

不動点をもたない $SU(n)$ 作用を 許す弱複素多様体について

阪大理 内田 伏一

§ 1. 序

弱複素多様体のコボルディズム環を $U_* = \bigoplus_{n \geq 0} U_{2n}$ とする。
コンパクトリー群 G に対して, U_* のイデアルで, 不動点をもたない弱複素 G 作用を許す弱複素多様体の表わすコボルディズム類の全体を $SF_*(G)$ で表わす。

G がアーベル群のとき, $SF_*(G)$ の構造は *tom Dieck* [1] によって研究されている。この報告において, G が特殊ユニタリ群 $SU(n)$, およびユニタリ群 $U(n)$ の場合について, $SF_*(G)$ の構造を研究する。

コボルディズム環 U_* は環として,

$$\{ [P_n(\mathbb{C})], [H_{p,q}(\mathbb{C})], n \geq 0, p \geq q > 0 \}$$

によって生成されることが知られている。整数 $n \geq 2$ に対して, 自然数の集合 $A(n)$ を

$$A(n) = \left\{ \binom{n+k_1-1}{k_1} + \cdots + \binom{n+k_r-1}{k_r} \mid r \geq 1, k_1 \geq \cdots \geq k_r \geq 1 \right\}$$

によって定義し,

$$\{[P_{k-1}(C)], [H_{k+a-1, k-1}(C)] \mid k \in A(n), a \geq 0\}$$

によって生成される U_* のイデアルを $U_*^{(n)}$ とする. このとき次の結果が得られる.

定理. 整数 $n \geq 2$ に対して,

$$U_*^{(n)} \subset SF_*(SU(n)), \quad U_*^{(n)} \subset SF_*(U(n))$$

が成り立つ.

系. $SF_*(SU(2)) = SF_*(U(2)) = \bigoplus_{n \geq 0} U_{2n}.$

§ 2. 線型作用

G をコンパクトリイ群とし, V を有限次元複素 G ベクトル空間とする. このとき, 複素射影空間 $P(V)$ は, G 作用を

$$g \cdot [v] = [g \cdot v], \quad g \in G, \quad 0 \neq v \in V$$

によって定義するとき, (弱) 複素 G 多様体になる. このとき, 次の結果が容易に証明できる.

補題. G 多様体 $P(V)$ が不動点をもつための必要十分条件は, 複素 G ベクトル空間 V が G 不変な 1 次元部分空間をもつことである.

$V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ 上の G 作用を

$$(g \cdot u)(v) = u(g^{-1} \cdot v), \quad g \in G, u \in V^*, v \in V$$

によって定義する.

V, W を有限次元複素 G ベクトル空間とすると、複素 G 多様体 $P(V \oplus W) \times P(V^*)$ の G 不変な部分多様体が

$$H(V \oplus W, V^*) = \{([v \oplus w], [u]) \mid u(v) = 0\}$$

によって定義できる. G 多様体 $P(V^*)$ が不動点をもたなければ、 $H(V \oplus W, V^*)$ も不動点をもたない.

$\dim V = p, \dim W = q$ とし、 V が G 不変な 1 次元部分空間をもたないとする. 上記、 $P(V), H(V \oplus W, V^*)$ を考えることによって、 $P_{p-1}(\mathbb{C}), H_{p+q-1, p-1}(\mathbb{C})$ が、不動点をもたない弱複素 G 作用を許すことになる.

§3. $SU(n)$ の既約表現

前節の考察によって、定理を証明するには、 $\binom{n+k-1}{k}$ 次元の複素 $SU(n)$ ベクトル空間で、1 次元不変部分空間をもたないものを与えれば十分である. ($SU(n)$ の複素表現は常に $U(n)$ の表現に拡張できる)

$X_1, \dots, X_n$ を不定元とする複素数係数の次数 k の齊次多項式全体の作る複素ベクトル空間を $V_{(n, k)}$ で表わす.

$A = (a_{ij}) \in U(n)$, $f \in V_{(n,k)}$ に対して, $Af \in V_{(n,k)}$ を

$$(Af)(X_1, \dots, X_n) = f\left(\sum_i a_{i1} X_i, \dots, \sum_i a_{in} X_i\right)$$

によって定義すれば, $V_{(n,k)}$ は $U(n)$ の表現空間となる.

すなわち, $V_{(n,k)}$ は $\binom{n+k-1}{k}$ 次元複素 $U(n)$ ベクトル空間である. $n \geq 2$, $k \geq 1$ に対して

$$(1) \quad \dim V_{(n,k)} < \dim V_{(n,k+1)}$$

が成り立つことを注意しておこう.

ここで, 次の命題を証明しよう.

命題 (a_n) : すべての $k \geq 1$ に対して, $V_{(n,k)}$ は $SU(n)$ の表現空間として既約である.

証明. $SU(n)$ 不変な線型写像 $V_{(n,k)} \rightarrow V_{(n,k)}$ がスカラー積に限ることを証明すれば十分である.

(a_2) が成り立つこと. 直接証明できるが, 山内-杉浦 [2], p60~61, p74~76, p125~126 を参照せよ.

以下, $(a_n) \Rightarrow (a_{n+1})$ を示そう.

さて, $\varphi_1, \varphi_2: SU(n) \rightarrow SU(n+1)$ を, $A \in SU(n)$ に対して,

$$\varphi_1(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

によって定義される準同型写像とする. このとき, $V_{(n+1,k)}$

は, φ_1, φ_2 によって, $SU(n)$ の表現空間として次のように分解される.

$$(2) \quad V_{(n+1, k)} \cong (V_{(n, k)} \otimes X_{n+1}^0) \oplus (V_{(n, k-1)} \otimes X_{n+1}^1) \oplus \cdots \oplus (V_{(n, 0)} \otimes X_{n+1}^k),$$

$$(3) \quad V_{(n, k)} \cong (X_1^0 \otimes V_{(n, k)}) \oplus (X_1^1 \otimes V_{(n, k-1)}) \oplus \cdots \oplus (X_1^k \otimes V_{(n, 0)}).$$

ここに, $V_{(n, 0)} = \mathbb{C}$ は自明表現であり, $V_{(n, 1)}, \dots, V_{(n, k)}$ は, 帰納法の仮定によって, $SU(n)$ の既約表現であって, 不等式 (1) によって, 互いに同型にならないものである.

いま, $P: V_{(n+1, k)} \rightarrow V_{(n+1, k)}$ を $SU(n+1)$ 不変な線型写像とする. P を, φ_1, φ_2 を通して, $SU(n)$ 不変な線型写像とみると, 上の注意と, Schur の補題によって, $i = 0, 1, \dots, k$ に対して, 複素数 α_i, β_i が存在して,

$$P(X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} X_{n+1}^i) = \alpha_i \cdot X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} X_{n+1}^i,$$

$$\text{但し, } i_1 + \cdots + i_n + i = k$$

$$P(X_1^i X_2^{i_2} \cdots X_{n+1}^{i_{n+1}}) = \beta_i \cdot X_1^i X_2^{i_2} \cdots X_{n+1}^{i_{n+1}},$$

$$\text{但し, } i + i_2 + \cdots + i_{n+1} = k$$

が成り立つ. $n \geq 2$ であるから, これ等の式から,

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_k$$

が成り立つ. すなわち, P はスカラー積である. (証明終)

§ 4. $SU(n)$ の内部分群

前節までにおいて, $SU(n)$ の線型作用を構成することによって, イデアール $SF_*(SU(n))$ の一つの下界 $U_*^{(n)}$ が求められたのであるが, ここでは, $SU(n)$ の内部分群の次元を考えると, $SF_*(SU(n))$ の一つの上界を求めよう.

多様体としての $SU(n)$ の次元は n^2-1 であり, Mann [3] の表によれば, $SU(n)$ の真内部分群の最大次元は $(n-1)^2$ である. 従って, $SU(n)$ 作用の軌道の次元を考えることによって, 次の結果が成り立つ.

補題. $n < 2(n-1)$ のとき, n 次元多様体上の $SU(n)$ 作用は常に自明作用である.

この結果, 次の関係が成り立つ.

$$(4) \quad SF_*(SU(n)) \subset \bigoplus_{k \geq n-1} U_{2k}.$$

上述の Mann の結果は $n=4$ のとき正しくない. すなわち $SU(4)$ には 10 次元の内部分群が存在する. 従って, 上の補題は修正を要するが, (4) には影響を及ぼさないことが分かる.

参考文献

- [1] T. tom Dieck : Kobordismentheorie klassifizierender Räume und Transformationsgruppen, *Math. Zeit.* 126 (1972), 31 - 39.
- [2] 山内-杉浦 : 連続群論入門, 培風館
- [3] L.N. Mann : Gaps in the dimensions of transformation groups, *Ill. J. Math.* 10 (1966), 532 - 546.