

---

**修士論文** (1996年度)

---

# ドリフト・ロスビー波乱流における 渦格子の形成過程に関する研究

九州大学大学院理学研究科物理学専攻  
渡邊 威

## 目次

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| 1 はじめに                      | 749 |
| 2 2次元乱流の性質                  | 750 |
| 2.1 渦度方程式と保存則               | 750 |
| 2.2 エネルギーカスケード理論            | 751 |
| 2.3 秩序渦                     | 753 |
| 2.4 間欠性の問題                  | 754 |
| 3 Charney-Hasegawa-Mima 方程式 | 754 |
| 3.1 ドリフト波乱流                 | 754 |
| 3.2 ロスビー波乱流                 | 756 |
| 3.3 CHM 方程式の特徴              | 756 |
| 4 二重カスケード理論とエネルギースペクトルの構造   | 757 |
| 4.1 保存則                     | 757 |
| 4.2 エネルギースペクトルのスケーリング則      | 757 |
| 5 直接数値シミュレーション              | 760 |
| 5.1 数値計算スキーム                | 760 |
| 5.2 境界条件                    | 761 |
| 5.3 NS 乱流から CHM 乱流へのクロスオーバー | 761 |
| 5.4 計算結果                    | 761 |
| 6 構造関数の動的スケーリング則            | 764 |
| 6.1 構造関数の計算                 | 764 |
| 6.2 動的スケーリング則の導出            | 764 |

|   |                             |     |
|---|-----------------------------|-----|
| 7 | まとめと考察                      | 767 |
| A | 準地衡流渦位方程式 (Charney 方程式) の導出 | 769 |
| B | CHM 方程式の保存則の導出              | 772 |

## 1 はじめに

我々が日常目にする流体運動の多くは乱流であり、そのスケールは星雲のような宇宙規模のものから煙草の煙や一瞬のため息に至るまで大小さまざまに及んでいる。それゆえ乱流の問題は多くの自然科学者や工学者の興味と関心を集めてきたテーマであり、研究の歴史も大変古い。

物理学、とりわけ流体力学の分野で考える乱流は、速度、圧力が時間的、空間的に乱れた、レイノルズ数が非常に大きい流れとして理解されている。このような十分に発達した乱流は強い非線形性により流体運動は不規則で、小さな擾動に対し不安定である。この性質は少数自由度のカオス力学系においても観測される特徴であるが、乱流がカオス力学系と大きく異なる点はその自由度の大きさであり、乱流の自由度は時間的な乱ればかりでなく空間的な乱れのため、非常に大きい。

一方この不規則で複雑な流れは、流体力学の基礎方程式である Navier-Stokes (NS) 方程式<sup>1</sup>に支配されていると考えられ、この意味において乱流は決定論的であると言える。NS 方程式の中に現れる非線形項と粘性項の大きさの比はレイノルズ数ではかれ、発達した乱流では非線形項が粘性項に比べ非常に大きい。この非線形項が存在することで発達した乱流の統計法則を基礎方程式から解析的に導くことを困難なものにしている。さらに粘性項が存在することで乱流は散逸系としての特徴を持ち、平衡系近傍の統計力学が使えず、乱流の統計理論の構築を一層困難なものにしている。

ところで一般に十分発達した乱流は3次元であるが、地球の大気、海洋の大規模運動や強い一様磁場中におかれた電磁流体の運動は近似的に2次元運動として記述できる。それゆえ1960年代以降、2次元乱流の研究が理論的、数値的に盛んに行なわれるようになり、3次元乱流とは異なる独特の性質を持つことがわかってきた。特に3次元一様等方乱流における Kolmogorov のエネルギーカスケード理論 (K41)[1] に対して、2次元乱流系は二つの保存量、エネルギーとエントロフィー、の二重カスケード過程によりエネルギー Spektrum が形成されることが調べられている [2, 3, 4]。<sup>2</sup> 特に注目すべきことは、3次元乱流ではエネルギーが高波数側にカスケードするのに対し、2次元乱流ではエネルギーは低波数側にカスケードするという点である。その結果時間が経ってエネルギーは空間的に大きな渦に集中し、大規模構造の形成による自己組織化が引き起こされる [5]。このことは2次元乱流の波数空間における特色であり、3次元乱流と大きく異なる点の一つである。

さらに1980年代になって盛んに行なわれるようになった乱流の直接数値計算の研究により、乱流場における実空間の構造が注目されるようになった。特に2次元減衰性 Navier-

<sup>1</sup>2.1 節の (2.1) 式を見よ。

<sup>2</sup>2.2 節の中で詳しく触れる。

Stokes (NS) 乱流において、コヒーレントな渦<sup>3</sup>が自己組織化し、長い時間安定に存在し続けることが分かった [6, 7, 8]. さらにこのコヒーレントな渦が系のダイナミクスを支配しており、同符号の渦は合体し、より大きな渦となる. エネルギーの輸送はこのダイナミクスと密接につながっていると考えられる.

本論文の研究では、2次元乱流系のモデルの一つである Charney-Hasegawa-Mima (CHM) 方程式で記述されるドリフト・ロスビー波乱流において、小さなスケールで注入されたエネルギーが逆カスケードにより大きなスケールの乱流揺らぎが形成される過程における統計的性質、特に動的性質を数値的、理論的に詳しく調べた.

本論文の構成は以下の通りである. 2節では2次元乱流の持つ性質を3次元乱流の場合と比較しながら Kolmogorov 型の次元解析によるスケーリング理論を通して議論する. 3節では CHM 方程式の導出と方程式が持つ特徴について触れ、4節で CHM 乱流におけるエネルギースペクトルのスケーリング則を導く. 5節では CHM 方程式の直接数値シミュレーションとその結果について解説し、6節で構造関数の計算と解析結果から動的スケーリング則を議論する. 7節で結果のまとめと考察を行なう.

## 2 2次元乱流の性質

本節では2次元乱流と3次元乱流の一般的な違いを考察し、エネルギースペクトルの構造の違いを Kolmogorov 型の次元解析を通して議論する.

### 2.1 渦度方程式と保存則

非圧縮性流体の運動は次の Navier-Stokes (NS) 方程式と連続の方程式により支配されると考える.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.2)$$

ここで  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  は位置  $\mathbf{r}$ , 時刻  $t$  における速度場,  $\rho$  は流体密度で定数,  $P(\mathbf{r}, t)$  は圧力, そして  $\nu$  は動粘性率を表す. (2.1) 式の左辺第二項は慣性項であり, 速度場の移流を表す. また (2.1) 式の右辺第一項は圧力項で, 慣性項とともにエネルギーを保存する. 右辺第二項は散逸項で, エネルギーの熱運動への散逸を表す. また (2.2) 式は連続の方程式から出てくる式で, 流体が非圧縮的である時の条件である. 流れの3次元性と2次元性の違いは (2.1) 式を渦度  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  の式に書き換えると明らかになる. (2.1) 式に  $\text{rot}$  を作用すると,

$$\text{3次元:} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (2.3)$$

$$\text{2次元:} \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega, \quad (2.4)$$

---

<sup>3</sup>2.3節の中で詳しく触れる.

と書き換えられる。ただし2次元の場合は  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ ,  $\omega = (0, 0, \omega_z)$  である。さらに (2.2), (2.4) 式は流線関数  $\psi(\mathbf{r}, t)$  ( $\mathbf{u} = -\nabla \times \psi \mathbf{z}$ ) に関する閉じた方程式に書き換えることができ、次の様になる。

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - (\nabla \psi \times \mathbf{z}) \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) = \nu \nabla^4 \psi, \quad (2.5)$$

$$\omega_z = \nabla^2 \psi. \quad (2.6)$$

つまり、2次元乱流は一つのスカラー関数  $\psi$  により記述できることになる。

さて、2次元乱流では非粘性の極限で全エネルギー  $W$  と全エンストロフィー  $Q$  が保存されることが、(2.1), (2.2), (2.4) 式を使って示される。 $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \omega$ ,  $\omega^2 = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \omega) - \mathbf{u} \cdot (\nabla^2 \mathbf{u})$  を使い、かつ流体が周期境界か剛体境界で囲まれていれば、(2.1) 式に  $\mathbf{u}$  を演算したものを上記の境界条件で積分すると、

$$\frac{\partial W}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 dV = -\nu \int |\omega|^2 dV \quad (2.7)$$

となる。 $\nu = 0$  の完全流体では  $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$  となり、エネルギーは保存される。ただし3次元乱流の場合は (2.3) 式の右辺第一項が渦度の伸長や圧縮を表すことから、渦度  $\omega$  の発散が起これば  $\nu \rightarrow 0$  の極限でもエネルギー散逸が起こる可能性がある。2次元乱流の場合、渦度  $\omega_z$  は移流により流線に沿って流されるだけであり、非粘性の極限では増えることも減ることもない。

同様にして、 $\omega$  を (2.4) 式に演算し、 $\omega \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \mathbf{u} \cdot \nabla (\frac{1}{2} \omega^2)$ ,  $(\nabla \times \omega)^2 = \nabla \cdot (\omega \times (\nabla \times \omega)) - \omega \cdot (\nabla^2 \omega)$  を使って先ほどの境界条件で積分すると、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} |\omega|^2 dV = -\nu \int (\nabla \times \omega)^2 dV \quad (2.8)$$

となり、2次元乱流では  $\nu = 0$  で全エンストロフィー  $Q$  は保存されることがわかる。3次元乱流では (2.8) 式の右辺に  $\int \omega \cdot (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} dV$  の項が加わるので、 $\nu = 0$  でもエンストロフィーは保存されないことに注意すべきである。

## 2.2 エネルギーカスケード理論

3次元の一様等方乱流中において成立する普遍的な統計法則を基礎方程式 (2.1), (2.2) 式から導き出すことは、方程式の持つ強い非線形性のため、まだ成功していない。しかし大きなスケールでのエネルギーの供給と小さなスケールでのエネルギーの散逸が釣り合って平衡状態に達している領域では普遍的な統計法則が成り立つと考えられている。この領域のことを慣性小領域と呼ぶが、1941年に Kolmogorov はこの領域におけるエネルギースペクトルの形を簡単な仮定に基づいて理論的に決定することに成功した [1]。

今スケール  $L$  で注入されたエネルギーは途中で失われることなく小さなスケール（高波数領域）に流れ込むとする。これは渦の分裂過程に対応すると考えられる。Kolmogorov はこのエネルギー輸送過程においてエネルギー輸送率  $\epsilon$  は時間的、空間的に一定であると仮定し、流速のフーリエ成分  $v_k$  と波数  $k$  を用いて次元解析的に次の様に表現した。

$$\epsilon \sim v_k^2 / t \sim k v_k^3. \quad (2.9)$$

ただし,  $\epsilon$  は定数である. エネルギースペクトル  $E(k)$  は空間スケール  $(k+dk)^{-1}$  と  $k^{-1}$  の中にあるエネルギーの量を表し,

$$W = \int_0^\infty E(k) dk \quad (2.10)$$

で定義される. これは乱流によるエネルギーカスケードを表す最も重要な統計量である. 次元解析から  $E(k) \sim k^{-1} v_k^2$  と表現できるので, (2.9) 式を使って  $v_k$  を消去すると,

$$E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.11)$$

となる. (2.11) 式は Kolmogorov スペクトル, 又は  $-5/3$  乗則と呼ばれ, 乱流の風洞実験等で実際に観測されている. 3次元乱流ではエネルギーのみが保存されることがエネルギースペクトルの決定に反映されている.

一方, 2次元乱流では  $\nu = 0$  の時, エネルギーの外にエンストロフィーが新たに保存量として加わる. (2.8) 式から 2次元乱流ではエンストロフィー  $Q$  は時間的に常に減衰することがわかる. これは (2.7) 式が

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -2\nu Q = -\epsilon \quad (2.12)$$

であることから,  $\epsilon$  は最終的に 0 になるため, エネルギーカスケード理論を適用することはできない. 代わりにエンストロフィーカスケードを特徴づける量  $\eta = -\frac{dQ}{dt}$  (エンストロフィー輸送率) を考え,  $\eta$  がエネルギースペクトルを決定する基本パラメータであるとする次元解析が考えられた [2].  $\eta$  は次元解析から

$$\eta \sim k^2 v_k^2 / t \sim k^3 v_k^3 \quad (2.13)$$

で与えられるので, エンストロフィーがカスケードする慣性小領域でのエネルギースペクトルは (2.13) 式を使って

$$E(k) \sim \eta^{2/3} k^{-3} \quad (2.14)$$

で与えられる. 今, 外部からエネルギーを注入する波数を  $k_f$  とすると, エンストロフィーは  $k > k_f$  の領域にカスケードしていき散逸される. その時のスペクトルが (2.14) 式で与えられる. エンストロフィーの波数  $k$  の依存性がエネルギーよりも大きいことを考慮すると, 高波数領域ではエンストロフィーの方がエネルギーよりもより高い割合で散逸されると考えられるため,  $k > k_f$  はエンストロフィーのカスケードが支配的な領域である. このことは  $k < k_f$  の領域ではエネルギーのカスケードが支配的であり, エネルギーは低波数側にカスケードしていくと考えることができる. よって 2次元乱流における慣性小領域でのエネルギースペクトルは  $k_f$  を境にして二つの部分に分かれる.

$$E(k) \sim k^{-3} \quad k > k_f, \quad (2.15)$$

$$E(k) \sim k^{-5/3} \quad k < k_f. \quad (2.16)$$

エネルギーの低波数側へのカスケードはエネルギー逆カスケードと呼ばれており, 理論的, 数値的 [2, 3, 4], 又は実験的 [9] な研究から確認されている. この二重カスケード機構の存在は 2次元乱流に独特の性質であり, 特にエネルギーの逆カスケード過程は時間が経過するにつれエネルギーが大きな渦に集中し, 大規模構造が卓越した場の形成が見られることを示唆している.

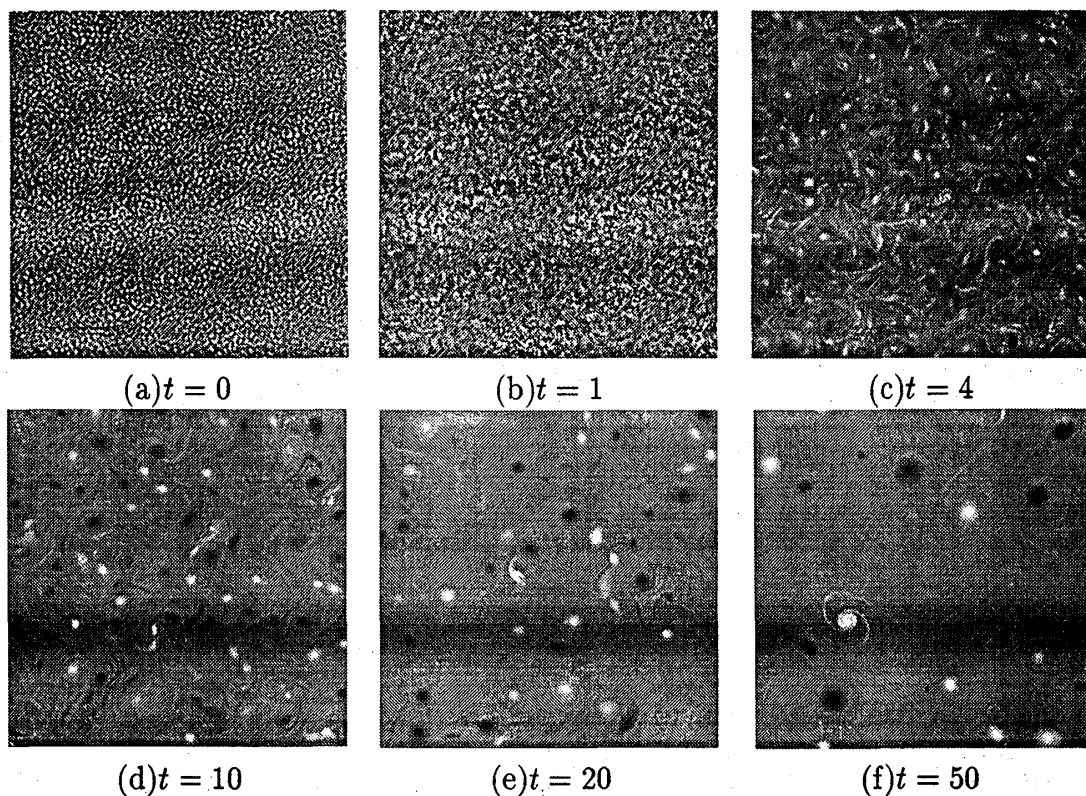


図 1: 2次元減衰性 NS 乱流の渦度場  $\omega_z$  の時間発展の様子. 白の部分は正の渦度を表し, 黒の部分は負の渦度を表す.

### 2.3 秩序渦

エネルギーの逆カスケード過程は2次元乱流の波数空間における大きな特色である. 一方近年の乱流の直接数値計算の研究を通して, 実空間における秩序渦 (coherent vortices) の存在が明らかにされ, この秩序渦が乱流場のダイナミクスを支配していることがわかった [6, 7, 8]. 秩序渦が2次元乱流において果たしている役割は, 2次元減衰性 NS 方程式の時間発展を通して詳しく調べられている. 具体的には (2.5) 式を適当な初期条件の下で数値積分するわけであるが, その一例を図 1 に示す. 初期条件は整った形の渦を持たないランダムな渦度場から出発し, 外力を加えず自由減衰の時間発展を調べる.<sup>4</sup> この時間発展は次の三つのステージに分類されることがわかっている. 第一ステージでは系はランダムな渦度場から秩序渦の集団に向けて自己組織化を起こす. 第二ステージでは秩序渦が系のダイナミクスを支配し, 相互移流を通して同符号の循環を持つ渦は臨界距離以内に近づくと合体し, より大きな渦へと発展していく. 最終的には異符号の渦の一組のペアが双極子構造を形成し, 最後のステージではこの双極子構造が拡散的に減衰する. 特に第二ステージでの秩序渦集団の時間発展に対して, その統計的性質が近年詳しく調べられており, 秩序渦の諸量を用いて表現されるスケーリング理論 [10, 11, 12] が大きな成功を収めている.

<sup>4</sup>ここで行なわれたシミュレーションの計算方法は後に説明されるものと同じである.

## 2.4 間欠性の問題

Kolmogorov 型の次元解析によるカスケード理論は乱流の現象論であり、エネルギー輸送率  $\epsilon$  がスケールに関係なく空間的に一様である、という仮定に大きく寄っている。Landau は空間スケールが小さくなると乱れの分布は空間的に一様でなくなるため、小さなスケールでの  $\epsilon$  の揺らぎが大きくなることを指摘した。この問題は乱流における間欠性の問題としてとらえられている。3次元一様等方乱流における  $\epsilon$  の揺らぎの統計法則を採り入れたカスケードモデルとしては、対数正規理論 (K62)、 $\beta$ モデル、多重フラクタル理論、対数ポワソン分布、など多くの現象論的モデルがあり、速度構造関数<sup>5</sup> の高次モーメントの異常なスケールリング則の振舞いを定性的に説明している [13]。

一方、2次元乱流では実空間における秩序渦の存在のため、渦度場の統計性は正規分布から大きくずれることが知られている。これは渦度の大きい領域が局在しているためであり、乱れは空間的に一様ではなくなると考えられる。

## 3 Charney-Hasegawa-Mima 方程式

本節ではドリフト波乱流を記述する簡単なモデル方程式である Hasegawa-Mima(HM) 方程式の導出と方程式が持つ特徴について調べていく。また HM 方程式は惑星大気のロスビー波を記述する Charney 方程式と同じ構造を持つことから Charney-Hasegawa-Mima (CHM) 方程式と呼ばれる。

### 3.1 ドリフト波乱流

プラズマ中に強い磁場が存在する時、時間スケールがイオンサイクロトロン周期より十分長く、かつ磁場に垂直な面内でほとんど2次元的な静電ポテンシャルの揺らぎを記述する簡単な方程式が Hasegawa と Mima によって以下のように導出された [17]。

まず方程式を導く際に電子の温度  $T_e$  はイオンの温度  $T_i$  より十分大きく、乱れは波と粒子の相互作用が無視できるほど発達していると仮定する。  $T_e \gg T_i$  であるということは、イオンを冷たい流体として扱うことを意味する。また電子の慣性は非常に小さいので、磁場の方向に急速に動くことができ、磁場方向の電荷の偏りは直ちに中和されると考える。つまり静電場は磁場に垂直な平面内の2次元ベクトルである。

モデルを構成する方程式は磁場に平行な成分のイオンの慣性を無視した連続の方程式

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot [n_0(\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_P)] = 0, \quad (3.1)$$

を用いる。ただし  $\nabla_{\perp}$  は磁場  $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$  に垂直な成分の divergence operator である。  $n$  と  $n_0$  はイオン密度  $n_i$  の摂動部分と非摂動部分であり、  $n_i = n_0(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}, t)$  である。また  $\mathbf{v}_E$  は磁化されたプラズマに電場  $\mathbf{E} = -\nabla_{\perp}\phi$  が加わった時、磁力線を横切るドリフト運動を表す

<sup>5</sup> 距離  $r$  だけ離れた二点の速度差の縦成分の大きさを  $\Delta u(r)$  とすると、速度構造関数は  $\langle (\Delta u(r))^q \rangle \sim r^{\zeta(q)}$  の様に振舞う。K41 では  $\zeta(q) = q/3$  である。

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトであり,  $\mathbf{v}_P$  は電場が時間的に変動する場合,  $\mathbf{E}$  方向に新たに加わる分極ドリフトを表し, それぞれ次の様に見えることができる [18].

$$\mathbf{v}_E = -\frac{\nabla_{\perp} \phi \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{v}_P = \frac{1}{\omega_{ci} B} \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp} \phi - (\mathbf{v}_E \cdot \nabla_{\perp}) \nabla_{\perp} \phi \right]. \quad (3.3)$$

ここで  $\omega_{ci}$  はイオンサイクロトロン周波数を表し,

$$\omega_{ci} = \frac{eB}{m_i} \quad (3.4)$$

で定義される ( $e$  はイオンの電荷,  $m_i$  はイオン質量).

さらに電子の密度分布は Boltzmann 分布に従うと仮定し, 準中性条件から  $n$  と電子密度を関係づけると,

$$n = n_0 \left[ \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right) - 1 \right] \approx n_0 \frac{e\phi}{T_e} \quad (3.5)$$

となる.

(3.2), (3.3), (3.5) 式を (3.1) 式に代入しまとめると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla_{\perp}^2 \phi - \frac{B\omega_{ci}e}{T_e} \phi \right) - \frac{1}{B} \{ (\nabla_{\perp} \phi \times \mathbf{z}) \cdot \nabla_{\perp} \} \left\{ \nabla_{\perp}^2 \phi - \frac{B^2 e}{m_i} \log\left(\frac{n_0}{\omega_{ci}}\right) \right\} = 0 \quad (3.6)$$

となる. ただし導出の過程で次の関係式を使っている.

$$n_0 \nabla_{\perp} \left( \frac{\nabla_{\perp} \phi \times \mathbf{B}}{B^2} \right) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{n_0}{\omega_{ci} B} \nabla_{\perp} \left( \frac{\nabla_{\perp} \phi \times \mathbf{B}}{B^2} \cdot \nabla_{\perp} \right) \nabla_{\perp} \phi = \frac{n_0}{\omega_{ci} B} \left( \frac{\nabla_{\perp} \phi \times \mathbf{B}}{B^2} \cdot \nabla_{\perp} \right) \nabla_{\perp}^2 \phi. \quad (3.8)$$

ここでイオンラーモア半径

$$\rho_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i \omega_{ci}}}, \quad (3.9)$$

とイオンサイクロトロン周波数  $\omega_{ci}$ , さらに適当なシステムサイズ  $L$  を用いて (3.6) 式の変数の無次元化を次の様に行なう.

$$\omega_{ci} t \rightarrow t, \quad \frac{e\phi}{T_e} \rightarrow \phi, \quad \frac{x}{L} \rightarrow x, \quad \frac{y}{L} \rightarrow y, \quad \frac{L}{\rho_s} \rightarrow \lambda. \quad (3.10)$$

結局無次元化された (3.6) 式は,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi) - \{ (\nabla \phi \times \mathbf{z}) \cdot \nabla \} \left\{ \nabla^2 \phi - \lambda^2 \log\left(\frac{n_0}{\omega_{ci}}\right) \right\} = 0 \quad (3.11)$$

となる. ただし  $\nabla_{\perp} = \nabla$  と置いた. (3.11) 式を Hasegawa-Mima 方程式と呼ぶ.

### 3.2 ロスビー波乱流

Hasegawa-Mima 方程式は回転する惑星の表面における大気や海洋の大規模運動の考察において、地衡流平衡にある流れの時間発展を近似的に記述するモデルとして導出された Charney 方程式と全く同じ構造をもち、次の様である [5, 19].

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 h - \lambda^2 h) - \{(\nabla h \times \mathbf{z}) \cdot \nabla\} \left\{ \nabla^2 h - \lambda^2 \log\left(\frac{H_0}{f}\right) \right\} = 0. \quad (3.12)$$

ここで、 $h$  は  $\mathbf{z}$  方向への大気表面変位を表し、 $H_0$  は大気の平均的な深さを表す。また  $f$  はコリオリパラメータの局所的な値を表し、 $\lambda$  はシステムサイズ  $L$  とロスビー半径

$$R = \frac{\sqrt{gH_0}}{f}, \quad (3.13)$$

の比を表す。(3.12) 式は準地衡流渦位方程式とも呼ばれ、Appendix A にその導出を示す。

### 3.3 CHM 方程式の特徴

CHM 方程式は波の効果が無視できるほどの強い乱流状態では、次の様に書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi) + J(\phi, \nabla^2 \phi) = 0. \quad (3.14)$$

ここで、 $J(a, b) = a_x b_y - a_y b_x$  は Jacobian operator を表す。(3.14) 式は  $\lambda \rightarrow 0$  の極限で (2.5) 式の非粘性の場合の渦度方程式に完全に一致する。つまり  $\lambda^{-1}$  より非常に小さいスケールでは CHM 方程式は 2 次元 NS 方程式と同じダイナミクスを示し、2 節で議論した統計的性質がこのスケールでは成り立つと考えられる。逆に言えば、 $\lambda \neq 0$  の場合は CHM 方程式に特徴的なスケールが存在することになり、 $\lambda^{-1}$  より大きなスケールでは CHM 方程式に特徴的なダイナミクスと統計的性質が見られると考えられる。このことは次の様に考えても良い。今 (3.14) 式に  $(\lambda^2 - \nabla^2)^{-1}$  を演算すると、

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \int D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') J(\phi(\mathbf{r}', t), \nabla_{\mathbf{r}'}^2 \phi(\mathbf{r}', t)) d\mathbf{r}', \quad (3.15)$$

$$D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{\lambda^2 + |\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} = \frac{1}{2\pi} K_0(\lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (3.16)$$

と書き換えられる。ただし  $K_0(z)$  は第二種の変形 Bessel 関数を表す。(3.16) 式は  $\phi$ -field での interaction kernel を表し、 $\lambda^{-1}$  は相互作用の及ぶ範囲と考えて良い。 $\lambda \rightarrow 0$  の極限で相互作用の及ぶ範囲は無限大になり、一方  $\lambda \rightarrow \infty$  の極限では相互作用の及ぶ範囲は局所的になり、 $D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \lambda^{-2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  となる。この考え方は、乱流場における渦のダイナミクスを考える時、渦間相互作用の及ぶ範囲が  $\lambda^{-1}$  程度であることと密接につながってくるため、重要になる。CHM 方程式に特徴的な渦のダイナミクスは、文献 [16] の中で渦が格子状のパターンを形成することが報告されており、vortical quasicrystal と呼ばれている。<sup>6</sup> これは

<sup>6</sup>ここで言う quasicrystal(準結晶)は、固体物理のものとは異なり、疑似結晶あるいは結晶的構造という意味である。

$\lambda^{-1}$  のスケールで渦間相互作用が遮蔽されるためであり,  $\lambda^{-1}$  より大きなスケールの渦のダイナミクスの統計的性質は 2 次元 NS 方程式で良く知られたものとは大きく異なっていると考えられる. 本研究では  $\lambda^{-1}$  より大きなスケールでのドリフト・ロスビー波乱流の発達過程における統計的性質に注目していく.

## 4 二重カスケード理論とエネルギースペクトルの構造

本節では CHM 方程式が 2 次元 NS 方程式から導かれる渦度方程式に類似した方程式であることに注目し, 2 節で議論した 2 次元乱流のカスケード理論と同様のカスケード理論を議論する.

### 4.1 保存則

CHM 方程式 ((3.14) 式) は, 2 次元 NS 方程式と似て 2 つの 2 次の保存量, 全エネルギー  $E$  と全ポテンシャルエントロフィー  $U$ ,

$$E = \frac{1}{L^2} \int -\frac{1}{2} \phi \xi \, d\mathbf{r} = \frac{1}{L^2} \int \frac{1}{2} [(\nabla \phi)^2 + \lambda^2 \phi^2] \, d\mathbf{r}, \quad (4.1)$$

$$U = \frac{1}{L^2} \int \frac{1}{2} \nabla^2 \phi \xi \, d\mathbf{r} = \frac{1}{L^2} \int \frac{1}{2} [(\nabla^2 \phi)^2 + \lambda^2 (\nabla \phi)^2] \, d\mathbf{r} \quad (4.2)$$

を持つことが簡単に示される (Appendix B).  $L^2$  は今考えている領域の面積を表し,  $\xi(\mathbf{r}, t) = \nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi$  はポテンシャル渦度と呼ばれる.

### 4.2 エネルギースペクトルのスケーリング則

(4.1), (4.2) 式は  $\phi$  のフーリエ成分  $\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  を用いて書き換えると,

$$E = \sum_{\mathbf{k}} (k^2 + \lambda^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2, \quad (4.3)$$

$$U = \sum_{\mathbf{k}} k^2 (k^2 + \lambda^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (4.4)$$

となる. 2 次元 NS 乱流における二重カスケード過程との類似から, ドリフト・ロスビー波乱流に対するエネルギースペクトルは  $E$  と  $U$  の二重カスケード過程により形成されると考えられ, Kolmogorov 型の次元解析から次のように得ることができる [14, 15].

まず, CHM 方程式 ((3.14) 式) のフーリエ成分表示

$$\frac{d\phi_{\mathbf{k}}}{dt} = -\frac{1}{k^2 + \lambda^2} \sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{k} \times \mathbf{k}')_z |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \phi_{\mathbf{k}'} \phi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \quad (4.5)$$

から,  $\phi_{\mathbf{k}}$  の次元解析的スケーリングにより,

$$\phi_{\mathbf{k}} \sim \lambda^2 k^{-4} t^{-1} f(k/\lambda) \quad (4.6)$$

となる。<sup>7</sup> ただし  $f(x)$  は無次元関数で、波数  $\lambda$  におけるスケーリングの振舞い方の違いを考慮したものであり、次の様に与えられる。

$$f(x) = \begin{cases} \text{finite} & (x \ll 1) \\ x^2 & (x \gg 1) \end{cases} \quad (4.7)$$

(4.3), (4.4), (4.6) 式からエネルギー輸送率  $\epsilon$  とポテンシャルエンストロフィー輸送率  $\eta$  はそれぞれ

$$\epsilon \sim E/t \sim \lambda^6 k^{-8} \tau_E^{-3} \tilde{f}(k/\lambda), \quad (4.8)$$

$$\eta \sim U/t \sim \lambda^6 k^{-6} \tau_U^{-3} \tilde{f}(k/\lambda) \quad (4.9)$$

となる。ただし  $\tilde{f}(x)$  は  $\tilde{f}(x) = (1+x^2)f(x)^2$  で定義される無次元関数である。ここではエネルギーが逆カスケードする領域とポテンシャルエンストロフィーがカスケードする領域で  $\epsilon, \eta$  は一定であると仮定して、両カスケード領域で特徴的な時間スケール  $\tau_E$  (eddy turnover time) と  $\tau_U$  を用いている。(4.8), (4.9) 式から直ちに

$$\tau_E \sim \lambda^2 \epsilon^{-1/3} k^{-8/3} g(k/\lambda), \quad \tau_U \sim \lambda^2 \eta^{-1/3} k^{-2} g(k/\lambda) \quad (4.10)$$

と求められる。ただし  $g(x) \equiv [\tilde{f}(x)]^{1/3}$  で定義される。<sup>8</sup> 今エネルギーを注入する波数を  $k_f$  とする。 $k < k_f$  の領域はエネルギーの輸送が支配的な領域であり、 $k > k_f$  の領域はポテンシャルエンストロフィーの輸送が支配的な領域であると考え、エネルギースペクトル  $E(k)$  は (4.3) 式から

$$E(k) \sim \lambda^6 k^{-9} t^{-2} \tilde{f}(k/\lambda) \quad (4.11)$$

で与えられるので、両カスケード領域でのスペクトルの形は (4.10), (4.11) 式から

$$E(k) \sim \lambda^2 \epsilon^{2/3} k^{-11/3} g(k/\lambda), \quad (4.12)$$

$$E(k) \sim \lambda^2 \eta^{2/3} k^{-5} g(k/\lambda) \quad (4.13)$$

となる。上に求めたスペクトルの漸近形を決定するため、次の二つのケースを考える。

$$\lambda \ll k_f, \quad k_f \ll \lambda. \quad (4.14)$$

(4.5) 式の中で  $k \ll \lambda$  のケースを考える時、CHM 方程式の  $\lambda$  依存性は  $t \rightarrow t/\lambda^2$  と置き換えることによって時間の変数の中に押し込めることができる。つまりダイナミクスの  $\lambda$  依存性はあからさまには入ってこない。考えている波数領域は時間的に定常であり、時間依存性はない。それで  $\phi_k$  の強度は  $\lambda$  に依存せず、エネルギースペクトル  $E(k)$  は  $\lambda^2$  に比例する。この  $\lambda^2$  は (4.3) 式の第二項から入ってくるものである。結果としてスケーリング関数  $g(x)$  は  $x \ll 1$  で有限であるべきである。一方  $k \gg \lambda$  のケースでは CHM 方程式は 2 次元 NS 方程式の特徴を持ち、それで統計量は  $\lambda$  に依存しない。これは  $x \gg 1$  で  $g(x) = x^2$  になることと同等である。この考察から  $\tau_E, \tau_U$  と  $E(k)$  は  $k \ll \lambda$  と  $k \gg \lambda$  では全く異なることがわかる。これらの結果をまとめたものを表 1 と図 2 に記す。

<sup>7</sup> この次元解析は普通の次元解析とは多少異なる。なぜなら  $k$  と  $\lambda$  は同じ次元を持つからである。ここでは  $k$  と  $\lambda$  の違いに注意して次元解析を行なった。

<sup>8</sup> 結局  $x \gg 1$  で  $g(x) = x^2$ ,  $x \ll 1$  で  $g(x) \sim \text{finite}$  の様に振舞う。

○  $\lambda \ll k_f$

|          | $k \ll \lambda$                      | $\lambda \ll k \ll k_f$    | $k_f \ll k$         |
|----------|--------------------------------------|----------------------------|---------------------|
| $\tau_E$ | $\lambda^2 \epsilon^{-1/3} k^{-8/3}$ | $\epsilon^{-1/3} k^{-2/3}$ |                     |
| $\tau_U$ | $\lambda^2 \eta^{-1/3} k^{-2}$       | $\eta^{-1/3}$              |                     |
| $E(k)$   | $\lambda^2 \epsilon^{2/3} k^{-11/3}$ | $\epsilon^{2/3} k^{-5/3}$  | $\eta^{2/3} k^{-3}$ |

○  $\lambda \gg k_f$

|          | $k \ll k_f$                          | $k_f \ll k \ll \lambda$       | $\lambda \ll k$            |
|----------|--------------------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| $\tau_E$ | $\lambda^2 \epsilon^{-1/3} k^{-8/3}$ |                               | $\epsilon^{-1/3} k^{-2/3}$ |
| $\tau_U$ | $\lambda^2 \eta^{-1/3} k^{-2}$       |                               | $\eta^{-1/3}$              |
| $E(k)$   | $\lambda^2 \epsilon^{2/3} k^{-11/3}$ | $\lambda^2 \eta^{2/3} k^{-5}$ | $\eta^{2/3} k^{-3}$        |

表 1: 異なる波数領域における特徴的な時間スケール  $\tau_E, \tau_U$  とエネルギースペクトル  $E(k)$  の漸近形を表す. 上の表 (下の表) は  $\lambda \ll k_f$  ( $k_f \ll \lambda$ ) のケースである. ただし  $k_f$  はエネルギーを注入する波数を表す.  $k \ll k_f$  ( $k \gg k_f$ ) でのエネルギースペクトルの漸近形はエネルギー (ポテンシャルエンストロフィー) のカスケード過程によって決定される.

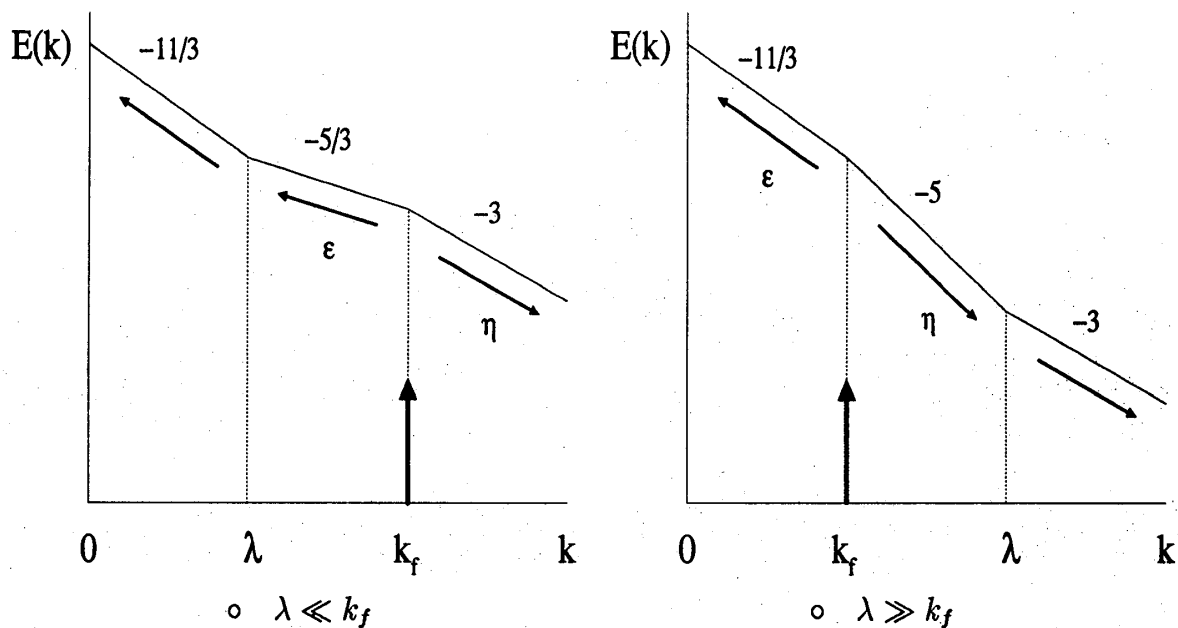


図 2: エネルギースペクトルの漸近形の概略図

## 5 直接数値シミュレーション

乱れの発達過程を詳しく調べるために, CHM 方程式 ((3.14) 式) に外力と散逸を加え直接数値シミュレーションを行なう. CHM 方程式は場  $\phi$  に関する非線形偏微分方程式であり, 数値的に解くためにさまざまな方法があるが, 方程式を精度よく解く計算スキームとして良く知られている擬スペクトル法を用いる.

### 5.1 数値計算スキーム

非圧縮性流体の式等の数値計算を行なう際, よく使われる計算スキームとして擬スペクトル法がある [20]. これは空間方向の偏微分を物理空間で差分化すると微分の精度が格子点の数で制限されて十分な精度が得られないが, 方程式の従属変数を物理空間からフーリエ空間に変換し, そのフーリエ係数の時間に関する常微分方程式に直し, 波のモードの合成として解を求める方法である. ただし CHM 方程式は 2 次の非線形項を含むため, フーリエ空間でこの項を計算すると  $O(N^4)$  の演算が必要になる. そこで積を計算する前にそれぞれの場の量を高速フーリエ変換 (FFT) を使って物理空間に変換し, 物理空間の格子点上で非線形項の積を計算し, フーリエ空間に戻すという操作をすると,  $O(N^2 \log N)$  の演算に減らすことができ, 計算時間を大幅に短縮することができる. この一連の手順をまとめたものを表 2 に示す.

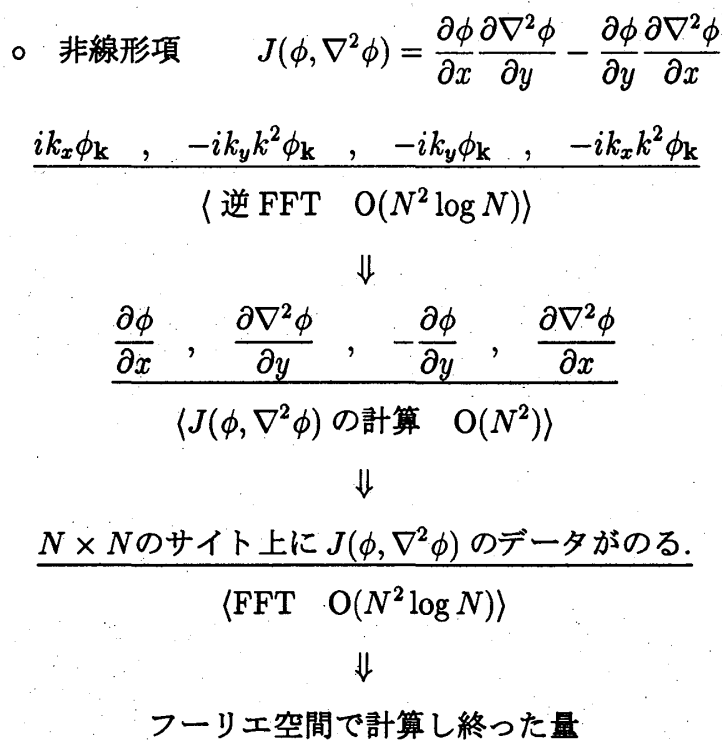


表 2: 擬スペクトル法による非線形項の計算スキームの流れ図

## 5.2 境界条件

乱れの発達過程を数値的に調べるために、ランダムエネルギー注入と散逸を考慮する。エネルギー注入と散逸を入れた CHM 方程式は  $\phi$  のフーリエ成分で書くと次の様である。

$$\frac{d\phi_{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{1}{k^2 + \lambda^2} \left[ - \sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{k} \times \mathbf{k}')_z |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \phi_{\mathbf{k}'} \phi_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'} + \nu (|\mathbf{k}|^2)^p (-|\mathbf{k}|^2 \phi_{\mathbf{k}}) + F(\mathbf{k}, t) \right]. \quad (5.1)$$

散逸項は hyperviscosity で  $p = 2$  と置き、超粘性係数  $\nu$  は  $\nu = 3.0 \times 10^{-8}$  に固定した。  $F(\mathbf{k}, t)$  は波数空間での外力を表し、  $51 \leq k_f \leq 54$  の狭いシェルに加える。ただし、  $F(\mathbf{k}, t) = i(\mathbf{k} \times \mathbf{f}(\mathbf{k}, t))_z$  で与えられ、  $\mathbf{f}(\mathbf{k}, t)$  の各成分の実部及び虚部は各時刻  $t$  において、平均値 0、分散  $\sqrt{0.5}$  の正規乱数と置いた。又、システムサイズは  $L = 2\pi$  に固定し、  $\lambda = 50$  と置いた。シミュレーションは物理空間の解像度  $256 \times 256$  で周期境界条件の下、初期値は外力に比べて無視できるほどの小さいランダムな値で、  $\phi_{\mathbf{k}} \approx 0$  から出発する。数値積分は 4 次の Runge・Kutta 法を用い、時間間隔は  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$  とした。(5.1) 式をそのまま解くと計算で得る物理量は  $\phi(\mathbf{r}, t)$  となるが、ここではポテンシャル渦度  $\xi(\mathbf{r}, t) = \nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi$  の時間発展を調べた。

## 5.3 NS 乱流から CHM 乱流へのクロスオーバー

時間発展の過程において外力を加えた直後、エネルギーは  $k_f$  の周りの狭い波数バンド領域に局在しているが、やがて低波数側にカスケードしていく。乱流揺らぎの発達過程は二つの時間領域に分けられる。エネルギー注入の過程ではエネルギースペクトルはシングルピーク構造を持ち、そのピークの位置は低波数領域に移動していく。もしピーク位置が  $\lambda$  に到達した時の時間を  $t_\lambda$  と定義すれば、2 次元 NS 方程式に特徴的な渦は  $t < t_\lambda$  の間に形成される。  $t < t_\lambda$  では渦の空間分布はランダムであるが、  $t > t_\lambda$  では準結晶的な構造を形成し、エネルギーの低波数側への輸送が非常に緩やかになる [16]。今時刻  $t$  におけるエネルギースペクトルのピークの位置を  $k_m(t)$  と定義すると、  $k_m(t)$  は時間発展と共に減少していく。  $\lambda \ll k_m(t) < k_f$  の時間領域では系は 2 次元 NS 方程式に似た振舞いを示す。この時 4 節で行なった議論を  $\lambda \rightarrow 0$  の場合に行なうと、  $k_m(t) \sim \epsilon^{-1/2} t^{-3/2}$  となる。  $\lambda \sim k_m(t_\lambda)$  で定義される時間

$$t_\lambda \sim \epsilon^{-1/3} \lambda^{-2/3} \quad (5.2)$$

は 2 次元 NS 乱流の振舞いから CHM 乱流に特徴的な振舞いに移行する特徴的な時間を示していると考えられる。<sup>9</sup>

## 5.4 計算結果

ポテンシャル渦度場  $\xi$  の時間発展の様子を図 3 に示す。小さなスケールの渦が相互移流と合併を通して大きな渦へと発展していく様子がわかる。十分な時間が経過した後は、渦の

<sup>9</sup> 本研究のシミュレーションは解像度が小さいため、広い波数領域に渡ってエネルギーをカスケードさせることができない。そのため実際にクロスオーバーが置きているのをこの計算結果からは議論できない。

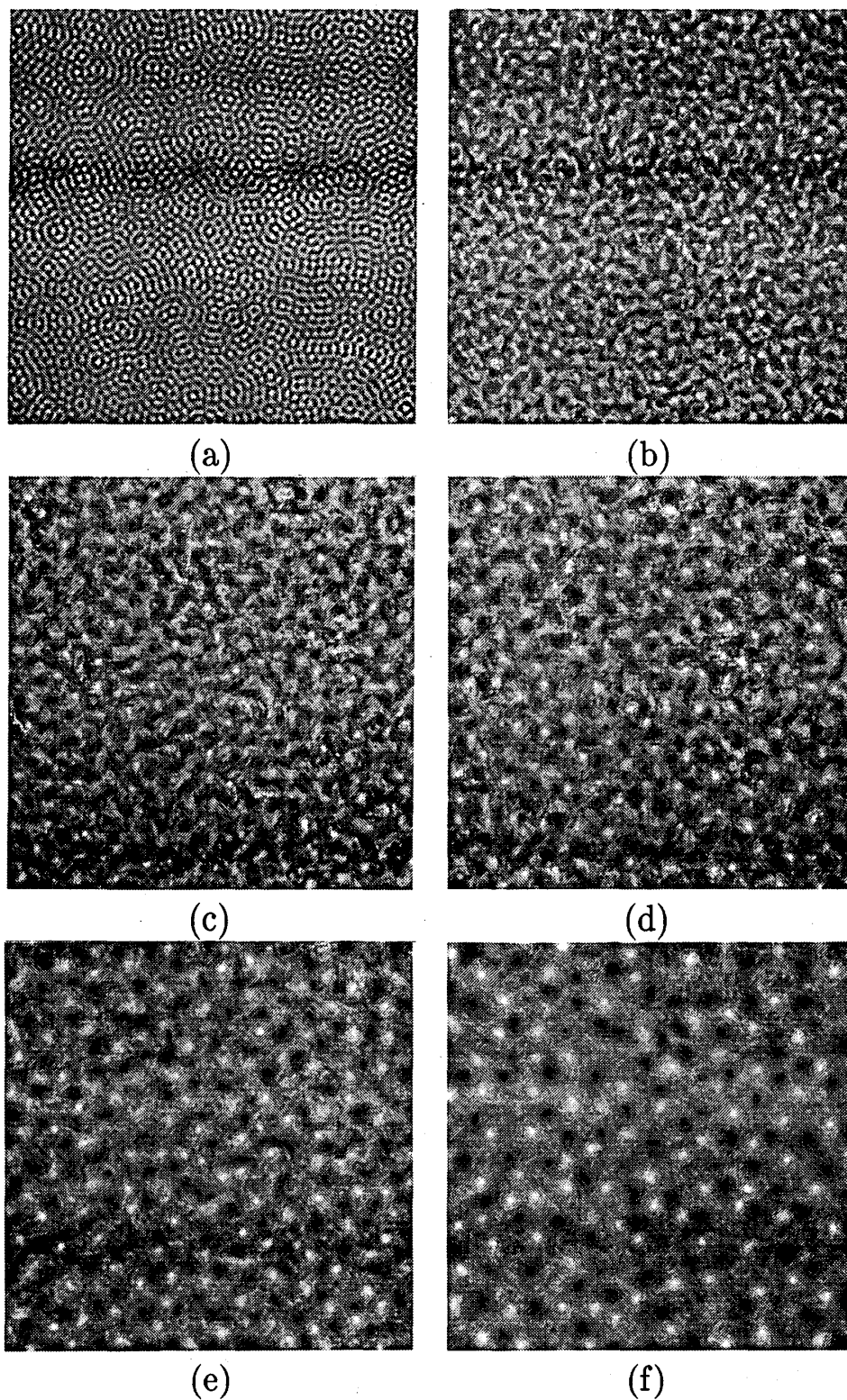


図 3: ポテンシャル渦度場  $\xi = \nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi$  の時間発展の様子. 初期条件は  $\phi(\mathbf{r}, 0) \simeq 0$  とした. (a)  $t = 2$ , (b) 20, (c) 40, (d) 60, (e) 100, (f) 200 の時刻に対するものである. 白 (黒) の領域は  $\xi > 0 (< 0)$  を表す.

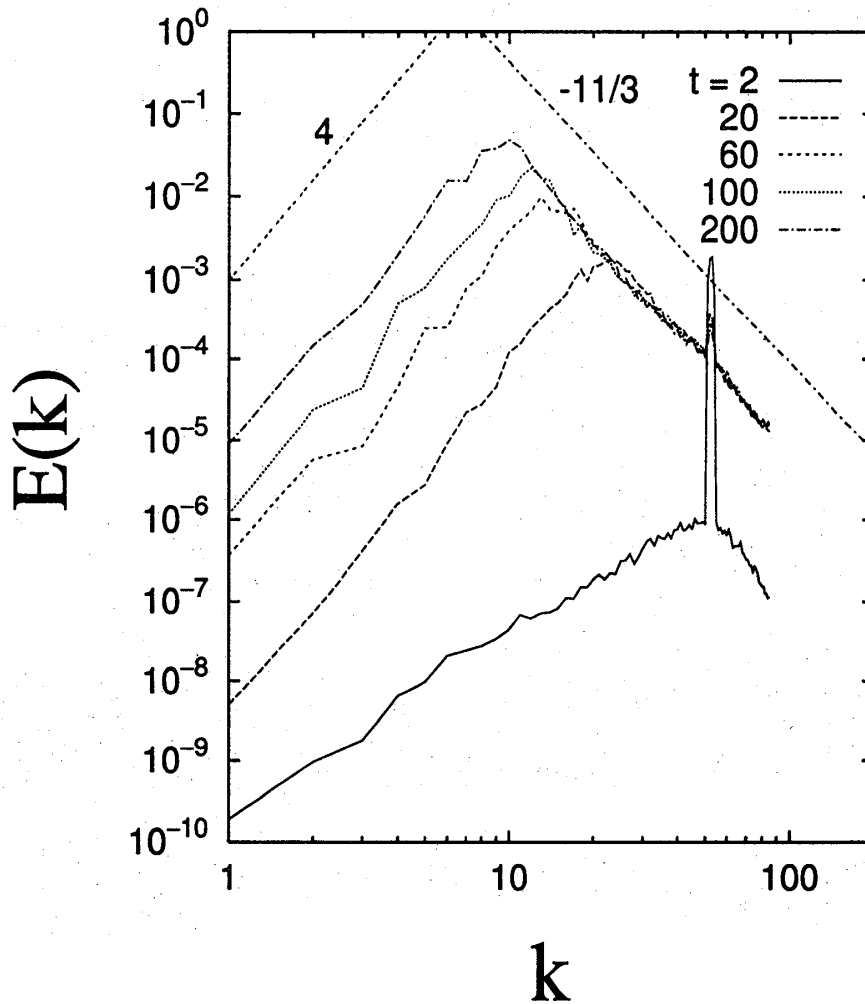


図 4: エネルギースペクトルの時間発展の様子. 定常なスペクトル領域で  $k^{-11/3}$  のスペクトルが形成されていることがわかる.

移流はほとんど起こらず, 格子状の構造が形成される. これは  $t \gg t_\lambda$  で観測される CHM 乱流の渦の大きな特徴である. この時間発展に対応するエネルギースペクトルの変化の様子を図 4 に示す. 始めは  $k_f$  に局在していたスペクトルのピークは幅が広くなりながら, 低波数側に移動していることがわかる. これはコヒーレントな渦の形成と渦の合体による特徴的なスケールの増大に対応していると考えられる. さらに  $k < \lambda$  の定常なスペクトルの領域はエネルギーの逆カスケード過程に対応しており, スペクトル  $k^{-11/3}$  が形成されていることがわかる. 本研究の数値シミュレーションはシステムサイズが小さいため, ポテンシャルエンストロフィーのカスケード領域が狭く,  $k > k_f$  でのスペクトルはシミュレーションの結果からは議論できない.

## 6 構造関数の動的スケーリング則

### 6.1 構造関数の計算

前節の直接数値シミュレーションの結果, ポテンシャル渦度場での渦の準結晶的な構造の形成過程を見てきたが, ここではその過程における系の特徴的な空間スケールである同符号の渦間の距離  $l$  に注目する.  $l$  の時間依存性を詳しく調べるために, ポテンシャル渦度場  $\xi$  の構造関数  $S(k, t)$  をそれぞれの時間  $t$  において計算する.

$$S(k, t) = \left\langle \left| \int \xi(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right|^2 \right\rangle. \quad (6.1)$$

ここで  $\langle \dots \rangle$  は波数空間における角度方向の平均を表す. 構造関数  $S(k, t)$  はシングルピークを持ち, 特徴的な波数  $\bar{k}(t)$  が存在することが分かる. そこでこの  $\bar{k}(t)$  の時間発展を調べることで, ポテンシャル渦度場における特徴的なスケール  $l = 2\pi/\bar{k}(t)$  の動的性質を調べることができる.  $\bar{k}(t)$  は構造関数を用いて次の様に定義する.

$$\bar{k}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{\lambda} k S(k, t)}{\sum_{k=0}^{\lambda} S(k, t)}. \quad (6.2)$$

$S(k, t)$  は  $k < \lambda$  で鋭いシングルピークを持つので, ピーク位置は (6.2) 式で定義される  $\bar{k}(t)$  で非常によく近似される. さらに構造関数のピークの高さを  $S_{max}(t)$  と置き,  $S_{max}(t)$  の時間発展も調べる.

図5に  $\bar{k}(t)$  と  $S_{max}(t)$  の時間発展の様子を示す. 予想される通り  $\bar{k}(t)$  は時間発展と共に減少していくことがわかる. これはエネルギーの逆カスケード過程と密接につながっていると考えられる. 一方で  $S_{max}(t)$  は時間発展と共に増大していく. 図からそれぞれは時間  $t$  のべき則に従って時間発展すると考えられ,

$$\bar{k}(t) \sim t^{-0.37}, \quad S_{max}(t) \sim t^{1.8} \quad (6.3)$$

程度であると見積もられる.

### 6.2 動的スケーリング則の導出

系の特徴的なスケール  $l$  の時間発展による増大は, 渦の移流と合併によるものであり, この準結晶への自己組織化過程はフーリエ空間におけるエネルギー逆カスケード過程と密接につながっていると考えられる. ここではエネルギー逆カスケードとの対応から, 先に議論した Kolmogorov 型の次元解析を用いて  $\bar{k}(t)$  と  $S_{max}(t)$  のべきの値を見積もる. 4節ではエネルギー輸送率の次元解析から eddy turnover time  $\tau_E$  を求めた. この時間スケールはある波数  $k$  に相当する eddy の life time とみなすことができる. 一方, エネルギー注入が始まって時間  $t$  が経過した後消散する eddy の特徴的な波数  $k_t$  は  $k \ll \lambda$  では

$$\epsilon \sim \lambda^6 k_t^{-8} t^{-3} \quad (6.4)$$

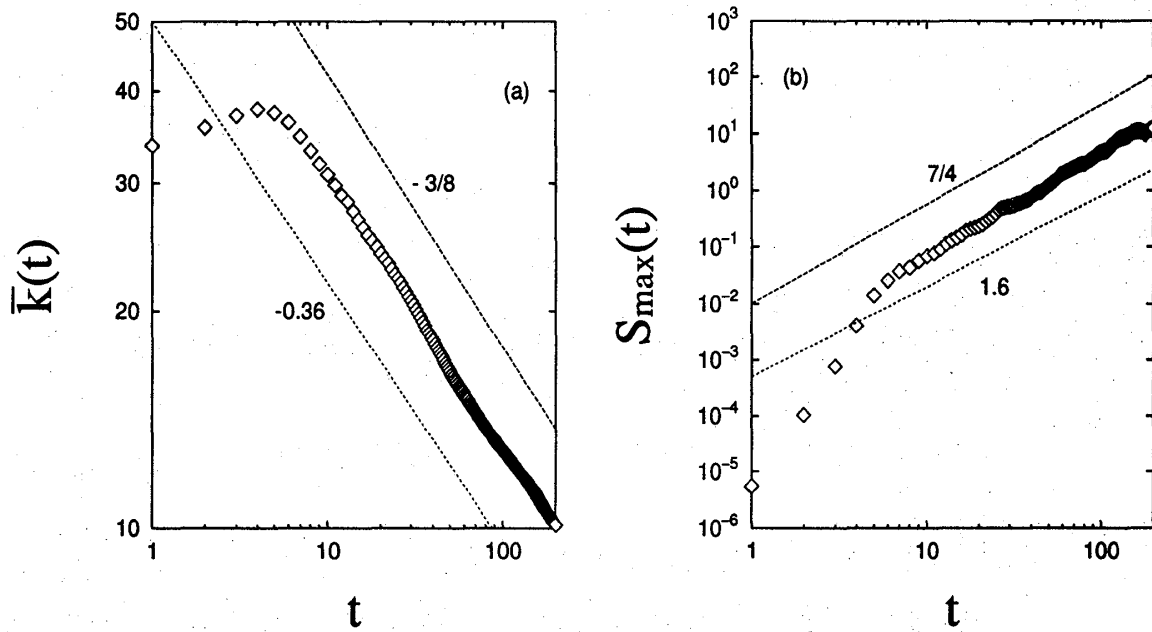


図 5: 時刻  $t$  における構造関数のピークの位置  $S_{max}(t)$  とスペクトルの特徴的な波数  $\bar{k}(t)$  の時間発展 (a) と  $S_{max}(t)$  の時間発展 (b). 数値  $-3/8, 7/4$  はエネルギー輸送率  $\epsilon$  を一定としたときの理論値であり,  $-0.36, 1.6$  は  $\epsilon \sim t^{-\theta}$  とおき,  $\theta = 0.1$  とおいたときのべき値を表す.

で与えられる. (6.4) 式から直ちに  $k_t$  の時間依存性は

$$k_t \sim \lambda^{3/4} \epsilon^{-1/8} t^{-3/8} \quad (6.5)$$

と求めることができる.

一方  $S_{max}(t)$  の時間  $t$  に対するスケーリング指数は, 構造関数とエネルギー・スペクトルの関係

$$E(k, t) = \frac{k S(k, t)}{k^2 + \lambda^2} \quad (6.6)$$

を考慮する.  $k \ll \lambda$  の時,  $S(k, t)$  は (4.12), (6.6) 式から

$$S(k, t) \sim \lambda^4 \epsilon^{2/3} k^{-14/3} \quad (6.7)$$

と  $S(k, t)$  の漸近形が求まる.<sup>10</sup> この漸近形は  $\bar{k}(t) < k \ll \lambda$  で成立する. またこの領域のスペクトルは時間によらないので, 揺らぎは定常状態にある.

さて, もし  $k_t \sim \bar{k}(t)$  であると仮定し,  $S_{max}(t) \approx S(\bar{k}(t))$  とみなせば, (6.5) 式を (6.7) 式に代入して

$$S_{max}(t) \sim \lambda^{1/2} \epsilon^{5/4} t^{7/4} \quad (6.8)$$

<sup>10</sup> 十分時間が経つと,  $k = \lambda$  周辺では乱れは定常になる.  $k = \lambda$  周辺で構造関数がスケーリング則  $S(k, t) \sim \epsilon^{2/3} k^{-14/3} \lambda^4 h(k/\lambda)$  と書けるとする.  $x \ll 1$  で  $h(x) \sim \text{finite}$  とすると (6.7) 式が得られる. また,  $x \gg 1$  で  $h(x) \sim x^4$  とすると,  $S(k, t) \sim \epsilon^{2/3} k^{-2/3}$  となり, これは NS 方程式のエネルギー・カスケード領域のエネルギー・スペクトル  $E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$  とコンシステントである.

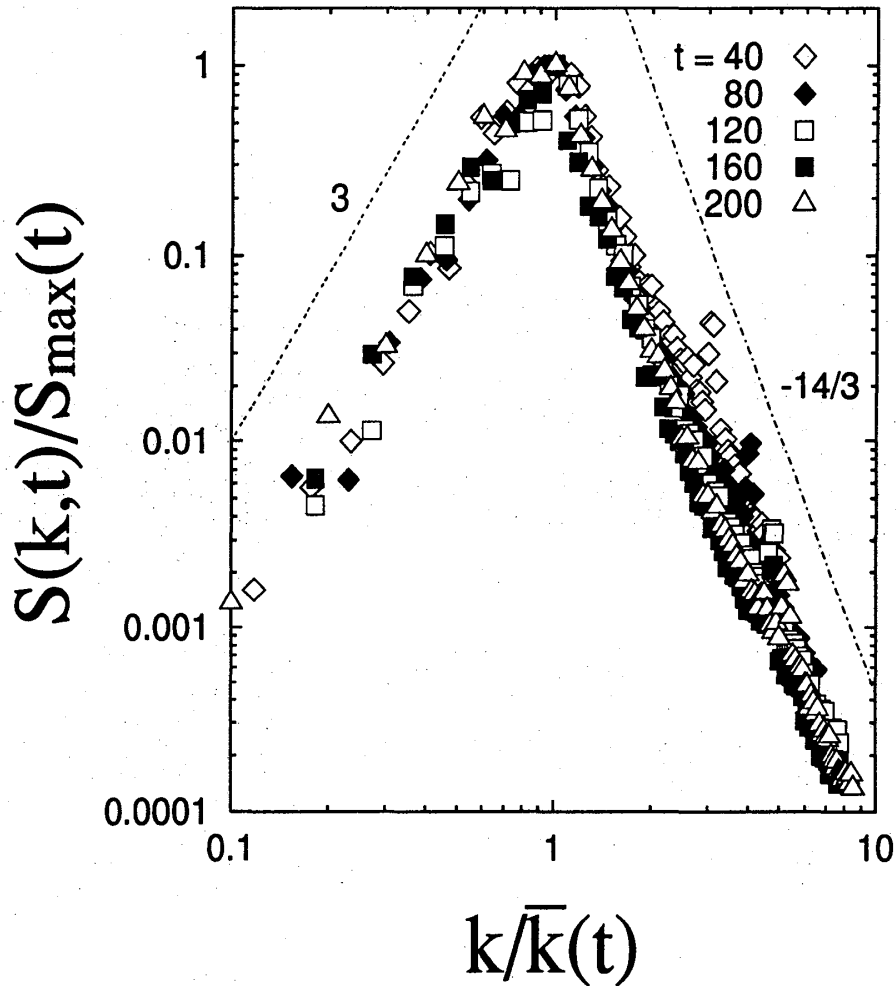


図 6:  $t = 40, 80, 120, 160, 200$  における  $S(k, t)/S_{max}(t)$  と  $k/\bar{k}(t)$  の両対数スケーリングプロット. 動的スケーリング則が成立していることがわかる.

が示される.  $\bar{k}(t) \sim t^{-3/8}$ ,  $S_{max}(t) \sim t^{7/4}$  は図 5 の計算結果と非常に良く一致していることがわかる.

次に時間発展に伴う構造関数  $S(k, t)$  の変化を調べる. 各時刻において  $S(k, t)/S_{max}(t)$  を  $k/\bar{k}(t)$  の関数として両対数プロットしたものを図 6 に示す. この図は明らかに次の様な動的スケーリング則が存在することを示している.

$$\frac{S(k, t)}{S_{max}(t)} = F\left(\frac{k}{\bar{k}(t)}\right). \quad (6.9)$$

このようなスケーリング則は CHM 方程式の減衰乱流において示唆されているが, 乱れの発達過程においてこのようなスケーリング則を見出したのは本論文が最初である. ここで  $F(x)$  はあるスケーリング関数で, 図 6 から  $F(x)$  の関数形を次のように決めることがで

きる。

$$F(x) \sim x^{-\gamma} \cdots (x > 1) \quad , \quad F(x) \sim x^{\delta} \cdots (x < 1). \quad (6.10)$$

(6.7) 式から  $\gamma = 14/3$  であり, これは図 6 と非常によく一致する. 一方  $\delta$  はエネルギーの逆カスケードとは関係のない領域における指数であるため, 現段階では  $\delta$  の正しい値を理論的に見積もることは難しいが, だいたい  $\delta \sim 3$  程度であろうと思われる. これは [15] の減衰性乱流のエネルギースペクトルの低波数領域の結果, つまり  $E(k) \sim k^4$  と一致する.

## 7 まとめと考察

本論文の研究では, ドリフト・ロスビー波乱流の発達過程におけるポテンシャル渦度場の特徴的な空間スケールの時間発展に注目し, そのスケーリング則を議論した. このスケーリング則は従来行なわれてきた Kolmogorov 型の次元解析を基礎にしたものであり, その大きな特徴の一つはエネルギー逆カスケード領域において, エネルギー輸送率  $\epsilon$  が時間, 空間によらず一定であるという仮説に基づいている. 数値シミュレーションはこの仮説が非常に良いものであることを示している. ここで図 7 に単位面積当りの系のエネルギー  $E$  の時間発展の様子を示す. もし,  $\epsilon$  が一定のもとに単位時間当たり一定の割合で系に加えられたエネルギーが低波数側にカスケードしていくな, 低波数側では散逸はほとんど効いてこないと考えられるので,  $E \propto t$  となることが期待できる. ところが図 7 は十分な時間発展の後,  $E \sim t^{1-\theta} (\theta > 0)$  とずれてきていることを示している. このことは  $\epsilon$  の強い揺らぎのために  $k_f$  で加えられるエネルギーがすべて低波数側にカスケードするのではなく, エネルギーの一部は高波数側にカスケードして散逸されるということも示唆している. それゆえ, もし低波数側に輸送されるエネルギーの量が時間的にランダムであれば, エネルギー輸送率の揺らぎが観測されるであろう. 3次元乱流においてはエネルギー輸送率  $\epsilon$  の揺らぎの問題は, 小さなスケールのダイナミクスの間欠性, つまり空間的に強く乱れた (渦度が大きい) 領域と乱れが弱い (渦度が小さい) 領域が混在しているためであると考えられている [21, 22]. この意味において 2次元乱流のエネルギー輸送率の揺らぎの起源は 3次元乱流のものとは異なっている.

ここでは  $\epsilon$  の揺らぎの統計法則に踏み込まず,  $E \sim t^{1-\theta}$  から単純に  $\epsilon$  の時間依存性を  $\epsilon \sim t^{-\theta}$  と考慮することにより, 間欠性の効果をスケーリング指数に取り入れるを試みる.  $\epsilon \sim t^{-\theta}$  を (6.5), (6.8) 式に代入すると,

$$\bar{k}(t) \sim \lambda^{3/4} t^{-\frac{3-\theta}{8}} \quad , \quad S_{max}(t) \sim \lambda^{1/2} t^{\frac{7-5\theta}{4}} \quad (7.1)$$

となる.  $\theta$  は本来  $\epsilon$  の揺らぎの統計法則から導き出される量であるが, 図 7 から  $\theta = 0.1$  と見積もるなら, (7.1) 式はそれぞれ

$$\bar{k}(t) \sim t^{-0.36} \quad , \quad S_{max}(t) \sim t^{1.6} \quad (7.2)$$

となり, 揺らぎの効果を取り入れない  $\theta = 0$  の値と比べて指数は少し小さい値になる. 実際シミュレーションの結果もこの解析を支持するものになっている (図 5).

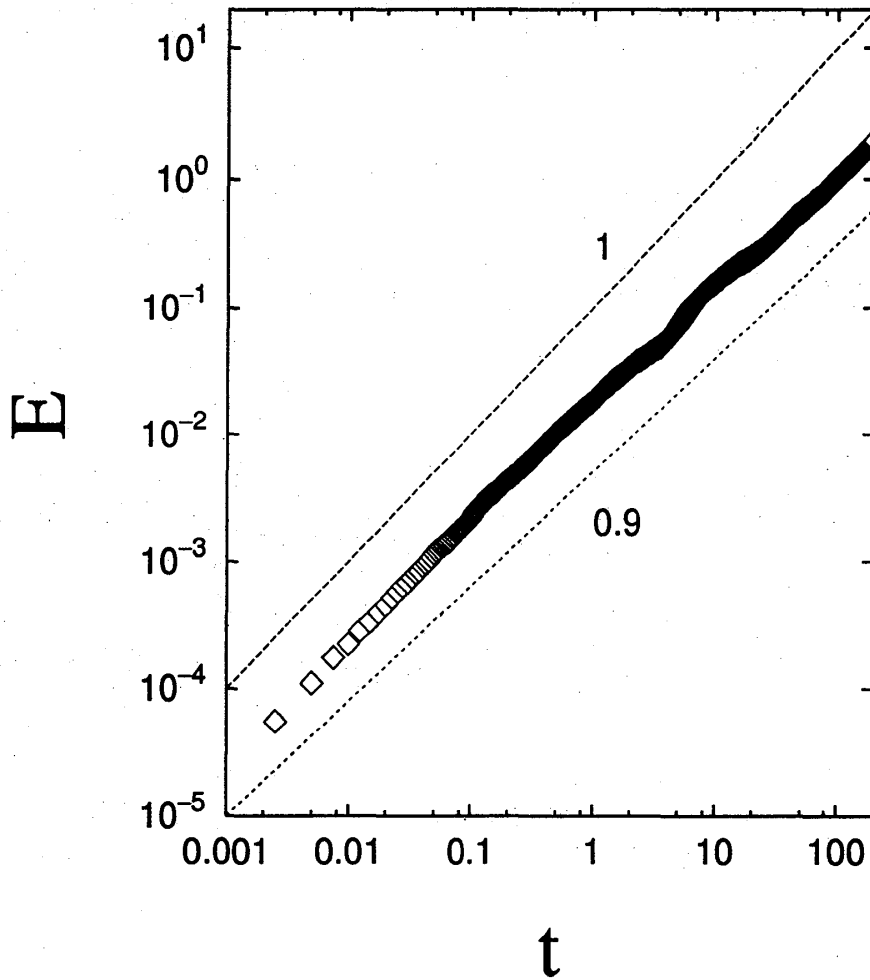


図 7:  $t = 0 \sim 200$  における単位面積当りのエネルギーの時間発展の様子. エネルギー輸送率が一定であれば  $E \sim t$  となるが, 数値的には  $E \sim t^{1-\theta}$  とおくと,  $\theta \approx 0.1$  となるようである.

乱れの発達とともにレイノルズ数  $R_e$  は時間的に増加していく. レイノルズ数は (5.1) 式中の非線形項と散逸項の比で, 次の様に見積もられる.

$$R_e \sim \frac{\lambda^{-1} \sqrt{E} l^2}{\nu} \sim t^{5/4}. \quad (7.3)$$

ここで  $\phi \sim \lambda^{-1} \sqrt{E} \sim t^{1/2}$  と  $l = 2\pi/\bar{k}(t) \sim t^{3/8}$  を用いた. (7.3) 式はレイノルズ数が時間発展と共に増大していくことを表している.  $t = 200$  におけるレイノルズ数は図 5, 7 から

$$R_e \sim 10^4 \quad (7.4)$$

となり, 高レイノルズ数のシミュレーションであることがわかる.

最後にこの解析結果を使って自由減衰 CHM 乱流の場合を考察してみる。減衰性乱流の場合、初期値に乱れのエネルギーを与えて、それが減衰していくと十分時間が経過した後、過渡的なある長い時間領域でエネルギーはほとんど一定値に落ち着くと考えられる。このような場合、もし  $\theta = 1$  と見積もるなら、(7.1) 式から

$$\bar{k}(t) \sim t^{-1/4}, \quad S_{max}(t) \sim t^{1/2} \quad (7.5)$$

となることが予測される。文献 [15] の中でエネルギースペクトルの相似性から指数  $-1/4$  が導かれているが、現在行なわれている減衰性 CHM 乱流のシミュレーションにおいても上の解析を支持するものになっている。ただ強制乱流と減衰乱流では現象の違いが大きく、さらに注意深い考察が必要である。

## Appendix

### A 準地衡流渦位方程式 (Charney 方程式) の導出

ここでは文献 [19] に従って準地衡流渦位方程式 (Charney 方程式) の導出を行なう。大気・海洋中の大規模な力学現象、即ち回転する球形剛体表面の大規模な流体運動、の多くは、回転水平面内の薄い流体層の運動によって近似的に記述できることが知られている。そこでここでは鉛直軸 ( $z$  軸) の周りに角速度  $f/2$  で回転している平面 ( $xy$  面) 上に広がった非圧縮性流体を考える。水平方向の 2 次元の速度場  $\mathbf{v} = (u, v)$  が従う運動方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (A.2)$$

である。 $f$  はコリオリパラメータと呼ばれ、 $g$  は重力定数を表し、 $h(x, y, t)$  は垂直方向 ( $z$  方向) の流体の表面変位を表す。(A.1), (A.2) 式の右辺の項は垂直方向の圧力勾配と重力の準静的なバランスの考察から出てくる。 $h$  は連続の方程式

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uH) + \frac{\partial}{\partial y}(vH) = 0 \quad (A.3)$$

を満足する。ここで  $H = H_0(x, y) + h(x, y, t)$  は流体層全体の深さを表し、 $H_0$  は時間的に平均化された深さを表す。

初めに (A.1), (A.2), (A.3) 式の中に現れる変数を、系を特徴づけるスケールである長さ  $L$ 、時間  $T$ 、速度  $U$ 、自由表面高さ  $N_0$  で次の様にスケールする。

$$(x, y) = L(x', y'), \quad t = Tt', \quad (u, v) = U(u', v'), \quad h = N_0 h'. \quad (A.4)$$

また便宜上、次の様な表記を導入する。

$$H = H_0(x, y) + h(x, y, t) = D - h_B(x, y) + h(x, y, t). \quad (A.5)$$

ここで  $h_B$  は剛体の底面の変位を示し,  $D$  は垂直方向の長さを特徴づける一定のスケールを表し, 薄い流体層の運動を考える時は,  $D/L \ll 1$  を満足するようにとる.

さて (A.4), (A.5) 式を使って (A.1), (A.2), (A.3) 式を無次元化した式は

$$\frac{U}{T} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \left( u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) - f U v' = -g \frac{N_0}{L} \frac{\partial h'}{\partial x'}, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{U}{T} \frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \left( u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) + f U u' = -g \frac{N_0}{L} \frac{\partial h'}{\partial y'}, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{N_0}{T} \frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{U}{L} \left( u' \frac{\partial}{\partial x'} + v' \frac{\partial}{\partial y'} \right) (N_0 h' - h_B) + \frac{U}{L} (D + N_0 h' - h_B) \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = 0, \quad (\text{A.8})$$

となる. ここでは  $T, U, L$  のスケールが

$$\epsilon = \frac{U}{fL} \ll 1, \quad \epsilon_T = \frac{1}{fT} \ll 1 \quad (\text{A.9})$$

を満足する運動を考察する.  $\epsilon, \epsilon_T$  は慣性項とコリオリの加速項との比を表し, ロスビー数と呼ばれる. (A.9) 式は (A.6), (A.7) 式の慣性項がコリオリの加速項に比べて  $O(\epsilon), O(\epsilon_T)$  小さいことを意味する. それで  $u'$  と  $v'$  のずれの時間発展が記述できるためには, 圧力勾配の項とコリオリ力の項がバランスしていなければならない. よって  $N_0$  を次の様に選べる.

$$N_0 = \frac{fUL}{g} = \frac{U}{fL} \frac{f^2 L^2}{g}. \quad (\text{A.10})$$

この時, (A.5) 式は

$$H = D \left( 1 + \frac{N_0}{D} h' - \frac{h_B}{D} \right) = D \left( 1 + \epsilon \frac{L^2}{R^2} h' - \frac{h_B}{D} \right) \quad (\text{A.11})$$

と書き換えられる. ここで  $R = \sqrt{gD}/f$  はロスビー半径を表す.

結局 (A.6), (A.7), (A.8) 式は (A.9), (A.11) 式を使って無次元変数と無次元パラメータで表すと, 最終的に

$$\epsilon_T \frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - v = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad (\text{A.12})$$

$$\epsilon_T \frac{\partial v}{\partial t} + \epsilon \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u = -\frac{\partial h}{\partial y}, \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_T \lambda^2 \frac{\partial h}{\partial t} + \epsilon \lambda^2 \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_B}{D} \right) - v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h_B}{D} \right) \\ + \left( 1 + \epsilon \lambda^2 h - \frac{h_B}{D} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

となる. 無次元変数を表すプライム' はこれ以降省略する. ここでパラメータ  $\lambda^2$  は

$$\lambda^2 = \left( \frac{L}{R} \right)^2 \quad (\text{A.15})$$

で定義される。ロスビー数  $\epsilon, \epsilon_T$  は今非常に小さいと仮定しているが、(A.12),(A.13),(A.14) 式の中に現れる非線形項が線形加速項と同じくらい重要になる場合、 $\epsilon = \epsilon_T$  と考えてよい。これは advective time  $L/U$  が局所的な変化の時間スケールと同じくらい短いことを意味する。

さて  $\epsilon$  は非常に小さいので、(A.12),(A.13),(A.14) 式の中に現れる変数  $u, v, h$  は  $\epsilon$  のべきで次の様に展開できるとする。

$$u(x, y, t, \epsilon) = u_0(x, y, t) + \epsilon u_1(x, y, t) + \epsilon^2 u_2(x, y, t) + \cdots, \quad (\text{A.16})$$

$$v(x, y, t, \epsilon) = v_0(x, y, t) + \epsilon v_1(x, y, t) + \epsilon^2 v_2(x, y, t) + \cdots, \quad (\text{A.17})$$

$$h(x, y, t, \epsilon) = h_0(x, y, t) + \epsilon h_1(x, y, t) + \epsilon^2 h_2(x, y, t) + \cdots. \quad (\text{A.18})$$

ここで  $u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, h_1, h_2, \dots$  は  $\epsilon$  に依存しない変数である。(A.16),(A.17),(A.18) 式を (A.12),(A.13),(A.14) 式に代入して、 $\epsilon$  の同じオーダーでバランスした式を取り出す。

$O(1)$  のバランスの式は

$$u_0 = -\frac{\partial h_0}{\partial y}, \quad v_0 = \frac{\partial h_0}{\partial x} \quad (\text{A.19})$$

となり、圧力勾配とコリオリの加速項が釣り合った流れで地衡流と呼ばれる。これは非圧縮条件

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.20})$$

を満足する。

また (A.14) 式の  $O(1)$  のバランスの式は  $h_B/D \sim O(1)$  なら (A.20) 式を使うと簡単に

$$u_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_B}{D} \right) + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h_B}{D} \right) = 0 \quad (\text{A.21})$$

と書ける。(A.21) 式は純粋に地衡流運動が等圧線に沿って動かなければならないという強い束縛を表している。ここでは上の束縛を破るようなケースを考えて、 $h_B/D$  はロスビー数  $\epsilon$  と同じオーダーとする。この時、

$$\frac{h_B}{D} = \epsilon \eta_B(x, y) \quad (\text{A.22})$$

と置く。 $\eta_B$  は  $O(1)$  の変数である。また (A.19),(A.21) 式からわかるように  $O(1)$  のバランスの方程式では地衡流の時間発展は記述できない。そこで次のオーダーのバランスの式を考察する必要がある。

$O(\epsilon)$  のバランスの式は、(A.20),(A.22) 式を使って

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - v_1 = -\frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + u_1 = -\frac{\partial h_1}{\partial y}, \quad (\text{A.24})$$

$$\lambda^2 \frac{\partial h_0}{\partial t} + \lambda^2 \left( u_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) - \left( u_0 \frac{\partial \eta_B}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \eta_B}{\partial y} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.25})$$

となる。(A.23),(A.24) 式から圧力勾配の項を消去し, (A.20) 式を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 h_0 + \left( u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 h_0 = - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \quad (\text{A.26})$$

となり, これを (A.25) 式に代入してまとめると, 結局

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 h_0 - \lambda^2 h_0) - \{ (\nabla h_0 \times \mathbf{z}) \cdot \nabla \} (\nabla^2 h_0 + \eta_B) = 0 \quad (\text{A.27})$$

となる。(A.27) 式は Charney 方程式, 又は準地衡流渦位方程式と呼ばれる。

## B CHM 方程式の保存則の導出

CHM 方程式がエネルギー  $E$  とポテンシャルエンストロフィー  $U$  を保存することを次の様にして示すことができる。

CHM 方程式をポテンシャル渦度  $\xi = \nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi$  を用いて表すと,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + J(\phi, \xi) = 0 \quad (\text{B.1})$$

となる。また便宜上, (3.15), (3.16) 式から

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int K_0(\lambda|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) J(\phi(\mathbf{r}', t), \xi(\mathbf{r}', t)) d\mathbf{r}', \quad (\text{B.2})$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \xi(\mathbf{r}', t) K_0(\lambda|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (\text{B.3})$$

を導出しておく。ただし空間の全積分範囲における境界は, 周期境界か剛体境界とする。

さてエネルギーの保存は (B.1) 式に  $\phi$  を掛け, (B.2) 式を用いて変形すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \xi) + \phi J(\phi, \xi) - \frac{1}{2\pi} \int \xi(\mathbf{r}) K_0(\lambda|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) J(\phi(\mathbf{r}'), \xi(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}' = 0 \quad (\text{B.4})$$

となる。(B.4) 式を全空間領域で積分し, (B.3) 式を使ってまとめると結局次の様になる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left( -\frac{1}{2} \phi \xi \right) d\mathbf{r} = \int \phi J(\phi, \xi) d\mathbf{r}. \quad (\text{B.5})$$

(B.5) 式の右辺は上記の境界条件では,

$$\begin{aligned} \int \phi J(\phi, \xi) d\mathbf{r} &= \int \left[ \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] d\mathbf{r} \\ &= \left[ \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \xi - \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \xi \right]_{\text{boundary}} - \int \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \xi d\mathbf{r} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

となるので,

$$\frac{\partial E}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{L^2} \int \left( -\frac{1}{2} \phi \xi \right) d\mathbf{r} = 0 \quad (\text{B.7})$$

となり,  $E$  は保存量であることが示せた.

一方, ポテンシャルエントロピーの保存は (B.1) 式に  $\nabla^2\phi$  を掛け, (B.2) 式を用いて変形すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi \nabla^2 \phi) + (\xi + \nabla^2 \phi)J(\phi, \xi) - \frac{\lambda^2}{2\pi} \int \xi(\mathbf{r}) K_0(\lambda|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) J(\phi(\mathbf{r}'), \xi(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}' = 0. \quad (\text{B.8})$$

(B.8) 式を同様にして全空間領域で積分し, (B.3) 式を使ってまとめると

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \xi \nabla^2 \phi d\mathbf{r} = - \int \xi J(\phi, \xi) d\mathbf{r} \quad (\text{B.9})$$

となる. (B.9) 式の右辺は同様の境界条件を用いると,

$$\begin{aligned} \int \xi J(\phi, \xi) d\mathbf{r} &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \xi^2}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \xi^2}{\partial x} \right) d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \xi^2 - \frac{\partial \phi}{\partial y} \xi^2 \right]_{\text{boundary}} - \frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) \xi^2 d\mathbf{r} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

となるので,

$$\frac{\partial U}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{L^2} \int \frac{1}{2} \xi \nabla^2 \phi d\mathbf{r} = 0 \quad (\text{B.11})$$

が成立する.

## 参考文献

- [1] A.N.Kolmogorov, Dokl.Akad.Nauk SSSR **30**,301-305(1941).
- [2] R.H.Kraichnan, Phys.Fluids **10**,1417(1967).
- [3] G.K.Batchelor, Phys.Fluids Suppl **12**,II-233(1969).
- [4] C.E.Leith, Phys.Fluids **11**,671(1968).
- [5] A.Hasegawa, Advances in Phys. **34**,1(1985).
- [6] J.C.McWilliams, J.Fluid Mech. **146**,21(1984).
- [7] R.Benzi, S.Patarnello and P.Santangelo, J.Phys.A:Math.Gen. **21**,1221(1988).
- [8] J.C.McWilliams, Phys.Fluids A **2**,547(1990).
- [9] J.Sommeria, J.Fluid Mech. **170**,139(1986).
- [10] G.C.Carnevale, J.C.McWilliams, Y.Pomeau, J.B.Weiss and W.R.Young, Phys.Rev.Lett. **66**,2735(1991).

- [11] J.B.Weiss and J.C.McWilliams, Phys.Fluids A5,608(1993).
- [12] T.Iwayama and H.Okamoto, Prog.Theor.Phys. 96,1061(1996).
- [13] U.Frisch, *Turbulence* (Cambridge Univ.Press, 1995).
- [14] M.Ottaviani and J.Krommes,Phys.Rev.Lett.69,2923(1992).
- [15] V.D.Larichev and J.C.McWilliams, Phys.Fluids A 3,938(1991).
- [16] N.Kukharkin, S.A.Orszag, and V.Yakhot, Phys.Rev.Lett.75,2486(1995).
- [17] A.Hasegawa and K.Mima, Phys.Fluids 21,87(1978).
- [18] F.F.Chen(内田 岱二郎 邦訳), プラズマ物理入門 (丸善,1977).
- [19] J.Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics* (Springer-Verlag, New York,1987).
- [20] S.A.Orszag ,Stud.Appl.Math. 100,293(1971).
- [21] F.Anselmet,Y.Gagne,E.J.Hopfinger and R.A.Antonis, J.Fluid Mech. 140,63(1984).
- [22] G.Paladin and A.Vulpiani, Phys.Rep. 156,No.4(1987).

## 謝辞

二年間に亘り熱心に指導して下さいました藤坂博一先生に感謝致します。また研究生生活を送るにあたって小田垣先生と松井先生にも大変お世話になりました。さらに研究室の先輩にあたる金田さん、筒さん、寺田さん、内山さん、もう卒業されている藤本さん、豊福さんには研究の進め方やコンピュータの扱いに至るまで多くのことを教えていただきました。また同期の川崎君、藤崎君、松下君や後輩の井上君、川合君、原田君、樋口さん、雪村君とはいろいろ話をしてもらい、研究室では楽しい時間を過ごすことができました。

最後に本研究を進めるにあたり、シミュレーションのプログラムから2次元乱流の話に至るまで多くのことを議論していただいた九州工業大学情報工学部助手の岩山隆寛博士に感謝します。