

Banach 空間の有界閉集合内の最遠点の一意性

東京理科大学理学部 宮島 静雄 (Shizuo Miyajima)

当別高校 和田 文興 (Fumioki Wada)

§1. 問題の陳述と準備

Banach 空間 E の点 x と空でない閉集合 C が与えられたとき, C の点で x に最も近いものの存在と一意性は最も基本的な変分問題の一つであり, 主に C が凸集合の場合により結果が得られる.

ここでは「 x に最も近い点」の代わりに「 x から最も遠い点」の存在と一意性について考え, この問題が凸解析の手法で扱えることを示す. ただし, 存在性についての結果は [1], [3], [4], [6] 等によって得られており, 我々の得た新しい結果は一意性に関するもののみであることをお断りしておきたい.

改めて問題を正確に述べておこう:

Banach 空間 E の点 x と空でない有界閉集合 C が与えられたとき, $z \in C$ で $\|x - z\| = \sup \{ \|x - y\| \mid y \in C \}$ をみたすものの存在と一意性についてどのようなことが言えるか?

(上で「有界」閉集合としたが, 最遠点の存在のためには有界でないと意味がないからである.)

本格的な話に入る前に, 一意性についてどのようなことが起こり得るのか簡単な例で見当をつけておこう. 空間が有限次元ならば, 有界閉集合はコンパクトなので最遠点は常に存在する. ところが一意性についてはそれほど単純ではない. E を $\mathbf{R}^2$ に sup-norm を入れたものとし, C をその単位球 (つまり原点を中心とする正方形) とする. このとき E のどの点も C 内に無限個の最遠点を持ち, 一意性は全く成立しない. ところが $\mathbf{R}^2$ に Euclidean norm を入れ, C は前と同じ正方形とすると, $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ は $st \neq 0$ のとき C 内に一意的な最遠点を持つ. これらにより, 一意性の問題には考えている Banach 空間 E の幾何学的な性質が深く関わっており, また E が極めてよい性質を持っているときでさえ一意性は E の「ほとんど至るところの」点に対してしか保証されないことが分かる.

以下の議論のために次の記号を導入する.

DEFINITION 1.1. Banach 空間 E の空でない有界閉集合 C に対して E 上の実数値関数 f_C を $f_C(x) := \sup\{\|x - y\| \mid y \in C\}$ で定める.

REMARKS. 次のことが成り立つことは容易に分かる.

- (i) $f_C(x)$ は凸関数で E 上一様に Lipschitz 連続であり, Lipschitz 定数は 1 である.
- (ii) $\overline{\text{co}} C = \overline{\text{co}} D$ ならば $f_C(x) = f_D(x)$ が成り立つ.
- (iii) z が x からの C 内の最遠点 $\iff z \in C$ and $\|x - z\| = f_C(x)$

次に, 蛇足と思われるが, 凸関数の劣微分について復習しておく. Banach 空間 E 上の連続凸関数 f と $x \in E$ に対し, $x^* \in E^*$ が x での f の subgradient であるとは

$$\langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$$

が任意の $y \in E$ に対して成り立つことである. x における f の subgradient 全体の集合は f の x における subdifferential と呼ばれ $\partial f(x)$ で表わされる. 今は f は連続凸としているので, 任意の $x \in E$ に対し $\partial f(x)$ は空でない. また, $\partial f(x) = \{x^*\}$ がある $x^* \in E^*$ に対して成り立つのは f が x で Gâteaux 微分可能で Gâteaux 微分が x^* であることと同値である.

他方, $x \in E$ と任意の $y \in E$ に対して, 右側方向微分 $d^+ f_C(x)(y) = \lim_{t \downarrow 0} \{f_C(x + ty) - f_C(x)\}/t$ が存在し y について E 上の sublinear functional になる. また次の等式が成り立つこともよく知られている.

$$\partial f_C(x) = \{x^* \in E^* \mid \langle x^*, y \rangle \leq d^+ f_C(x)(y) \text{ for all } y \in E\}, \quad (1)$$

$$d^+ f_C(x)(y) = \max\{\langle x^*, y \rangle \mid x^* \in \partial f_C(x)\} \quad (y \in E). \quad (2)$$

§2. 最遠点の存在に関する結果

最遠点の存在問題については Edelstein [3], Asplund [1], Lau [4], Panda-Dwivedi [6] 等による研究がある. 一意性について調べるときにも必要になるので, この節ではいくつかの定義を述べ, 存在に関する結果を紹介しよう.

DEFINITION 2.1. (Lau) 空でない有界閉集合 $C \subset E$ に対し, 集合 $D(C)$ を次のように定義する:

$$D(C) := \{x \in E \mid \forall x^* \in \partial f_C(x) \inf_{z \in C} \langle x^*, z - x \rangle = -f_C(x)\}.$$

THEOREM A (LAU). $D(C)$ は E の G_δ -集合で, C が weakly compact ならば任意の $x \in D(C)$ は C 内に最遠点を持つ.

DEFINITION 2.2. Banach 空間 E は次の条件をみたすとき Kadec space といわれる:

$$\left. \begin{array}{l} x_n \xrightarrow{w} x \\ \|x_n\| \rightarrow \|x\| \end{array} \right\} \Rightarrow x_n \rightarrow x.$$

THEOREM B (PANDA-DWIVEDI). E が reflexive Kadec space で C は E の空でない有界閉集合とする. このとき, 任意の $x \in D(C)$ は C 内に最遠点を持つ.

$D(C)$ については次のことも成り立つ.

PROPOSITION 2.3. C が Banach 空間 E の空でない有界閉集合とするとき, $D(C) = E$ となるのは C が一点集合と言うことと同値.

§3. 最遠点の一意性に関する結果

最遠点の存在に関係していた集合 $D(C)$ が実は一意性についても重要であることが分かり, 次のような結果が得られた.

PROPOSITION 3.1. E は狭義凸な Banach 空間で, C は E の空でない relatively weakly compact subset とする. このとき任意の $x \in D(C)$ は C 内に高々一つの最遠点しか持たない.

THEOREM 3.2(reflexive case). E は狭義凸で反射的な Banach 空間で, C は E の空でない有界閉集合とする. このとき任意の $x \in D(C)$ は C 内に高々一つの最遠点しか持たない.

Banach 空間 E に対する条件をさらに強めれば, $D(C)$ の任意の点に対して C 内の最遠点の存在と一意性の両方を示すことができる.

DEFINITION 3.3. Banach 空間 E は reflexive, Kadec, かつ狭義凸なとき strongly convex といわれる.

COROLLARY 3.4. E が strongly convex で C は E の空でない有界閉集合とする. このとき任意の $x \in D(C)$ は C 内にちょうど一つの最遠点を持つ. とくに E が Hilbert 空間ならば, E の任意の空でない有界閉集合 C に対して $D(C)$ の各点は C 内に最遠点を丁度一つ持つ.

さらに, $D(C)$ 以外にも最遠点の一意性が保証されるような G_δ -集合 $D_0(C)$ が存在する場合もある. これを示すためにまず f_C の Gâteaux 微分可能性と最遠点の一意性との関連を明らかにしよう.

PROPOSITION 3.5(non-reflexive case). E は狭義凸な Banach 空間で, C は E の空でない有界閉集合とする. このとき, f_C が $x \in E$ で Gâteaux 微分可能であれば x は C 内に高々一つの最遠点しか持たない.

凸関数の微分可能性に着目した次のような Banach 空間のクラスがある.

DEFINITION 3.6. Banach 空間 E は次の性質を持つとき Asplund space [resp. weak Asplund space] と呼ばれる:

E の任意の空でない開凸集合 D 上で定義された任意の連続凸関数 f に対し, D で稠密な G_δ -集合 G で, 各 $x \in G$ で f が Fréchet [resp. Gâteaux] 微分可能であるようなものが存在する.

この定義と Proposition 3.5 から直ちに次の定理を得る.

THEOREM 3.7(non-reflexive case). E は狭義凸な weak Asplund space で, C は E の空でない有界閉集合とする. このとき E で稠密な G_δ -集合 $D_0(C)$ で任意の $x \in D_0(C)$ が C 内にちょうど一つの最遠点を持つようなものが存在する.

実は $D(C)$ と f_C の Gâteaux 微分可能性に次のような関係があることも分る.

THEOREM 3.8(non-reflexive case). E は smooth な Banach 空間で, C は E の空でない有界閉集合で relatively weakly compact なものとする. このとき, C が一点集合でなければ, 任意の $x \in D(C)$ において f_C は Gâteaux 微分可能である.

§4. G_δ 性からの結果

この節は redundant なものであるが, 最遠点の存在と, 一意性が共に稠密な G_δ 集合に対して言えているので, 一意存在性についての結果が直ちに得られることを念のため述べておく.

THEOREM 4.1. E は狭義凸な weak Asplund space で, C は E の空でない weakly compact 部分集合とする. このとき E で稠密な G_δ -集合 $D^*(C)$ で, 任意の $x \in D^*(C)$ が C 内に丁度一つの最遠点を持つようなものが存在する.

THEOREM 4.2. C は strongly convex な Banach 空間 E の空でない有界閉集合とする. このとき E で稠密な G_δ -集合 $D^*(C)$ で, 任意の $x \in D^*(C)$ が C 内に丁度一つの最遠点を持つようなものが存在する.

§5. 証明

この節で最遠点の一意性に関する結果の証明を略述しよう. 詳しくは 宮島-和田 [5] を参照していただきたい.

初めに集合 $D(C)$ の特徴付けを与える.

PROPOSITION 5.1. C は Banach 空間 E の空でない有界閉集合で, $x \in E$ とする. このとき次の主張はすべて同値である:

- (i) $x \in D(C)$;
- (ii) $\inf_{z \in \text{co } C} d^+ f_C(x)(z - x) = -f_C(x)$;
- (iii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\lambda \in (0, 1)$ と $z \in \text{co } C$ で次の条件を満たすものが存在する:

$$f_C(x + \lambda(z - x)) - f_C(x) < -\lambda f_C(x) + \varepsilon \lambda. \quad (3)$$

PROOF. (i) $\iff$ (ii): 初めに $x \in D(C)$ は次の条件と同値であることに注意しよう:

$$\sup_{x^* \in \partial f_C(x)} \inf_{z \in C} \langle x^*, z - x \rangle = -f_C(x).$$

これは $\langle x^*, z - x \rangle \geq -\|z - x\| \geq -f_C(x)$ がすべての $x^* \in \partial f_C(x)$ と $z \in C$ に対して成り立つことから分かる. . また $\inf_{z \in C} \langle x^*, z - x \rangle = \inf_{z \in \overline{\text{co } C}} \langle x^*, z - x \rangle$ が成り立ち $\partial f_C(x)$ は weak* compact convex なので, minimax theorem ([2, Theorem 3.7]) と (2) により

$$\begin{aligned} \sup_{x^* \in \partial f_C(x)} \inf_{z \in C} \langle x^*, z - x \rangle &= \sup_{x^* \in \partial f_C(x)} \inf_{z \in \overline{\text{co } C}} \langle x^*, z - x \rangle \\ &= \inf_{z \in \overline{\text{co } C}} \sup_{x^* \in \partial f_C(x)} \langle x^*, z - x \rangle \\ &= \inf_{z \in \overline{\text{co } C}} d^+ f_C(x)(z - x). \end{aligned}$$

が分る. これは (i) と (ii) の同値性を示す.

(ii) $\iff$ (iii): これは $d^+ f_C(x)$ の定義から容易に分かる. $\square$

Proposition 3.1 の証明

C が一点集合の場合は明らかに命題が成り立つので, C は一点集合でないと仮定してよい. 今 $x \in D(C)$ としよう. そうすると Proposition 5.1 により, $\varepsilon_n \downarrow 0$ なる任意の数列 $\{\varepsilon_n\} \subset (0, 1)$ に対して $\overline{\text{co } C}$ の中の点列 $\{z_n\}$ と数列 $\{\lambda_n\} \subset (0, 1)$ で

$$f_C(x + \lambda_n(z_n - x)) - f_C(x) < -\lambda_n f_C(x) + \varepsilon_n \lambda_n \quad (4)$$

を満たすものがとれる. C は weakly relatively compact なので Krein-Smulian の定理により $\overline{\text{co}} C$ も weakly compact である. 従って Eberlein-Smulian の定理により z_n はある $z \in \overline{\text{co}} C$ に弱収束しているとしてよい. また, $x=0$ かつ $f_C(0)=1$ と仮定しても一般性を失わない (平行移動と定数倍). さて $x=0$ に対して y が C の中の最遠点であるとしよう. このとき $\|y\| = f_C(0) = 1$ で, 任意の $n \in N$ に対して (4) より

$$\|y - \lambda_n z_n\| \leq f_C(\lambda_n z_n) < 1 - \lambda_n + \varepsilon_n \lambda_n$$

となるから

$$\|y - \lambda_n z_n\| - \|y\| < -(1 - \varepsilon_n) \lambda_n$$

が成り立つ. $\varphi \in \partial\|\cdot\|(y)$ を任意にとると, 上の不等式から

$$-\lambda_n \langle \varphi, z_n \rangle < -(1 - \varepsilon_n) \lambda_n$$

だから

$$\langle \varphi, z_n \rangle > 1 - \varepsilon_n$$

となる. $\varepsilon_n \downarrow 0$ より $\langle \varphi, z \rangle \geq 1$ となり, 結局 $\langle \varphi, z \rangle = 1$ と $\|z\| = 1$ であることが $\|z\| \leq 1$ と $\|\varphi\| = 1$ から得られる. 他方, 明らかに $\langle \varphi, y \rangle = 1$ なので $\langle \varphi, y+z \rangle = 2$ となる. よって $\|y+z\| = 2$ が分かり, E の狭義凸性から $y = z$ が得られる. これは C 内に x からの最遠点は高々一つしか存在しないことを示している. $\square$

Proposition 3.5 の証明

C は一点集合でないと仮定してよい. $y, z \in C$ がともに x からの最遠点であるとし, φ は $\partial f_C(x)$ のただ一つの要素とする. このとき $\|\varphi\| = 1$ で

$$\langle \varphi, x-y \rangle = \|x-y\| = \|x-z\| = \langle \varphi, x-z \rangle$$

が成り立っている. 従って

$$\begin{aligned} \|(x-y) + (x-z)\| &\geq \langle \varphi, (x-y) + (x-z) \rangle \\ &= \|x-y\| + \|x-z\| \end{aligned}$$

となり, E の狭義凸性から $x-y = x-z$, 従って $y = z$ が得られる. $\square$

§6. 例

Banach 空間 E の点 x と空でない閉集合 C に対し, $\text{far}(x, C)$ で C 内の x からの最遠点の全体を表わし, ある x からの最遠点になっているような C の点全体を $\text{far}(C)$ で表わす.

EXAMPLE 6.1. (A) $E = l^2$ (実数体上のもの), $C = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1, x \geq 0\}$ とする. このとき次のことが成り立つ. ただし $x \geq 0$ [resp. $x > 0$] は $x \in E$ のすべての成分が ≥ 0 [resp. > 0] を意味する.

$$\text{far}(C) = \{x \in C \mid \|x\| = 1\}. \quad (\text{a})$$

$x \in E$ に対して x の正負の部分 $x^\pm$ を $x^\pm = (\pm x) \vee 0$ で定める. このとき $\text{far}(x, C)$ は次のようになる:

$$\text{far}(x, C) = \begin{cases} \emptyset, & (x > 0) \\ \{x^- / \|x^-\| \}, & (x^- \neq 0) \\ \{z \in \text{far}(C) \mid z \perp x\}, & (x \geq 0 \text{ but not } x > 0) \end{cases} \quad (\text{b})$$

さらに, 次のことも分かる.

$$D(C) = \{x \in E \mid x^- \neq 0\}. \quad (\text{c})$$

(B) $E = L^2[0, 1]$ (実数体上), $C = \{f \in E \mid \|f\| \leq 1, f \geq 0 \text{ a.e.}\}$ とする. このとき次のことが成り立つ.

$$\text{far}(C) = \{f \in C \mid \|f\| = 1\}. \quad (\text{d})$$

$f^\pm$ を (A) でのように $f \in E$ の正負の部分とする. このとき $\text{far}(f, C)$ は次のようになる:

$$\text{far}(f, C) = \begin{cases} \emptyset, & (f > 0 \text{ a.e.}) \\ \{f^- / \|f^-\| \}, & (f^- \neq 0) \\ \{z \in \text{far}(C) \mid z \perp f\}, & (f \geq 0 \text{ but not } f > 0 \text{ a.e.}) \end{cases} \quad (\text{e})$$

さらに次のことも分かる.

$$D(C) = \{f \in E \mid f^- \neq 0\}. \quad (\text{f})$$

REFERENCES

- [1] Asplund, E., *Farthest points in reflexive locally uniformly rotund Banach spaces*, Israel J. Math. 4 (1966), 213-216.
- [2] V. Barbu and Th. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach spaces* (2nd ed.), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht/Boston/Lancaster, 1986.

- [3] Edelstein, M., *Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces*, Israel J. Math., **4** (1966), 171-176.
- [4] Lau, K.-S., *Farthest points in weakly compact sets*, Israel J. Math., **22** (1975), 168-174.
- [5] Miyajima, S. and F. Wada, *Uniqueness of a Farthest Point in a Bounded Closed Set in Banach Spaces*, Preprint.
- [6] Panda, B. B. and K. Dwivedi, *On existence of farthest points*, Indian J. Pure and Appl. Math., **16** (1985), 486-490