

3次元ユークリッド空間における isosceles 8-point set の分類

九州大学大学院数理学府 城戸 浩章 (Hiroaki Kido)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

1 導入

$\mathbb{R}^k$ を k 次元ユークリッド空間とする。

$x, y \in \mathbb{R}^k$ を $x = (x_1, x_2, \dots, x_k), y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ とするとき、 x と y の距離を $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2}$ で定める。

Definition

有限集合 $X \subset \mathbb{R}^k$ に対して、

$$A(X) = \{d(x, y) | x, y \in X, x \neq y\}$$

とおく。

このとき、 $|A(X)| = s$ であるならば、 X を $\mathbb{R}^k$ における s -distance set と呼ぶ。

また、2つの s -distance set が互いに相似である場合は同型であるということにする。

2-distance set の点の個数の最大値は、 $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ (Kelly [7]), $\mathbb{R}^3$ (Croft [4]) の場合に知られていた。さらに、 $\mathbb{R}^k, k \leq 8$ の場合は Lisoněk [9] によって与えられ、次のページの表 1 のような結果が得られている。(坂内-坂内 [1] より抜粋)

また、 $|X| \geq k+2$ であるならば、 $\mathbb{R}^k$ における 2-distance set となる X は有限個であることが Einhorn-Schoenberg [5] により示された。

しかし、一般の s -distance set については、E.Bannai-E.Bannai-D.Stanton [2] や A.Blokhuis [3] によって与えられた $|X| \leq \binom{k+s}{s}$ という上限や、 $|X| \geq 5$ ならば、 $\mathbb{R}^2$ における 3-distance set X は有限個で、 $\mathbb{R}^2$ における 3-distance set の点の個数の最大値は 7 である (Shinohara [10]) ということが知られているが、それ以外のことはほとんど知られていないので、 $\mathbb{R}^3$ における 3-distance set の個数が (同型を除いて) 有限個になるのは点の個数がいくつのときか? という問題や、 $\mathbb{R}^3$ における 3-distance set の点の個数の最大値はいくつになるのか? という問題について考えたい。

前者の問題について、その答えを a とすると、 a は $7 \leq a \leq \binom{3+3}{3} = 20$ の範囲にあることが知られている。また、後者の問題については、その答えを b とすると、 b は $12 \leq b \leq \binom{3+3}{3} = 20$ の範囲にあることが知られている。本講究録では、前者の問題の答えの範囲を狭める足がかりとして、また、 $\mathbb{R}^3$ における 8 点からなる 3-distance set を分類

k	$\binom{k+2}{2}$	2-distance set の 点の個数の最大値	最大値を与える 2-distance set の個数
1	3	3	1
2	6	5	1
3	10	6	6
4	15	10	1
5	21	16	1
6	28	27	1
7	36	29	1
8	45	45	≥ 1

表 1: 2-distance set の点の個数の最大値

するための足がかりとして、さらに強い条件をつけた isosceles 8-point 3-distance set について述べる。

2 定義と知られている事実について

Definition

$\mathbb{R}^k$ において、 n 個の点からなる集合を考える。

この集合の任意の 3 点が 2 等辺 3 角形をなしているとき (同一直線上の 3 点も許す)、この集合は $P(n)$ -set であるという。

さらに、この集合が s -distance set であるときは、isosceles n -point s -distance set と呼ぶことにする。

次に、この $P(n)$ -set や 2-distance set について知られていることをまとめておく。(2-distance set については、表 1 の $k=3$ の部分を抜粋したものである。)

- $\mathbb{R}^3$ における $P(9)$ -set は存在しない。(Croft [4])
- $\mathbb{R}^2$ における $P(7)$ -set は存在しない。(Kelly [7])
- $\mathbb{R}^2$ における $P(6)$ -set は、正 5 角形とその中心の 6 点からなる集合に限る。(Kelly [7])
- $\mathbb{R}^3$ における 7 点からなる 2-distance set は存在しない。
(Croft [4], Einhorn-Schoenberg [6])
- $\mathbb{R}^3$ における 6 点からなる 2-distance set で非同型なものは 6 つしかない。(Einhorn-Schoenberg [6])

本講究録では、 $\mathbb{R}^3$ における $P(8)$ -set の存在について述べる。

$P(8)$ -set については、下の図1で示されたもの(中心から各頂点までの長さが a である正五角形を底面とする、高さが a の正五角錐を2つ用意し、正五角形の面で2つをくっつけると7点からなる立体になり、この7点に、くっつけた正五角形の中心を加えた8点。これは 5-distance set になっている。)の存在は知られているのであるが、“これ以外に $P(8)$ -set は存在するのか?” という問題や、図1で示されたもの以外に $P(8)$ -set が存在した場合には、“さらに、3-distance set となっているもの(つまり、isosceles 8-point 3-distance set)は存在するのか?” という問題が現れてくる。

本講究録において示したいことは次の定理である。

Theorem 1

$\mathbb{R}^3$ における $P(8)$ -set は、図1で表された8点からなる集合以外に存在しない。

これが示されると、次のことも分かる。

Corollary 1

$\mathbb{R}^3$ における isosceles 8-point 3-distance set は存在しない。

この Theorem 1 の証明を Croft [4] の手法を用いて §4 以降で述べる。

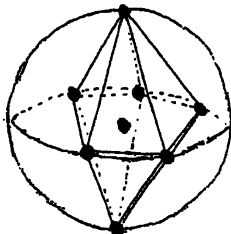


図1

3 表記について

次の3つの言葉を導入する。(apexについてはこの section で、tetrad, pentad については §6 で触れる。)

tetrad : 半球面における4点からなる集合

pentad : 半球面における5点からなる集合

apex : 3点以上からなる集合において、残りすべての点から等距離の位置にある点

また、Lemma 18 で、“ $\mathbb{R}^3$ における $P(8)$ -set の8点を配置することは不可能、もしくは4点が同一円周上にある時に限り可能である”ことが分かる。

後者を “conclusion (X)” と呼ぶことにする。

さらに、 $P_1, \dots, P_n$ が $P(n)$ -set であるとする。

このとき、点 P_i の “vertex-number” $V(P_i)$ を、

$V(P_i) := (P_i$ を含む3点からなる部分集合をすべて考え、そのうち、 P_i が apex となっているものの数)

$= (\angle P_i$ を頂角とする2等辺3角形の個数)

で定義する。

注意： $\triangle P_i P_j P_k$ が正3角形の場合は、 P_i, P_j, P_k のいずれも apex であるから、 $V(P_1) + \dots + V(P_n) > \binom{n}{3}$ が成り立つ。

したがって、一般に、 $V(P_1) + \dots + V(P_n) \geq \binom{n}{3}$ が成り立つ。

また、点 P_i から残りの点との距離を考える。距離 a となる点が r 個、距離 b となる点が s 個、 $\dots$ 、距離 l となる点が u 個あったとき ($a, b, \dots, l$ は互いに異なり、 $r \geq s \geq \dots \geq u$ とする。また、 $r + s + \dots + u = n - 1$)、点 P_i は $\text{type}(r, s, \dots, u)$ の点であるということにする。

4 基本となる補題

Lemma 1

$P(8)$ -set の配置は次の3つのいずれかになる。

- (i) 2つの同心球面があつて、そのうちの1つの球面上に4点配置され、もう1つの球面上に2点もしくは3点配置されている。同心球面の中心も $P(8)$ -set の1点。
- (ii) 1つの球面上に5点もしくは6点配置されている。球面の中心も $P(8)$ -set の1点。
- (iii) 1つの球面上に7点配置され、残りの1点は球面の中心。

以後 (i) は 4-2, 4-3 configurations、(ii) は 5-, 6-configurations、(iii) は 7-configuration で表す。

Proof

$P(8)$ -set の 8 点を $P_1, \dots, P_8$ とする。

8 点集合には $\binom{8}{3} = 56$ 個の 3 角形があるので、§3 の注意より、 $V(P) \geq 7$ となる点 P が存在する。この P が P_1 であるとする。

また、 $T(m)$ を $T(m) = \frac{1}{2}m(m-1)$ で定義する。

($T(1) = 0, T(2) = 1, T(3) = 3, T(4) = 6, T(5) = 10, \dots$)

点 P_1 から残りの点との距離を考え、距離 a となる点が r 個、距離 b となる点が s 個、 $\dots$ 、距離 l となる点が u 個あったとき ($a, b, \dots, l$ は互いに異なり、 $r \geq s \geq \dots \geq u$ とする。)、つまり、点 P_1 は $\text{type}(r, s, \dots, u)$ の点であるならば、

$V(P_1) = T(r) + T(s) + \dots + T(u)$ が成り立つ。

(なぜならば、 $T(r)$ は、2 辺が長さ a で、そのはさむ角が $\angle P_1$ となる 2 等辺 3 角形の個数、 $T(s)$ は、2 辺が長さ b で、そのはさむ角が $\angle P_1$ となる 2 等辺 3 角形の個数、 $\dots$ 、 $T(u)$ は、2 辺が長さ l で、そのはさむ角が $\angle P_1$ となる 2 等辺 3 角形の個数となるので、これらを加えたものは $V(P_1)$ に一致しなければならない。)

したがって、

$$T(r) + T(s) + \dots + T(u) \geq 7 \quad (1)$$

が成り立ち、また、

$$r + s + \dots + u = 7 \quad (2)$$

も成り立つ。

$T(m)$ の値を考えると、(1),(2) を同時に満たすのは、次の場合に限られる。

- (i) P_1 は $\text{type}(4, 2, 1)$ もしくは $\text{type}(4, 3)$ 。
- (ii) P_1 は $\text{type}(5, 2)$, $\text{type}(5, 1, 1)$, もしくは $\text{type}(6, 1)$ 。
- (iii) P_1 は $\text{type}(7)$ 。

この (i)~(iii) は Lemma 1 の (i)~(iii) に対応している。 ■

$P(8)$ -set の 7 点からなる部分集合が $P(7)$ -set であることに注目することがあるので、次の Lemma を述べておく。

Lemma 2

$P(7)$ -set の配置は次の 5 つのいずれかになる。

- (i) 2 つの同心球面に 3 点ずつ配置され、残りの 1 点は同心球面の中心。
- (ii) 2 つの同心球面があつて、そのうちの 1 つの球面上に 4 点配置され、もう 1 つの球面上に 2 点配置されている。残りの 1 点は同心球面の中心。
- (iii) 1 つの球面上に 4 点配置されている。球面の中心も $P(7)$ -set の 1 点。但し、(ii) は満たさない。
- (iv) 1 つの球面上に 5 点配置されている。球面の中心も $P(7)$ -set の 1 点。
- (v) 1 つの球面上に 6 点配置され、残りの 1 点は球面の中心。

Proof

Lemma 1 と同じようにして示せるので省略する。 ■

また、3 点が同一直線上に並ぶ場合についての考察もしておく。(証明は、Croft [4] の Lemma 6 と同じであるので省略する。)

Lemma 3 (Croft)

$P(8)$ -set の 3 点 P_1, P_2, P_3 がこの順に同一直線上にあるならば、残りの 5 点はすべて P_1P_3 の垂直二等分線が作る平面上の 1 つの円 (正確に言うと、 P_2 を中心とする、半径 P_1P_2 の円) の円周上にある。したがって、conclusion (X) が成り立つ。 ■

5 4-2, 4-3 configurations の場合

この section では、Lemma 1 の (i) を満たす $P(8)$ -set の点 $P_1, \dots, P_8$ の配置について考える。

この section において、 P_1 は 2 つの同心球面 S_1, S_2 の中心であるとする。 S_1 上には $P_2, \dots, P_5$ があり、 S_2 上には P_6, P_7 (4-3 configuration のときは P_8 も) があるものとし、また、 R_1 を S_1 の半径、 R_2 を S_2 の半径とする。

Lemma 4

4-2 or 4-3 configuration $P(8)$ -set の 7 点 $P_1, \dots, P_7$ について、次のいずれかが成り立つ。

- (i) conclusion (X) が成り立つ。
- (ii) S_1 上の 4 点における異なる 2 点間の距離に、 R_1, R_2 以外のものが存在する。
- (iii) 任意の 2 点間の距離が R_1 もしくは R_2 である。

Proof

(ii) も (iii) も成り立たなければ (i) が成り立つことを示せばよい。

(iii) が成り立たないとする、 $P_1, \dots, P_7$ の 2 点間の距離に R_1, R_2 以外のものが存在する。これを c とする。さらに、(ii) も成り立たないときは、この c は、 S_1 上の 4 点における異なる 2 点間の距離にはならない。

$P_1P_i = R_1$ or R_2 ($i = 2, \dots, 7$) であるから、 P_1 を除く 6 点のうちの 2 点間の距離に c となるものが存在する。

$P_2P_6 = c$ ならば、 $\triangle P_1P_2P_6$ の 3 つの辺の長さが R_1, R_2, c となるので、2 等辺 3 角形ではない。

したがって、次のことが分かる。

S_1 上にある点と S_2 上にある点との距離は、 R_1 もしくは R_2 である。 (3)

また、距離 c は、 S_2 上の 2 点間の距離として存在することから、 $P_6P_7 = c$ としてよい。

このとき、 $\triangle P_2P_6P_7$ を考えると、(3) より、 P_2P_6, P_2P_7 は R_1 もしくは R_2 であるから、2 等辺 3 角形となるためには、 $P_2P_6 = P_2P_7$ とならなければならない。

同様に、 $\triangle P_3P_6P_7, \triangle P_4P_6P_7, \triangle P_5P_6P_7$ を考えると、 $P_3P_6 = P_3P_7, P_4P_6 = P_4P_7, P_5P_6 = P_5P_7$ が成り立たなければならない。

ゆえに、 $P_2, \dots, P_5$ は P_6P_7 の垂直二等分線の作る平面にあり、かつ S_1 上にあるので、この4点 $P_2, \dots, P_5$ は同一円周上にある。

したがって、conclusion (X)が成り立つ。 ■

Lemma 5

Lemma 4の(iii)を満たすようなP(8)-setは存在しない。

Proof

Lemma 4の(iii)を満たすとき、 $P_1, \dots, P_7$ からなる集合は、isosceles 7-point 2-distance setである。

しかし、§2でも挙げたが、7点からなる2-distance setは存在しないので、Lemma 4の(iii)を満たすようなP(8)-setは存在しない。 ■

したがって、Lemma 4は次のように書き換えられる。

Lemma 6

4-2 or 4-3 configuration P(8)-setの7点 $P_1, \dots, P_7$ について、次のいずれかが成り立つ。

(i) conclusion (X)が成り立つ。

(ii) S_1 上の4点における異なる2点間の距離に、 R_1, R_2 以外のものが存在する。 ■

Lemma 7

Lemma 4の(ii)を満たす4-2 or 4-3 configuration P(8)-setを考える。

このとき、 S_1 上の4点においては、異なる2点の組は $\binom{4}{2} = 6$ 組存在するが、6組のうち高々4組に入っている距離が R_1 もしくは R_2 ならば(つまり、 R_1 と R_2 以外の距離が2組以上に入っているならば)、conclusion (X)が成り立つ。

Proof

$P_2P_3 = c, P_4P_5 = d$ とする。($c \neq R_1, c \neq R_2, d \neq R_1, d \neq R_2$ であるが、 $c = d$ であつてもよい。))

このとき、 $P_2P_6, P_3P_6, P_4P_6, P_5P_6$ はいずれも R_1 もしくは R_2 であつたから、 $\triangle P_2P_3P_6, \triangle P_4P_5P_6$ が2等辺3角形となるためには、 $P_2P_6 = P_3P_6$ かつ $P_4P_6 = P_5P_6$ が成り立たなければならない。

同様に、 $P_2P_7 = P_3P_7$ かつ $P_4P_7 = P_5P_7$ も成り立たなければならない。

このことから、 P_6, P_7 は P_2P_3 の垂直二等分線の作る平面と P_4P_5 の垂直二等分線の作る平面の共有部分にある。

P_2P_3 の垂直二等分線の作る平面と P_4P_5 の垂直二等分線の作る平面の共有部分については、次の2つの場合がある。

(i) 2つの平面が同一であるため、共有部分は平面。

(ii) 1本の直線。(P_1 はこの直線上にあることに注意しておく。))

(i) の場合、 P_2P_3 と P_4P_5 は平行である。

ゆえに、 P_2, P_3, P_4, P_5 を含む平面が存在する。

また、 P_2, P_3, P_4, P_5 は S_1 上にもあるので、この 4 点は同一円周上にある。

したがって、conclusion (X) が成り立つ。

(ii) の場合、直線と S_2 の交点は 2 点しかないので、 P_6 と P_7 の位置は決まる。

4-3 configuration のときは、 P_8 が S_2 上に取れず、不適。

一方、4-2 configuration のときは、 P_1 がこの直線上にあることから、 P_6, P_1, P_7 はこの順に同一直線上にあることになる。

したがって、Lemma 3 より、conclusion (X) が成り立つ。(厳密に言うと、 P_2, P_3, P_4, P_5 も S_2 上になければならなくなるので不適。)

また、 $P_2P_3 = c, P_3P_4 = d$ としたときも、同様の議論を繰り返せばよい。(但し、2 つの平面の共有部分についての場合分けの (i) の場合は現れない。) ■

Lemma 8

Lemma 4 の (ii) を満たす 4-2 or 4-3 configuration $P(8)$ -set を考える。

このとき、 S_1 上の 4 点においては、異なる 2 点の組は 6 組存在するが、6 組のうち、 R_1 と R_2 以外の距離が唯 1 組にだけ入っているならば、conclusion (X) が成り立つ。

Proof

$P_2P_3 = c$ としてよい。($c \neq R_1, c \neq R_2$)

このとき、 $P_1, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ の 6 点からなる集合は 2-distance set になる。

§2 でも述べたように、 $\mathbb{R}^3$ 上の 6 点からなる 2-distance set で非同型なものは 6 つしかないことが知られている。下の図 2 で示されているものがその 6 つで、6 つのうちの 2 つは正方形の 4 点を含み、残りの 4 つは正五角形の 4 点を含んでいる。正方形の 4 点や正五角形の 4 点は同一円周上にあるので、conclusion (X) が成り立つ。 ■

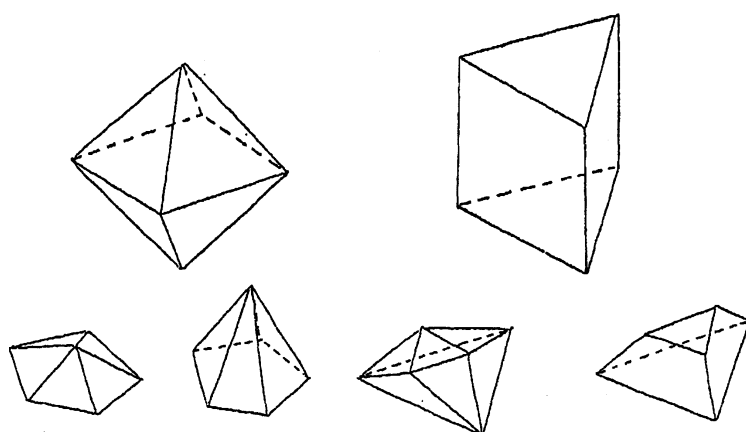


図 2 (Einhorn-Schoenberg [6]より抜粋)

Lemmas 6-8 より、次のことが成り立つ。

Lemma 9

任意の 4-2 or 4-3 configuration に対して、conclusion (X) が成り立つ。 ■

6 5-, 6-configurations の場合

1つの球面上に5点もしくは6点配置されている場合は、Croft [4]における §6での議論を直接適用することが出来る。次の4つの Lemmas 10-13の証明は Croft [4]にあるので、証明は省くことにする。

Lemma 10 (Croft)

$P(8)$ -set が次のように構成されているとする。

- ・ P_1 は球面 S の中心。
- ・ S 上に $P_2, P_3, P_4, \dots$ がある (少なくとも3点、多くても6点)。
- ・ 少なくとも1点 (P_8) は S 上にない。

このとき、 S 上にある点たちは、 S のある半球面上によせ集められている。 ■

Lemma 11 (Croft)

$P(8)$ -set の5点からなる部分集合が半球面 H 上にあるとする (Lemma 10 より、そのように仮定することが出来る。また、この部分集合を pentad と呼ぶことにしていた。)。このとき、conclusion (X) が成り立つ、もしくは次の3つが成り立つ。

- (i) 5点のうちの2点が、残りの3点から等距離の位置にあるということはない。
- (ii) 5点のうちの1点が、残りの4点から等距離の位置にあるということはない。
- (iii) pentad のある部分集合 tetrad が 2-distance set ならば、4点のうちの1点は、残りの3点から等距離の位置にある。 ■

Lemma 12 (Croft)

$P(8)$ -set の5点 $P_1, \dots, P_5$ が半球面上にあり、かつ、 s -distance set ($s \geq 3$) ならば、conclusion (X) が成り立つ。 ■

Lemma 13 (Croft)

$P(8)$ -set の5点 $P_1, \dots, P_5$ が半球面上にあり、かつ、2-distance set ならば、conclusion (X) が成り立つ。 ■

Lemmas 12,13 より、次のことが成り立つ。

Lemma 14

任意の 5- or 6-configuration に対して、conclusion (X) が成り立つ。 ■

7 7-configuration の場合

この section では、Lemma 1 の (iii) を満たす $P(8)$ -set の点 $P_1, \dots, P_8$ の配置について考える。

P_1 を球面 S の中心とすると、 $P_2, \dots, P_8$ は S 上にある。

このとき、 $P_2, \dots, P_8$ の 7 点からなる集合が $P(7)$ -set であることに注目すれば、次のことが成り立つ。

Lemma 15

$P_2, \dots, P_8$ が Lemma 2 の (ii)~(v) のいずれかを満たす $P(7)$ -set の 7 点となっており、conclusion (X) が成り立つ。

Proof

$P_2, \dots, P_8$ が Lemma 2 の (ii)~(v) のいずれかを満たしているとする。

(ii)~(v) にある球面の中心は P_2 であるとしてよい。

このとき、 $P_3, \dots, P_8$ のうちの少なくとも 4 点は、 P_2 を中心とする半径 a の球面上かつ球面 S 上にある。これは、 $P_3, \dots, P_8$ のうちの少なくとも 4 点は同一円周上にあることを示している。

したがって、conclusion (X) が成り立つ。 ■

Lemma 16

$P_2, \dots, P_8$ は Lemma 2 の (i) を満たす $P(7)$ -set の 7 点にならない。

Proof

$P_2, \dots, P_8$ が Lemma 2 の (i) を満たしていると仮定する。

(i) にある球面の中心は P_2 であるとしてよい。

このとき、 P_3, P_4, P_5 は、 P_2 を中心とする半径 a' の球面 S' 上かつ球面 S 上 (つまり、1 つの円周上) にあり、 P_6, P_7, P_8 は、 P_2 を中心とする半径 a'' の球面 S'' 上かつ球面 S 上にある。

$\mathbb{R}^3$ 上の 7 点からなる 2-distance set は存在しないので、7 点 $P_2, \dots, P_8$ のうちの異なる 2 点間の距離に c ($c \neq a', c \neq a''$) となるものが存在する。

$P_2 P_i = a' \text{ or } a''$ ($i = 3, \dots, 8$) であるから、 P_2 を除く 6 点のうちの 2 点間の距離に c となるものが存在する。

$P_3 P_6 = c$ ならば、 $\triangle P_2 P_3 P_6$ の 3 つの辺の長さが a', a'', c となるので、2 等辺 3 角形ではない。

したがって、次のことが分かる。

$$S' \text{ 上にある点と } S'' \text{ 上にある点との距離は、} a' \text{ もしくは } a'' \text{ である。} \quad (4)$$

また、距離 c は、同一球面上の 2 点間の距離として存在することから、 $P_6 P_7 = c$ としてよい。

このとき、 $\triangle P_3P_6P_7$ を考えると、(4)より、 P_3P_6, P_3P_7 は a' もしくは a'' であるから、2等辺3角形となるためには、 $P_3P_6 = P_3P_7$ とならなければならない。

同様に、 $\triangle P_4P_6P_7, \triangle P_5P_6P_7$ を考えると、 $P_4P_6 = P_4P_7, P_5P_6 = P_5P_7$ が成り立たなければならない。

ゆえに、 P_3, P_4, P_5 は P_6P_7 の垂直二等分線の作る平面にあり、かつ S' 上かつ S 上にある。

しかし、 P_6P_7 の垂直二等分線の作る平面と S' と S の交点は高々2点しかないので矛盾が生じる。

したがって、 $P_2, \dots, P_8$ はLemma 2の(i)を満たす $P(7)$ -setの7点にならない。 ■

Lemmas 15, 16より、次のことが成り立つ。

Lemma 17

7-configuration に対して、conclusion (X) が成り立つ。 ■

Lemmas 1, 9, 14, 17より、次のことが成り立つ。

Lemma 18

$P(8)$ -set が存在するならば、conclusion (X) が成り立つ。 ■

これ以降の Lemmas についての証明は省略する。

8 conclusion (X) における4点の配置について

Lemma 18より、 $P(8)$ -set の4点 $P_1, \dots, P_4$ は同一円周上にある。この4点 $P_1, \dots, P_4$ の配置について、次のことが成り立つ。

Lemma 19 (Croft)

P_1, P_2, P_3, P_4 は正方形の4点、もしくは正5角形の4点である。 ■

9 正方形の4点を含む $P(8)$ -set の構成

Lemma 20 (Croft)

$P(8)$ -set の4点 P_1, P_2, P_3, P_4 は、1辺の長さが1の正方形をなしているものとする。この4点を $P_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), P_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), P_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ とし、また、正方形の中心 $(0, 0, 0)$ を O 、正方形を含む平面を Π とする。

このとき、残りの点は、次の2つのいずれかにある。

(i) O を通り、 Π に垂直な直線 L 上

(ii) 次の $Q_1, \dots, Q_8$ のいずれか

$$Q_1 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), Q_2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}), Q_3 = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), Q_4 = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$Q_5 = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), Q_6 = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}), Q_7 = (0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), Q_8 = (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

(四角形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ と四角形 $Q_5Q_6Q_7Q_8$ はともに 1 辺の長さが $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の正方形。) ■

Lemma 21 (Croft)

Lemma 20 の $Q_1, \dots, Q_8$ において、 $Q_iQ_j = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ならば、 Q_i と Q_j は隣接しているということにする。(例えば、 Q_1 と Q_2 は隣接している。)

このとき、次のことが成り立つ。

隣接した Q_i と Q_j は $P(8)$ -set の 2 点とはならない。

また、 $P(8)$ -set には、3 点以上の Q_i たちが含まれてはならない。 ■

Lemma 22

正方形の 4 点を含むような $P(8)$ -set が存在するならば、正方形の 4 点を除く 4 点は、 L 上に 2 点と Q_i, Q_j ($i, j = 1, \dots, 8$ 。但し、 Q_i と Q_j は隣接していない) のような配置になっている。 ■

Lemma 23

正方形の 4 点を含むような $P(8)$ -set は存在しない。 ■

10 正五角形の 4 点を含む $P(8)$ -set の構成

Lemma 24 (Croft)

$P(8)$ -set の 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 は正五角形の 4 点であるとする (P_4 と P_1 の間に "gap" があるものとする)。また、正五角形を含む平面を Π とする。

このとき、残りの点は、次のいずれかにある。

- (i) 正五角形の残りの点 T
- (ii) $\triangle QP_4P_1$ と $\triangle QP_2P_3$ をともに正三角形にする点 Q
(このような Q は 2 点あるので Q_1, Q_2 としておく)
- (iii) 正五角形の中心 O を通り、 Π に垂直な直線 L 上 ■

Lemma 25 (Croft)

P_1, P_2, P_3, P_4, T, Q は $P(8)$ -set の 6 点とはならない。

但し、 Q は Q_1 と Q_2 のいずれかを表しているものとする。 ■

Lemma 26

図 1 で表された 8 点からなる集合以外に、正五角形の 4 点を含むような $P(8)$ -set が存在するならば、正五角形の 4 点を除く 4 点は、 L 上に 2 点と Q_1, Q_2 のような配置になっている。 ■

Lemma 27

正五角形の4点を含むような $P(8)$ -set は、図1で表された8点からなる集合に限る。 ■

11 Theorem 1 の証明の完結

まず、 $P(8)$ -set が存在するならば、Lemma 1 の (i)~(iii) のいずれかが成り立つのだが、いずれの場合も、Lemmas 9, 14, 17 より、conclusion (X) (4点在同一円周上にある) が成り立つことが分かった。

Lemma 19 より、同一円周上の4点は、正方形の4点もしくは正五角形の4点である。正方形の4点の場合だと、Lemma 23 より、 $P(8)$ -set は存在せず、正五角形の4点の場合だと、Lemma 27 より、 $P(8)$ -set は図1で表された8点からなる集合に限るので、 $\mathbb{R}^3$ における $P(8)$ -set は図1で表された8点からなる集合以外に存在しない。 ■

12 今後の課題

今後の課題としては、次のようなものが挙げられる。

(i) $\mathbb{R}^3$ における $P(7)$ -set は、3ページの図1の部分集合や、正8面体の6点に、正8面体の中心を加えた7点からなる集合 X 以外に存在するか？

また、isosceles 7-point 3-distance set は、上の集合 X 以外に存在するか？

(ii) $\mathbb{R}^3$ における7点からなる3-distance set で、互いに同型でないものは有限個であるのか？ (もし無限個であれば、頂点数をどれくらい大きくすれば有限個になるのか？)

(iii) (ii) の課題を一般の次元 k に拡張すればどうなるか？

つまり、 $\mathbb{R}^k$ における3-distance set で、頂点数をどれくらい大きくすれば互いに同型でないものは有限個になるのか？

(iv) 2ページの表1の3-distance set version を作成できないか？

(v) 3-distance set の3つの距離の比はある程度定まるのか？

(Larman-Rogers-Seidel [8] の拡張)

参考文献

- [1] 坂内英一、坂内悦子、球面上の代数的組合せ理論、シュプリンガー・フェアラーク 東京、1999.
- [2] E. Bannai, E. Bannai, and D. Stanton, *An upper bound for the cardinality of an s -distance subsets in real Euclidean space, II*, *Combinatorica* **3** (1983), 147-152.
- [3] A. Blockhuis, *Few-distance sets*, Ph. D. thesis, Eindhoven Univ. of Technology (1983), (CWI Tract (7) 1984).

- [4] H. T. Croft, *9-point and 7-point configuration in 3-space*, Proc. London. Math. Soc. (3), **12** (1962), 400-424.
- [5] S. J. Einhorn, I. J. Schoenberg, *On Euclidean sets having only two distances between points I*, Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A69=Indag. Math. **28** (1966), 479-488.
- [6] S. J. Einhorn, I. J. Schoenberg, *On Euclidean sets having only two distances between points II*, Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A69=Indag. Math. **28** (1966), 489-504.
- [7] L. M. Kelly, *Elementary Problems and Solutions. Isosceles n -points*, Amer. Math. Monthly, **54** (1947), 227-229.
- [8] D. G. Larman, C. A. Logers, and J. J. Seidel, *On two-distance sets in Euclidean space*, Bull. London Math. Soc., **9** (1977), 261-267.
- [9] P. Lisoněk, *New maximal two-distance sets*, J. Comb. Theory, Ser. A77 (1997), 318-338.
- [10] M. Shinohara, *Classification of Three-Distance Sets in Two Dimensional Euclidean Space*, (accepted).