

氏 名	ふる しょう ひで かず 古 庄 英 和
学位の種類	博 士 (理 学)
学位記番号	理 博 第 2704 号
学位授与の日付	平成 15 年 9 月 24 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	p -ADIC MULTIPLE ZETA VALUES I — p -ADIC MULTIPLE POLYLOGARITHMS AND THE p -ADIC KZ EQUATION (p 進多重ゼータ値 I — p 進多重ポリログと p 進 KZ 方程式)
論文調査委員	(主 査) 教授 玉川安騎男 教授 齋藤恭司 教授 望月新一

論 文 内 容 の 要 旨

本論文の主な内容は、 p 進多重ゼータ値の基礎理論の構築である。

複素数体上では、射影直線引く 3 点の基本群が定める (混合) モチーフの Hodge 実現の具体的な記述と関連して、多重ゼータ値、多重ポリログ、Drinfel'd アソシエータ、KZ 方程式という四つの基本的対象があり、互いに緊密な関係を有していた。より具体的には、多重ゼータ値は多重ポリログの 1 での極限值として得られ、Drinfel'd アソシエータは KZ 方程式の基本解のある種の極限として得られ、また、Drinfel'd アソシエータの係数として多重ゼータ値が現れ (Le-村上の公式)、KZ 方程式の基本解の係数として多重ポリログが現れる、という関係があった。

本論文では、以上の複素数体上の理論の p 進類似 (より正確には、 p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の p 進完備化 $\mathbb{C}_p$ の上での類似) を展開した。

複素数体上の多重ゼータ値は級数展開によって素朴に定義されたが、この級数は p 進的には収束しないため、 p 進多重ゼータ値の定義を与えない。また、 p 進多重ポリログは、複素数体上の多重ポリログと同じ冪級数により単位開円板上では定義されるが、複素数体上の場合と異なり、 $\mathbb{C}_p$ では単位開円板の位相的閉包に 1 が含まれないため、 p 進多重ゼータ値の理論には不十分である。このため、本論文では、Coleman の p 進積分論を用いて p 進多重ポリログの $\mathbb{C}_p - \{1\}$ への解析接続を構成した。この p 進多重ポリログは、1 価関数ではあるが、Coleman の理論の帰結として、一般には (単位開円板の外では) 分枝パラメータ ($\in \mathbb{C}_p$) に依存する。次に、この p 進多重ポリログがある種の条件付きで 1 に近付く時に収束すること、また、この極限值が分枝パラメータに依存しないことを証明した。以上の結果をふまえて、 p 進多重ゼータ値を、 p 進多重ポリログの 1 でのこの極限值として定義した。素朴な定義ができた複素数体上の場合と異なり、 p 進の場合は、この p 進多重ゼータ値の定義そのものが高度に非自明であり、本論文の主結果の一つである。

次に、複素数体上の場合と同様に、 $\mathbb{C}_p$ 係数 2 変数非可換形式冪級数環に値を持つ $\mathbb{C}_p$ 上の関数に対する微分方程式として p 進 KZ 方程式を導入した。ここでも、 p 進位相の特殊性により、(初期値を固定しても) 解の一意性が言えないという問題が生じるが、本論文では、Coleman の理論の枠組みの中で、(0 あるいは 1 での漸近挙動を固定した) 基本解の存在と一意性を証明した。更に、0 での漸近挙動を固定した基本解と 1 での漸近挙動を固定した基本解のずれとして、 p 進 Drinfel'd アソシエータを定義した。その上で、 p 進 Drinfel'd アソシエータが、 p 進 KZ 方程式の 0 での基本解の 1 での (ある種の) 極限としても得られること、 p 進 KZ 方程式の基本解の係数として p 進多重ポリログが現れること、 p 進 Drinfel'd アソシエータの係数として p 進多重ゼータ値が現れること、などの基本的な結果を証明した。

また、本論文の理論の帰結として、 p 進ゼータ値が実は $\mathbb{Q}_p$ に入ることや、 p 進多重ポリログの関数等式、 p 進多重ゼータ値の積公式などを証明した。複素数体上でこれらに対応する命題は、級数展開等の素朴な方法により比較的簡単に証明されたが、本論文では、Coleman の理論や p 進 KZ 方程式、 p 進 Drinfel'd アソシエータの理論を駆使して、証明を遂行した。

論文審査の結果の要旨

モチーフは、Grothendieckにより代数多様体の普遍コホモロジーとして導入されたものだが、その後Deligneにより代数多様体の基本群（の副冪単完備化のLie環）にもモチーフの構造が入ることが示されている。特に、射影直線引く3点の基本群が定めるモチーフは、 $\mathbb{Z}$ 上の混合Tateモチーフのなす淡中圏を生成することが予想されている重要な対象である。このモチーフのエタール実現は、射影直線引く3点の副 l 基本群におけるGalois表現を与え、1980年代後半から数論幾何的・整数論的研究が活発に行われている。また、このモチーフのHodge実現（=Betti実現+de Rham実現）は、その周期として多重ゼータ値を与え、モチーフ論的・整数論的研究が近年盛んに行われている。しかしながら、このモチーフの p 進（クリスタリン）実現については、大きな展開がほとんどないというのが現状であった。

本論文では、この状況を打破するための第一歩として、 p 進多重ゼータ値の基礎理論を構築した。 p 進多重ゼータ値、 p 進多重ポリログ、 p 進Drinfel'dアソシエータ、 p 進KZ方程式という四つの基本的対象を巻き込む最終的な理論展開は、複素数体上の場合と並行しているが、このような理論を $\mathbb{C}_p$ 上で展開するのには、以下述べるようなさまざまな新しい困難があり、それらが本論文で申請者により解決されたのである。

まず、複素数体上の場合、Riemannゼータ関数の正整数点での特殊値と同様、多重ゼータ値は（各項が有理数であるような）級数によって定義された。しかし、この級数は p 進的には収束しないため、 p 進多重ゼータ値の定義を与えない。そのため、複素数体上での多重ゼータ値のもう一つの定義、すなわち多重ポリログの1での極限値という定義を採用することが考えられた。しかしながら、（有理数係数の冪級数で定義される） p 進多重ポリログのアプリオリな定義域は単位開円板であり、 $\mathbb{C}_p$ ではこの位相的閉包に1が入らないため、多重ポリログの解析接続を考える必要が生じる。ここで、 p 進位相の特殊性により、ナイーブな解析接続では可能性が多すぎ、また、リジッド幾何の意味での解析接続では、（多重ポリ）ログの超越性をとらえるには不十分である。そこで申請者は、（やや難解なため、じゅうぶんに理解し応用している人は数少ないと思われる）Colemanの p 進積分論を適用するというアイデアを得て、 p 進多重ポリログの解析接続を与え、1における収束性を示すことに成功した。更に、Colemanの理論の枠組みの中で、 p 進KZ方程式や p 進Drinfel'dアソシエータまでも自然かつ有機的にとらえられることを見いだしたことは著しい。

Colemanの p 進積分は、Frobenius持ち上げとの両立性により特徴付けられるため、モチーフのクリスタリン実現と相性がよいことはある意味自然ではあるが、実際に上記のことを遂行して基本的かつ非自明な対象たちとその相互関係を発見するには、申請者の大きな洞察力と独創性が必要であった。その意味で、本論文はこの分野における大きな貢献であると考えられ、既に一流学術雑誌への発表も決まっている。また、題名からわかる通り、申請者は既に本論文の続編を準備中で、ここでは本論文のモチーフ論的側面が展開される予定であり、更なる進歩が大いに期待できる。

以上の通り、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものとして認めた。論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。