱う場合、体系の積積 V を無限にしてやると、相異った温度に於ける Fock space の vector が直交してしまう事である。即ち、相異なる温度の vector は、Bogoliubov 変換でむすばれるが、Bogoliubov 変換は、 V

高橋 康

$\rightarrow \infty$ で、カノニカルであるが、ユニタリーでなくなり、いわゆる inequivalent 表示の問題がおこる。この事は、元来、異った温度の系というものは、物理的に equivalent でない事を考えると不思議な事ではないかもしれない。

この仕事は、Milwaukee の H. Umezawa 氏との協同で行なわれた事を付記したい。
又、引用は一切割愛した。