

Some branched coverings of knots

関西学院大学理学部

張替 俊夫

(Toshio Harikae)

§ 1. はじめに

knot K 上 branch する S^3 の branched covering space を単に K の branched covering と呼ぶ。Hilden [8] と Montesinos [10] は任意の向きづけ可能な次元閉多様体がある knot の 3-fold irregular branched covering であることを示した。そこで、与えられた knot の 3-fold irregular branched covering はどんな空間になるかという問題を得る。その解答として Murasugi [11] は closed 3-braid の simple 3-fold irregular branched covering が存在すれば L は空間 $L(n, 1)$ と同相であることを示し、Hosokawa と Nakanishi [9] は pretzel knot の 3-fold irregular branched covering が存在すれば、 $L(n, 1)$ またはこれらの空間の連結和と同相であることを明らかにした。ここで "simple" とは branch index が 2 以下のことで、また $L(0, 1)$ 、 $L(1, 1)$ はそれぞれ $S^2 \times S^1$ 、 S^3 を表す。

本稿では内田 A との共同研究 [7] に基づき、特に Montesinos knot の 5-fold irregular dihedral branched covering (3-fold irregular の場合の拡張) を考える。Chumillas と Montesinos [3] は $S^2 \times S^1$ が任意の奇素数 p に対して knot の p -fold irregular dihedral branched covering になり得ないことを示している。また §3 で、knot の tetrahedral branched covering について考察する (詳細については [5] を参照したい)。なお本稿は [6] の一部をなしていることを付記しておく。

§2. Irregular dihedral branched covering

D_p を正 p 角形の対称性を表す群 (p 次の = 面体群) とする。 D_p は $\langle a, b \mid a^2, b^p, abab \rangle$ で表示され、 p 次の対称群 Σ_p の部分群である。 K で S^3 内の knot を表し、 $G = \pi_1(S^3 - K)$ を K の knot group とする。このとき、 G の D_p 上への表現 μ を K の D_p 表現と呼ぶ。以下 p を奇素数とする。

Def 2.1 μ, μ' を K の D_p 表現とする。このとき $\mu' = \theta \mu$ となる Σ_p の内部自己同型写像 θ が存在するとき、 μ と μ' は同値であるという。

$\mathcal{P}_2(K)$ を K の 2-fold branched covering を表す。 K の D_p 表現

の同値類の個数は、 $H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_p)$ の rank を使った次の定理で与えられる。証明は Fox [4] の第 10 節の議論を用いて容易に得られる。

Th 2.2 K の D_p 表現の同値類の個数は $(p^2 - 1) / (p - 1)$ で与えられる。

$\Delta_K(t)$ を K のアレクサンダー多項式とすると、 $\Delta_K(-1)$ は $H_1(\tilde{M}_2(K))$ の torsion 元の積と等しい。従って

系 2.3 K の D_p 表現が存在するための必要十分条件は $\Delta_K(-1) \equiv 0 \pmod{p}$ が成り立つことである。

以下 D_p 表現 μ に付随した K の p -fold irregular dihedral branched covering (以下、 D_p -branched covering と呼ぶ) $\tilde{M}_\mu(K)$ を考察する。 K が 2-bridge knot $S(\alpha, \beta)$ であるとき、もし $\alpha \equiv 0 \pmod{p}$ ならば K の D_p 表現 μ が 1 つ存在し (同値類の個数が 1)、 $\tilde{M}_\mu(K)$ は S^3 と同相になる。そこで bridge index が 3 以上の knot について考えたいが、そのために Montesinos knot に着目し、特に $p=5$ のとき考える。($p \geq 7$ でも以下の議論と同様のことが成り立つ。) Figure 1 で与えられる diagram

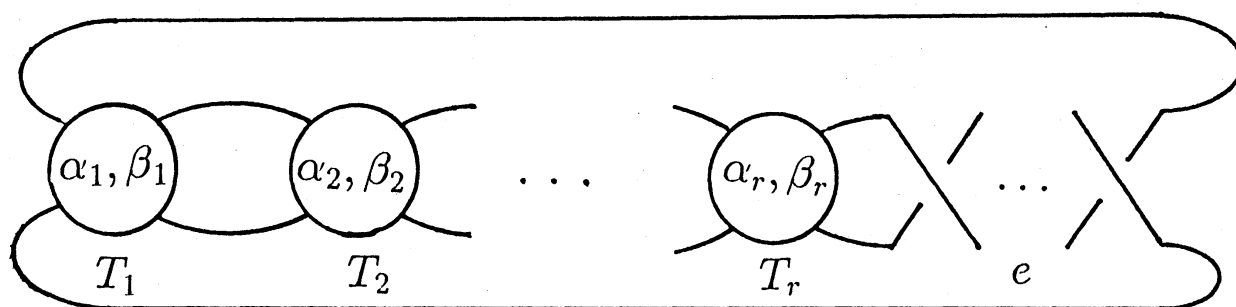


Figure 1

を持つ knot を Montesinos knot と呼ぶ、

$$M(e; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

で表す。ここで (α_i, β_i) は rational tangle T_i に対する

Schubert notation であり、 e は half twist の数である。 μ' を $\alpha_i \equiv 0 \pmod{5}$ を満たす i の個数とする。すると次の主定理を得る。

Th 2.4 K を Montesinos knot とする。

(1) $\mu' = 0$ で K の D_5 表現が存在するなら、 D_5 表現の同値類は 1 通りで、付随する D_5 -branched covering は S^3 と同相。

(2) $\mu' = 1$ なら、 K の D_5 表現は存在しない。

(3) $\mu' \geq 2$ なら、 K の D_5 表現は存在し、同値類の個数は $\frac{1}{4}(5^{\mu'-1} - 1)$ で与えられる。付随する D_5 -branched covering は $L(p_1, q_1) \# L(p_2, q_2)$ またはこれらの空間の連結和である。ただし (p_i, q_i) は (α_j, β_j) , $1 \leq j \leq r$, $(0, 1)$ または

(1, 1) と等しい。

この定理を示すため、まず μ' と μ (この場合は $H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_5)$ の rank) の関係を示す。K が Figure 1 の diagram を持つなら

$$H_1(\tilde{M}_2(K)) = \left\langle \begin{array}{c|c} S_1, \dots, S_r & S_i \alpha_i h^\beta, 1 \leq i \leq r \\ h & S_1 S_2 \dots S_r h^e \end{array} \right\rangle$$

を得る ([1] または [2] を参照せよ)。従って 2 次を得る。

Lemma 2.5 (1) $\mu' = 0$ なら、 $\mu = 0$ または 1。

(2) $\mu' \geq 1$ なら、 $\mu = \mu' - 1$ 。

Th 2.4 を証明するため、付随する D_5 -branched covering を変えない knot の diagram に対する操作を導入する。knot K が D_5 表現 μ を持つとき、G が K の Wirtinger 表示によって $\langle x_i | r_j \rangle$ で表されるなら、 $\mu(x_i)$ は (25)(34), (12)(35), (13)(45), (14)(23), (15)(24) のうちの 1 つと等しい。そこで便宜上記号 $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}$ を上の 5 つの元に対して導入する。trivial tangle (B, t) に対して、 t の 2 本の arc に対する D_5 表現がそれぞれ $\bar{u}, \bar{v}$ ($\bar{u} \neq \bar{v}$) ならば、 t 上 branch する B の付随する D_5 -branched covering は 3-ball である。従って 2 次を得る。

Lemma 2.6 knot K が D_5 表現 μ を持つとする。このとき K の diagram に対する以下の操作 I, II によって、knot または link K' と K' に対する D_5 表現 μ' を得たとすると、 $\tilde{M}_{\mu'}(K')$ は $\tilde{M}_{\mu}(K)$ と同相になる。ただし Figure 2, 3 において $\bar{u}, \bar{v}$ は $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の異なる元。

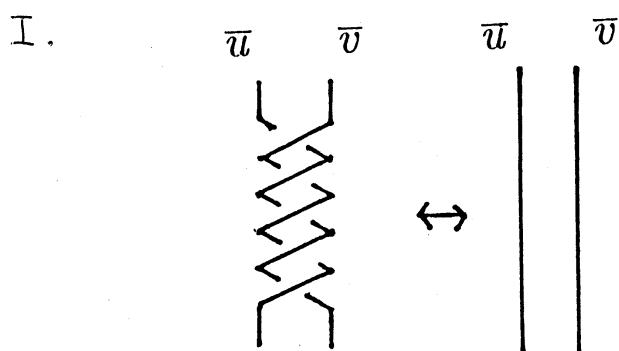


Figure 2

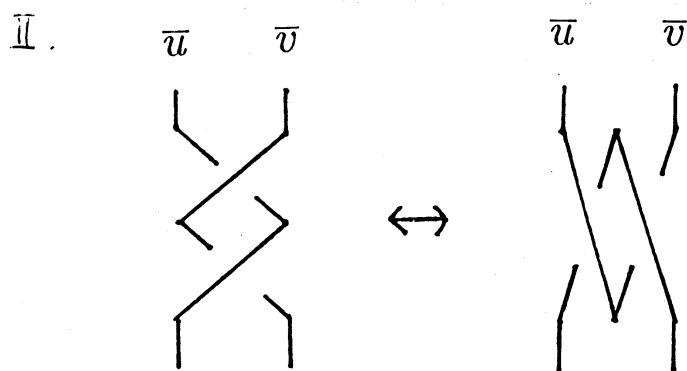


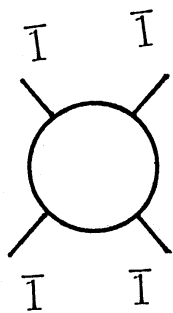
Figure 3

Remark (1) 操作 I は II より得られる。

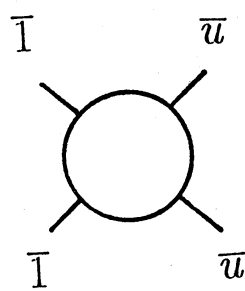
(2) Lemma 2.6 において $\bar{u} = \bar{v}$ を許したとしても、 K と K' の 2-fold branched covering の $\mathbb{Z}_5$ -rank は等しい。

Th 2.4 の証明 T を (α, β) 型の rational tangle とする。

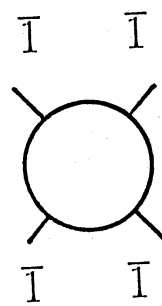
$\alpha \equiv 0 \pmod{5}$ のとき T の 4 つの端点の表現は 2通りある (Figure 4)。また $\alpha \not\equiv 0 \pmod{5}$ のとき端点の表現は 2通りある (Figure 5)。もし K に対し $2\mu' = 0$ び D_5 表現 μ を持てば K の各 tangle に対する表現は Figure 5(ii) び与えられる。この



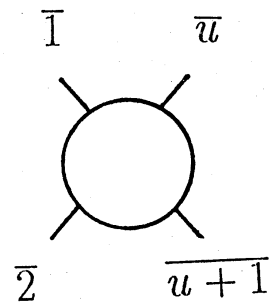
(i)



(ii)



(i)



(ii)

Figure 4

Figure 5

とき isotopy び K の各 tangle に half twist を加えること び $\bar{u} = \bar{1}$ に変えることが出来る。このような tangle は Lemma 2.6 の操作 び horizontal trivial tangle に変えられる。従って得られる空間は S^3 と同相。

$2\mu' = 1$ のとき $2\mu = 0$ より K は D_5 表現を持たない。

$2\mu' \geq 2$ のとき $2\mu = 2\mu' - 1$ より K の D_5 表現の同値類の個数は $(5^{2\mu'-1} - 1) / 4$ と等しい。 K の tangle T に対し $2\alpha \not\equiv 0 \pmod{5}$ なら表現は Figure 5 (i) び与えられる (なぜなら $\alpha \equiv 0 \pmod{5}$ となる他の tangle が存在する)。もし T に対し $2\alpha \equiv 0 \pmod{5}$

なり表現は Figure 4 (i) または (ii) で与えられる。Figure 4 (iii) の tangle は Lemma 2.6 の操作 I, II で vertical trivial tangle に変えられる。この結果得られる link を $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ とすると、 L_i は 2-bridge knot $S(\alpha_j, \beta_j)$ の連結和で $2 \leq n \leq 4$ 。しかも L_i は $\{\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{5}\}$ のうちの1つの元が割り振られている。もし $n=2$ なら、 L_1 と L_2 には異なる元 $\bar{u}, \bar{v}$ がそれぞれ割り振られ、 $\widetilde{M}_\mu(L)$ は $\#_{i=1}^2 (\widetilde{M}_2(L_i) \# \widetilde{M}_2(L_i))$ と同相であり、この空間は $L(\alpha_j, \beta_j) \# L(\alpha_j, \beta_j)$ あるいはこれらの連結和となる。次に $n=3$ のとき、 L_1, L_2, L_3 に $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ が割り振られているとする。ただし $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ はすべて同じ元にはなり得ないので $\bar{u} \neq \bar{v}$ を仮定する。 μ_1, μ_2 をそれぞれ $\bar{u}$ と $\bar{v}, \bar{w}$ が induce する $L_1 \cup L_2, L_3$ の表現とする。そこで $L_1 \cup L_2 \subset B_1, L_3 \subset B_2, B_1 \cup B_2 = S^3, \partial B_1 = \partial B_2$ となる 3-ball B_1, B_2 をとる。 $\widetilde{M}_{\mu_1}(L_1 \cup L_2)$ における B_2 の lift は 3-ball $\widetilde{B}_{21}, \widetilde{B}_{22}, \dots, \widetilde{B}_{25}$ からなり、同様に $\widetilde{M}_{\mu_2}(L_3)$ における B_1 の lift は 3-ball $\widetilde{B}_{11}, \widetilde{B}_{12}, \dots, \widetilde{B}_{15}$ からなる。このとき $\widetilde{M}_\mu(L)$ は $(\widetilde{M}_{\mu_1}(L_1 \cup L_2) - \bigcup_{i=1}^5 \widetilde{B}_{2i}) \cup (\widetilde{M}_{\mu_2}(L_3) - \bigcup_{i=1}^5 \widetilde{B}_{1i})$ で与えられる (ただし $\partial \widetilde{B}_{1i}$ と $\partial \widetilde{B}_{2i}$ は同一視)。 $\widetilde{M}_{\mu_2}(L_3)$ は 3つの空間 $\widetilde{M}_2(L_3), \widetilde{M}_2(L_3), S^3$ からなるので、 $\widetilde{M}_\mu(L)$ は

$$\#(L(\alpha_j, \beta_j) \# L(\alpha_j, \beta_j)) \# (S^2 \times S^1) \# (S^2 \times S^1)$$

と同相。 $n \geq 4$ のときも同様に考えて、 $\widetilde{M}_\mu(L)$ は

$\#(L(\alpha_j, \beta_j) \# L(\alpha_j, \beta_j))$ と $S^2 \times S^1$ の連結和であり、 $S^2 \times S^1$ の個

数は $2(n-2)$ である。■

ρ_μ を D_5 表現を持つ knot K に対する $H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_5)$ の rank とする, Th 2.4 の証明より

Cor 2.7 Montesinos knot K が D_5 表現 μ を持つとは

$$\rho_\mu = 2(\mu - 1)。$$

かつ 2 作間氏は次の Th が成り立つことを教示された。

Th 2.8 knot K が D_3 表現 μ を持つとは

$$H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_3) \oplus \mathbb{Z}_3 \cong H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_3)。$$

この Th は $H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_3)$ と $H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_3)$ の表現行列を比較することによって容易に得られる。そこで筆者はこの Th の " D_5 版" を考えた。すなわち

Conj knot K が D_5 表現 μ を持つとは

$$H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_5) \oplus \mathbb{Z}_5 \cong H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_5)。$$

ところが Cor 2.7 において $\mu \geq 2$ (すなわち $\mu' \geq 3$) とすれ

ばこの Conj の反例を与えらることになる。一方 Cor 2.7 が Montesinos knot 以外で成り立つかといえはそれはうそであり、実際 940, 949, 10103, 10155 に対して $\mu = 2$ で $\rho_\mu = 1$ となる。作問 A によると次の Conj が成り立つのではないかということだが、今のところ不明である。任意の奇素数 p に対して $\mu(K)$ を $H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_p)$ の rank, $\rho_\mu(K)$ を D_p 表現 μ に対応する $H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_p)$ の rank とする。

Conj knot K が D_p 表現 μ を持つば

$$\mu(K) - 1 \leq \rho_\mu(K) \leq \frac{1}{2}(p-1)(\mu(K) - 1).$$

§ 3. Tetrahedral branched covering

ここでは knot K の knot group G の 4 次の多代群 A_4 (正四面体群) 上の表現 μ (K の A_4 表現と呼ぶ) とそれに付随した K の A_4 -branched covering $\tilde{M}_\mu(K)$ を考察する。詳しい証明等については [5] を参照されたい。

A_4 は 12 の元を持ち、 $A = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ を正規部分群として持つ。 A を法とする A_4 の factor group は $\mathbb{Z}_3$ と同型で、 $A_4 = A \cup A(123) \cup A(132)$ と表される。 $B = A(123)$, $C = A(132)$ とおく。 $G = \langle x_i \mid r_j \rangle$ を G の Wirtinger 表示とすると、 $\mu: G \rightarrow A_4$ が onto なる $\mu(x_i) \in B$ または $\mu(x_i) \in C$ が成

り立つ。§2 と同様に μ の同値類を定義する。 $A_K(t)$ を K のアレクサンダー行列 ([2], [4] などを見よ)、 μ を 1 の原始 3 乗根、 μ を $A_K(w)$ の $\mathbb{Z}_2[w]$ における nullity とする時、Th2.2 の証明と同様の手法で次を得る。

Th 3.1 K の A_3 表現の同値類は $\frac{1}{3}(4^{\mu-1} - 1)$ で与えられる。

よく知らぬように (?) $A_K(w)$ は K の 3-fold cyclic branched covering $\tilde{M}_3(K)$ と関係づけられる。すなわち β を $H_1(\tilde{M}_3(K); \mathbb{Z}_2)$ の rank とする時、 $\beta = 2(\mu - 1)$ が成り立つことかわかる。従って

Th 3.2 K の A_4 表現の同値類は $\frac{1}{3}(2^\beta - 1)$ で与えられる。

また、 K の A_4 表現が存在するための必要十分条件は、 $\Delta_K(w)$ が $\mathbb{Z}_2[w]$ において 0 になることである。もし $\Delta_K(w) = aw + b$ とおくと、 $a \equiv b \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow \Delta_K(w)\Delta_K(w^2) = a^2 + b^2 - ab \equiv 0 \pmod{4}$, 従って

Cor 3.3 K の A_4 表現が存在するための必要十分条件は、 $\Delta_K(w)\Delta_K(w^2) \equiv 0 \pmod{4}$ が成り立つことである。

$\tilde{M}_\mu(K)$ については K が 2-bridge knot のとき、特徴づけが可能である。すなわち、

Th 3.4 2-bridge knot の A_4 -branched covering はもし存在すれば、あるレンズ空間と同相である。

証明 2-bridge knot K を 2 つの 2-string trivial tangle $(B_1, t_1), (B_2, t_2)$ に分解する。 $\partial B_1 \cup \partial B_2 = S^3$, $\partial B_1 = \partial B_2$, $t_1 \cup t_2 = K$ 。 $(B_i, t_i) \sim (D_i, \{x, y\}) \times I$, D_i は 2 点 x, y を含む disc で $I = [0, 1]$ 。 $\{x, y\}$ 上 branch する D_i の A_4 -branched covering は genus 1 の disc。 従って t_i 上 branch する B_i の A_4 -branched covering は solid torus。 ■

最後に 1 つの予想を掲げておく。

Conj. knot K が A_4 表現 μ を持つとは

$$H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2 \cong H_1(\tilde{M}_3(K); \mathbb{Z}_2)$$

参考文献

- [1] M. Boileau and B. Zimmermann, *Symmetries of nonelliptic Montesinos links*, Math. Ann., **277** (1987), 563–584.
- [2] G. Burde and H. Zieschang, “Knots,” Walter de Gruyter & Co., Berlin–New York, 1985.
- [3] V. Chumillas and J. M. Montesinos, *The homology of cyclic and irregular dihedral coverings branched over homology spheres*, Math. Ann., **280** (1988), 483–500.
- [4] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, in “Topology of 3-manifolds and related topics (ed. by M. K. Fort Jr.),” Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962, 120–167.
- [5] T. Harikae, *Tetrahedral branched coverings of spatial theta-curves*, preprint.
- [6] 張替俊夫, 空間内のグラフの分岐被覆, 第39回トポロジー・シンポジウム講演集, 岩手大学, 1992年7月, 113–125.
- [7] T. Harikae and Y. Uchida, *Irregular dihedral branched coverings of knots*, preprint.
- [8] H. M. Hilden, *Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3* , Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 1243–1244.
- [9] F. Hosokawa and Y. Nakanishi, *On 3-fold irregular branched covering spaces of pretzel knots*, Osaka J. Math., **23** (1986), 249–254.
- [10] J. M. Montesinos, *A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of S^3* , Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 845–846.
- [11] K. Murasugi, *On dihedral coverings of S^3* , C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **2** (1980), 99–102.