

Introductory Talk

Korteweg - de Vries 方程式

数学の立場よりの歴史的概観

大阪市立大 工
京大理

尾高 惟倫
山江 昌哉

1895年 D. J. Korteweg と G. de Vries は Phil. Mag. に "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves" を発表し、この論文の表題に示される様な木の波を記述するいわゆる Korteweg - de Vries 方程式を導いた。それは

$$(1) \quad D_t u + u D u + D^3 u = 0 \quad (D_t = \frac{\partial}{\partial t}, D = \frac{\partial}{\partial x})$$

なる3階半線型方程式である。(1)は $u(x-Vt)$ の形の定常解を持つ。 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ なる条件の下で

$$u(x) = u_0 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{u_0}{12}} x \right), \quad V = \frac{u_0}{3}, \quad u_0 > 0$$

これは所謂 soliton と呼ばれる。

周期境界条件の下で

$$u(x) = \frac{2a}{s^2} \operatorname{dn}^2\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \frac{x}{s}\right) + \gamma, \quad V = \frac{2a(2-s^2)}{3s^2} + \gamma$$

ただし $\operatorname{dn} z$: elliptic Jacobi function with modulus s

($0 \leq s \leq 1$) a, γ : 任意の定数, u は periodic

wave である, 波長は $\lambda = 2\sqrt{\frac{b}{a}} s K(s^2) = 2$

$K(s^2)$: complete elliptic integrals with modulus s

もし 2 が λ ならば $\gamma = 0, a = \frac{u_0}{2}, s \rightarrow 1$ とすると

$K(s^2) \rightarrow +\infty$ とする $\lambda \rightarrow +\infty$ と $\operatorname{dn} z \rightarrow \operatorname{sech} z$

となるから

$$\frac{u_0}{s^2} \operatorname{dn}^2\left(\sqrt{\frac{u_0}{12}} \frac{x}{s}\right) \longrightarrow u_0 \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{u_0}{12}} x\right)$$

すなわち 周期 $\rightarrow +\infty$ とすると periodic wave は soliton に収束する。

最近 1965 年 N. J. Zabusky と M. D. Kruskal は "Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states"

Phys. Rev. Letters Vol. 15 (1965) において KdV 方程式 (1) の差分近似解のふるまいを電子計算機による数値実験でくわしく調べ、興味ある事実をいくつか明らかにした

Zabusky : A synergetic approach to problems

of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, Nonlinear Partial Differential Equations, Academic Press (1967) に於けると KdV 方程式 (1) は非調和格子振動の数学的モデルとも考えられ "Nonlinear dispersive wave propagation" を記述する最も簡単なモデル方程式として重要視されるに至る。

この数学的には すでに知られてゐる定常解をそのわく内に含む様な KdV 方程式に対する Cauchy 問題の解の全域的存在定理を作る事が第一歩である。最初の結果は、

1967年 A. Sjöberg: On the Korteweg-de Vries equation, Uppsala Univ., Dept. of Computer Sci., Report, 1967 に於て、この中の line method (空間方向にのみ差分化する) を 2 周期境界条件の下での古典解の一意的な全域的存在が示された。

1968年 R. M. Miura: Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation, J. Math. Phys. Vol. 9 (1968) 及び R. M. Miura, C. S. Gardner and M. D. Kruskal: Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion

J. Math. Phys. Vol. 9 (1968) 1-5, 2 KdV 方程式
 式 (1) は可算無限個の conserved density ($D^k u$, $k=0,1,2,\dots$)
 の多項式 T が $D_t T = DX$ なる X を持つとき T を
 conserved density といい) を持つことが示された。この結
 果を少し変形すると

[定理]

KdV 方程式 (1) は次の形の conserved density を持つ

$$T_0 = u^2$$

$$T_k = (D^k u)^2 + c_k u (D^{k-1} u)^2 + Q_k(u, \dots, D^{k-2} u)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

ただし Q_k は多項式

である conserved density を全 x -軸上で積分すると

$$(2) \quad \begin{cases} D_t u + u D u + D^3 u + g(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

なる Cauchy 問題の解の a priori estimate が次の様に
 得られる。(k は k に関する帰納法)

[定理]

Cauchy 問題 (2) の解 u は次の様な a priori estimate を持つ

$$\|D^k u\| \leq U_k(t, \|f\|, \dots, \|D^k f\|, \|g\|_t, \dots, \|D^k g\|_t)$$

$$t \in \mathbb{R}^+ \quad \|g\|_t = \sup_{0 \leq s \leq t} \|g(s)\|, \quad \|g(s)\| = \|g(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}$$

U_k は各 argument について正値単調増大な有限な関数である。

しかしこれだけでは足りない

$$(3) \quad \begin{cases} D_t u_n + u_{n-1} D u_n + D^3 u_n + g(x, t) = 0 \\ u_n(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

なる線形方程式を解く事とす、2列 u_n を定義すると、適当な函数空間の位相で $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ が存在か、之 Cauchy 問題 (2) の解の局所存在定理を得る。a priori estimate と合わせ最終的に次の大域的存在定理を得る。

[定理]

$f(x) \in \mathcal{E}_L^\infty$, $g(x, t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_L^\infty)$ とすると
Cauchy 問題 (2) は $0 \leq t < \infty$ ($-\infty < t \leq 0$) において
 $u(x, t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_L^\infty)$ なる一意的な解を持つ

$f(x) \in \mathcal{E}'$ は任意の自然数 k に対し $D^k f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ を意味する。(D は distribution の意味の微分)

上の定理で $\mathcal{E}' \ni \varphi_L$ 2 "あまがえ" もよい。ただし $\varphi_L^\infty = \mathcal{E}'_{loc} \cap \{ \text{functions with period } L \}$ とする。

< 4.1 "結果は Y. Kametaka : Korteweg-de Vries equation I, III, Proc. Japan Acad. Vol. 45 (1969) を参照

最後に soliton を軸に KdV 方程式と近い関係にあると思われるいくつかの方程式にふれよう

$$(4) \quad D_t v + v^p Dv + D^3 v = 0$$

$p=2$ の場合 KdV 方程式 ($p=1$) と次の様に関連する

$$v^2 + \sqrt{-6} Dv = u \quad \text{と} \quad u_t + u Du + D^3 u = (2v + \sqrt{-6} D)(D_t v + v^2 Dv + D^3 v)$$

$$D_t u + u Du + D^3 u = (2v + \sqrt{-6} D)(D_t v + v^2 Dv + D^3 v)$$

したがって $p=1$ の場合の結果より、 $p=2$ の場合にも

conserved density が可算無限個ある事から *a priori* estimate が得られ $p=1$ の場合と同様の下域的存在定理を得る。 Y. Kametaka : Korteweg-de Vries equation, IV, Proc. Japan Acad. Vol. 45 (1969) 参照

次に棒の振動方程式 $D_t^2 y - D^2 y + D^4 y = 0$ の nonlinear perturbation と考えよう。これら方程式

$$(5) \quad D_t^2 y - \{1 + (Dy)^\delta\} D^2 y + D^4 y = 0$$

又は $Dy = u$, $D_t y = v$ とおくと

$$(6) \quad \begin{cases} D_t u - Dv = 0 \\ D_t v - (1 + u^\delta) Du + D^3 u = 0 \end{cases}$$

(6) 2" $\delta=1$ の場合 $u(x-at)$, $v(x-bt)$ の形の定常解を求めよう。常微分方程式を導いてみる。

$$-a u' - v' = 0, \quad -b v' - u' - u u' + u''' = 0$$

したがって、2 式にから

$$(ab-1) u' - u u' + u''' = 0$$

が得られ $\delta=1$ の場合 (6) は KdV 方程式 $D_t u - u Du + D^3 u = 0$ と共通の solution を定常解として持つ。

存在定理によれば $\delta=2p$, 周期境界条件の下で (5) の古典解の大域的存在が M. Taniuchi and R. Iino によつて得られる。又 $0 \leq x \leq 1$ で $y(0,t) = y(1,t) = 0$

なる両端境界条件を付けたときの大域的存在定理が T. Nishida により得られる。 $\gamma = 2p+1$ では初期値を小さく制限する必要がある。

以上で 2, 3 の非常に簡単な *non linear dispersive equation* に対する Cauchy 問題の解の大域的存在定理を中心に紹介してきたが、存在定理以上(?)の事は数学的にはほとんどわか

ていない様である。(もちろん筆者に取、2!) KdV 方程式

式にからずとも進んだ研究は P. D. Lax, Kay,

Gardner - Green - Kruskal - Miura,

等々沢山あるが、これを完全に数学的に解説する事はこれ

からの仕事の様に見える。上に述べたは事のうち P. D.

Lax. 1968 年 *Communications on pure and applied Mathematics* Vol. XXI 467-490

の一部について紹介を試みる。尚後半部 Double Wave につ

いてはこの講究録武笠氏の報告に含まれているので参照して

いたいただきたい。

この記事の最初に述べたように K-d-V 方程式 (1) は

$u(x-Vt)$ の形の travelling wave solution をもつ。くりかえせば任意の $V (> 0)$ に対して、

$$S(x, T) = 3V \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} x \sqrt{V}$$

もつからばそのとき $S(x-Vt, V)$ は V を伝播速度として
 もつ, $x = \pm\infty$ で 0 となる travelling wave (ソリトン)
 もあらわす. この場合 $S(x, V)$ は平行移動を除いて一意
 にきまる. そこで $S(0, V) = 3V$ になるものに正規化し
 て考へる.

先づ, 方程式(1) は x と t を explicit に含まないので
 に注目する, そのことから(1)の解の族は x および t による平
 行移動に対して不変である. 今 $u(x, t)$ を(1)の一つの解とし
 て, ($x = \pm\infty$ では 0 となるもの) c を或る定数として,

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x+ct, t) = S(x-\theta, c)$$

が x 空間上の任意の有界閉集合の上で一様に存在するとする.
 この制限は明らかに上記の travelling wave である. 又
 c は上述の速度 V にはかならない. この c を eigen-speed
 と稱することにする. この量は x と t の平行移動によつて不
 変であるが, Phase shift⁴ は x を a として, t を b だけ
 からは $a - cb$ だけ変化する.

一方既に述べたごとく, 方程式(1)の初期値問題は一意的に
 解けるので上のような c および θ は(1)の初期値により決定さ
 れる. 初期値 $f(x)$ の汎函数である. (かもとくに c につ
 いては平行移動によつて不変であるので Invariant を汎函数

と云つてよい。このようなものを方程式 (1) の Integral と呼ぼう。くりかえせば integral $C(f) = C(f')$ である。ただし f' は異なつた時刻での $u(x, t)$ の値である。そこで次のように (1) の方程式について可算個の Integral を得る別の方法を述べる。

少し一般論にして、或る函数空間 B を与つて、 $u(t)$ はそこに値をもつた函数 x について、一方 B の各元 u には或る Hilbert 空間での self adjoint な線型寫像 L_u が対応すると假定しよう。* $K(u)$ を別の non linear operator で ($B \rightarrow B$) とし、非線型発展方程式

$$(8) \quad u_t = K(u)$$

を一般に考える。 $L(t) = L(u(t))$ は t によつて変化するが常に unitary equivalent であるように変化すると假定しよう。そうとすれば $L(t)$ の固有値 λ_j は (8) の Integral である。

$L(t)$ が unitary で変化するとは、 $U(t)$ とよぶ unitary operator の族があつて

$$U(t)^{-1} L(t) U(t) \text{ が } t \text{ に indep}$$

であることである。これを t で微分して

$$-U^{-1}U_t U^{-1} L U + U^{-1} L_t U + U^{-1} L U_t = 0$$

つまり unitary operator $U(t)$ は $B(t)$ をある Anti-symmetric operator として $U_t = B U$ を満たす
 2. から $L(t)$ の満たす 3 階式を得る。

$$(9) \quad L_t = [B, L]$$

今, Gardner, Kruskal, & Miura の仕事を参考にし
 て, 彼等は Schrödinger operator $L = D^2 + \frac{1}{6}u$
 の固有値が K-d-V の integral である (u は K-d-V
 の解 $u(x,t)$ に依存する)。この L について

$$B = 24 \left(D^3 + \frac{u}{8} D + D \frac{u}{8} \right)$$

とあり, $[B, D] = K(u)$ を計算すると

$$K(u) = -u u_x + u_{xxx}$$

つまり $u_t = K(u)$ は K-d-V に外ならないこと
 になる。

P. D. Lax は この固有値 $\lambda_j(u)$ が上の eigen speed
 $c_j(u)$ と次の関係にあることを示した。

$$c_j(u) = 4 \lambda_j(u) \quad !$$