

ヒルベルト空間にいろいろな作用素を導入する再生核の理論の応用について

群馬大工 齋藤三郎

Saburou Saitoh

Department of Mathematics, Graduate School of Engineering,

Gunma University, Kiryu 376-8515, JAPAN

e-mail : kbdmm360@yahoo.co.jp

概要

ここでは、再生核の理論が 極めて基本的な数学である事をできるだけ明瞭に説明したいと思います。特にピタゴラスの定理の一般形を与えるばかりではなく、算術における加法や積の考えを一般のヒルベルト空間たちに導入したり、また一般のヒルベルト空間に 微分や積分の演算を導入することさえ 自然にできることを述べたいと思います。

1. 基本概念、共通の世界に、関数空間に写す

簡単な計算

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

を考えます。分数の定義を習ったばかりの生徒は この加法ができるでしょうか。 $\frac{1}{6}$ の考えに達するのは 大きな発見ではないでしょうか。いろいろなヒルベルト空間の和やいろいろなヒルベルト空間にいろいろな演算を導入するには、同じ様にそのような事が可能であるような世界に 忠実に写して考えればよいことになります。すなわち、ヒルベルト空間を等長に 関数空間に写して考える事ができれば それらが可能になります。再生核の理論はそのような自然な方法を与えます。

$\mathcal{H}$ を有限次元でもよい任意の抽象的なヒルベルト空間とします。 E を抽象的な集合で、 $\mathbf{h}$ を E 上の $\mathcal{H}$ に値をとる関数とします。そこで、

$$f(p) = (\mathbf{f}, \mathbf{h}(p))_{\mathcal{H}}, \mathbf{f} \in \mathcal{H} \quad (0.1)$$

¹2000 Mathematics Subject Classification. 30C40, 46E32, 44A10, 35A22.

Key words and phrases. Triangle inequality, Hilbert space, sum of two Hilbert spaces, various operators among Hilbert spaces, reproducing kernel, linear mapping, norm inequality.

で定義される $\mathcal{H}$ から E 上のすべての複素数値関数からなる線形空間 $\mathcal{F}(E)$ への線形写像 (0.1) を考えます。(0.1) は線形写像をヒルベルト空間の枠内で表現した極めて一般的な定式化です。それを線形方程式と解釈すると、有名な **不適切問題** となり、**逆問題** における有名な理論に関係してきます。まず問題になるのは、(0.1) の **像の関数空間の特徴付け** ですが、それを考えるときに **再生核** が現われます。

実際、

$$K(p, q) = (\mathbf{h}(q), \mathbf{h}(p))_{\mathcal{H}} \text{ on } E \times E \quad (0.2)$$

で定義される $E \times E$ 上の関数 $K(p, q)$ を考えると **これが再生核** になるということです。

この2変数関数は E 上の有限個の点 $\{p_j\}$ と任意の複素数 $\{C_j\}$ に対して、

$$\sum_j \sum_{j'} C_j \overline{C_{j'}} K(p_{j'}, p_j) \geq 0$$

という **二次正定符号関数** という性質を満たします。このとき、Moore-Aronszajn の定理で 次の性質を満たすヒルベルト空間が唯一つに定まります：

命題 ([3]) $E \times E$ 上の関数 $K(p, q)$ に対して、 E 上の関数 $\{f\}$ からなるヒルベルト空間 $H_K(E)$ (RKHS $H_K(E) = H_K$) が唯一つ存在して、それは次の2つの性質で定まる：

$$K(\cdot, q) \in H_K \text{ for any } q \in E \quad (0.3)$$

かつ、任意の $q \in E$ と任意の $f \in H_K$ に対して

$$f(q) = (f(\cdot), K(\cdot, q))_{H_K}. \quad (0.4)$$

これらの性質が、 $K(p, q)$ の H_K における **再生性** といい、 $K(p, q)$ を再生核と呼ぶ理由です。このとき、次の基本性質が成り立ちます：

(I) (0.1) における $\mathcal{H}$ の像関数空間は **再生核** $K(p, q)$ を持つ再生核ヒルベルト空間 $H_K(E)$ として特徴付けられる。

(II) 一般に不等式

$$\|f\|_{H_K(E)} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}}$$

が成立つ。ここで、 $H_K(E)$ の任意の関数 f に対して、

$$f(p) = (\mathbf{f}^*, \mathbf{h}(p))_{\mathcal{H}} \text{ on } E$$

と

$$\|f\|_{H_K(E)} = \|\mathbf{f}^*\|_{\mathcal{H}}$$

を満たす $\mathbf{f}^* \in \mathcal{H}$ が唯一つ存在する。

$\mathcal{H}$ を 2 次元ユークリッド空間として、 E を 2 点、 $\mathbf{h}(j)$; $j = 1, 2$ をユークリッド空間の正規直交ベクトルとすると、(II) がちょうど **ピタゴラスの定理** になっていることを考えると、(II) が如何に基本的な結果であるかが良く分かります。

(III) 一般に (0.1) の逆を 再生核空間 $H_K(E)$ を用いて、(II) における

$$f \rightarrow \mathbf{f}^*$$

として求められる。しかし、この一般的な逆を求めるには 具体的には複雑な構造を持つ。

例えば、 $\{\mathcal{H}_j, E, \mathbf{h}_j\}_{j=1}^2$ を用いて、2 つの線形システム

$$f_j(p) = (\mathbf{f}_j, \mathbf{h}_j(p))_{\mathcal{H}_j}, \quad \mathbf{f}_j \in \mathcal{H}_j \quad (0.5)$$

を上記のように考えよう。ここで、同じ集合 E 上の関数 $f_1(p)$ と $f_2(p)$ を考えるために上記の集合 E を同じ集合としよう。

するとこのとき、例えば普通の関数としての和

$$f_1(p) + f_2(p)$$

を $\mathcal{F}(E)$ で考える事ができる。このとき次の基本的な問題が考えられる：

E 上の関数 $f_1(p) + f_2(p)$ を 1 つの線形システムの像として、入力 $\mathbf{f}_1$ と $\mathbf{f}_2$ からどのように表わされるか？

再生核の理論を用いてこの問題の自然な解答が与えられよう。ここでの方法の考え方によって、積や微分、積分など多くの演算が抽象的なヒルベルト空間に導入できる。特に積の考えは convolution の考え方の一般的な定式化を与え、いろいろな不等式や逆問題への応用を与える。例えば [1,2;5,7,8] を参照。さらに、Mathematical Inequalities & Applications に一連の論文が出版されることになっている。

さらに驚くべきことには、非常に一般の非線形変換に対しても同様の問題が考えられることである。本質を簡潔に見るために、上記の和について詳しく見ておこう。

2. 抽象的な2つのヒルベルト空間の和

$$K_1(p, q) + K_2(p, q) \text{ on } E,$$

は E 上、二次正定符号関数であるから、再生核

$$K_1(p, q) + K_2(p, q) \text{ on } E,$$

を持つ再生核ヒルベルト空間 $H_{K_1+K_2}(E)$ を考えよう。この空間は

$$f(p) = f_1(p) + f_2(p); \quad f_j \in H_{K_j}(E) \quad (0.6)$$

と表わされる関数からなり、そのノルム $\|f\|_{H_{K_1+K_2}(E)}$ は

$$\|f\|_{H_{K_1+K_2}(E)}^2 = \min\{\|f_1\|_{H_{K_1}(E)}^2 + \|f_2\|_{H_{K_2}(E)}^2\} \quad (0.7)$$

で与えられる。ここで、最小値は f に対して、(0.6) を満たす関数 $f_j \in H_{K_j}(E)$ 上で考えられる。したがって、一般に不等式

$$\|f_1 + f_2\|_{H_{K_1+K_2}(E)}^2 \leq \|f_1\|_{H_{K_1}(E)}^2 + \|f_2\|_{H_{K_2}(E)}^2 \quad (0.8)$$

を得る。

E 上の二次正定符号関数 $K_1 + K_2$ に対して、(0.2) とは逆に

$$K_1(p, q) + K_2(p, q) = (\mathbf{h}_S(q), \mathbf{h}_S(p))_{\mathcal{H}_S} \text{ on } E \times E \quad (0.9)$$

を満たすあるヒルベルト空間 $\mathcal{H}_S$ と $\mathcal{H}_S$ に値をとる E 上の関数を構成できる。ここで、本質的ではないので

$$\{\mathbf{h}_S(p); p \in E\} \text{ is complete in } \mathcal{H}_S \quad (0.10)$$

を満たすと仮定しよう。

このような事が一般に可能で ([3], page 36 and see Chapter 1, §5) この結果は興味深い事に測度と確率論に関する **コロモゴロフの定理** が関係している。すると、 $\mathcal{H}_S$ から $H_{K_1+K_2}(E)$ 上への線形写像

$$f_S(p) = (\mathbf{f}_S, \mathbf{h}_S(p))_{\mathcal{H}_S}, \mathbf{f}_S \in \mathcal{H}_S \quad (0.11)$$

が逆に考えられて、等長関係

$$\|f_S\|_{H_{K_1+K_2}(E)} = \|\mathbf{f}_S\|_{\mathcal{H}_S} \quad (0.12)$$

が成り立つ。

したがって $f_1(p) + f_2(p)$ に対して、

$$f_1(p) + f_2(p) = (\mathbf{f}_S, \mathbf{h}_S(p))_{\mathcal{H}_S} \text{ on } E \quad (0.13)$$

を満たす $\mathbf{f}_S \in \mathcal{H}_S$ が唯一つに定まる。

このとき、 $\mathbf{f}_S$ はこれらの線形写像を通して $\mathbf{f}_1$ と $\mathbf{f}_2$ の和として定まると考えられるから、記号

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{f}_1[+] \mathbf{f}_2 \quad (0.14)$$

を導入しよう。

$\mathbf{f}_1 \in \mathcal{H}_1$ と $\mathbf{f}_2 \in \mathcal{H}_2$ の和は3つの線形写像 $\{\mathcal{H}_j, E, \mathbf{h}_j\}$ ($j = 1, 2$) と $\{\mathcal{H}_S, E, \mathbf{h}_S\}$ を通して定義される。

和 $\mathbf{f}_1[+] \mathbf{f}_2$ は $\mathbf{f}_1$ と $\mathbf{f}_2$ によって逆写像

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_1(p))_{\mathcal{H}_1} + (\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_2(p))_{\mathcal{H}_2} \longrightarrow \mathbf{f}_1[+] \mathbf{f}_2 \quad (0.15)$$

によって $H_{K_1+K_2}(E)$ から $\mathcal{H}_S$ の上への写像として定まる。このとき次の
三角不等式 が成立つ：

定理

$$\|\mathbf{f}_1[+] \mathbf{f}_2\|_{\mathcal{H}_S}^2 \leq \|\mathbf{f}_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|\mathbf{f}_2\|_{\mathcal{H}_2}^2. \quad (0.16)$$

もし、 $\{\mathbf{h}_j(p); p \in E\}$ らがそれぞれ $\mathcal{H}_j$ ($j = 1, 2$) で完全であるとき、 $\mathcal{H}_j$ と H_{K_j} らは等長だからこれらの等長写像を用いて、2つのヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ の和を

$$\mathcal{H}_1[+] \mathcal{H}_2 \quad (0.17)$$

の形に導入できる。もちろん、これらの和はヒルベルト空間 $\mathcal{H}_S$ である。

3. 最も簡単な例

2つの積分変換

$$f_j(p) = \int_T F_j(t) \overline{h(t, p)} \rho_j(t) dm(t), \quad p \in E \quad (0.18)$$

を考えよう。ここで、 ρ_j は T 上の正の連続関数で、

$$\int_T |h(t, p)|^2 \rho_j(t) dm(t) < \infty \text{ on } p \in E \quad (0.19)$$

で

$$\int_T |F_j(t)|^2 \rho_j(t) dm(t) < \infty \quad (0.20)$$

とする。 $\{h(t, p); p \in E\}$ は (0.20) を満たすヒルベルト空間で完全とする。そのとき、 E 上の対応する再生核は

$$K_j(p, q) = \int_T h(t, p) \overline{h(t, q)} \rho_j(t) dm(t)$$

である。このとき、

$$K_1(p, q) + K_2(p, q) = \int_T h(t, p) \overline{h(t, q)} (\rho_1(t) + \rho_2(t)) dm(t) \quad (0.23)$$

を得る。だから、

$$\int_T |F(t)|^2 (\rho_1(t) + \rho_2(t)) dm(t) < \infty$$

を満たす積分変換

$$f(p) = \int_T F(t) \overline{h(t, p)} (\rho_1(t) + \rho_2(t)) dm(t) \quad (0.24)$$

において、(0.23) と (0.24) から具体的な表現

$$(F_1[+]F_2)(t) = \frac{F_1(t)\rho_1(t) + F_2(t)\rho_2(t)}{\rho_1(t) + \rho_2(t)} \quad (0.25)$$

を得る。

4. 研究状況

ヒルベルト空間を、関数空間に等長に写して考える方法によって、ヒルベルト空間やヒルベルト空間たちに、関数空間と同じ様にさまざまな演算を導入できる。典型的な演算は積に対する convolution の考え方や、微分、積分の演算である。convolution の考え方は convolution における

Hausdorff-Yang とは違った新しい型の不等式を導き、逆不等式を含めて多くの応用が展開されている。さらに、一連の結果が、出版されることになっている。[1,2], [5,7,8] 参照。convolution の考え方はまた、非線形微分方程式を積分方程式に帰着させる方法も与えている。[4] 参照。

ここで詳しく触れた和の考えは 三角不等式に対する新しい考えを提起し、(0.16) が **一般の三角不等式** と呼ぶにふさわしいとの見解を発想させている。[6] を参照。一般に線形結合に対する、三角不等式の形式は $p > 0$ 版 Banach norms で徹底的に研究され、深い研究成果がある。[9] を参照。

いずれにせよ、一般のヒルベルト空間、あるいは ヒルベルト空間たちに いろいろな演算を導入する事は 数学において基本的な考え方なのでいろいろ研究すべき新しい研究課題に繋がると考えている。

参考文献

- [1] D. T. Duc and N. D. V. Nhan, Weighted L_p -norm inequalities in convolutions and their applications, *J. Math. Inequal.*, **2**(1)(2008), 45–55.
- [2] D. T. Duc and N. D. V. Nhan, On some convolution norm inequalities in weighted $L_p(\mathbf{R}^n, \rho)$ spaces and their applications, *Mathematical Inequalities & Applications*, **11**(2008), 495–505.
- [3] S. Saitoh, Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **369**, Addison Wesley Longman, UK (1998).
Introduction to the theory of reproducing kernels, Makino-shoten (2002)(in Japanese).
- [4] S. Saitoh, Various operators in Hilbert space introduced by transforms, *International. J. Appl. Math.*, **1**(1999), 111–126.
- [5] S. Saitoh, Weighted L_p -norm inequalities in convolutions, Survey on Classical Inequalities, 225–234(2000), Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

- [6] S. Saitoh, Generalizations of the triangle inequality, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, Volume 4, Issue 3, Article 62, 2003.
- [7] S. Saitoh, V.K. Tuan, and M. Yamamoto, Reverse weighted L_p -norm inequalities in convolutions and stability in inverse problems, *J. of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **1**(2000), Art. 7.
- [8] S. Saitoh, V.K. Tuan, and M. Yamamoto, Reverse convolution inequalities and applications to inverse heat source problems, *J. of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **3**(2003), Art. 80.
- [9] Sin-ei, Takahasi, J. M. Rassias, S. Saitoh, and Y. Takahashi, Refined generalizations of the triangle inequality on Banach spaces, *Mathematical Inequalities & Applications* (to appear).