

再帰過程によるカオスの研究  
九大理 小林達治 堀田武彦 森 肇

## 1. なぜ再帰過程か？

カオスでは、1つの初期点から出発した軌道は系全体を動き回りながら、何度も各点の近傍に再帰している。この再帰によって、不変測度が生成され、統計性が決定される。また、初期点のアンサンブルの時間的发展を考えると、よく混ざるためには、より近くに帰ってくることが不可欠である。このことから、再帰過程に着目することは、混合の様子や確率の生成を捉えるのに有効である。さらに、カオス軌道が系全体を巡っているために、再帰過程は、系の一部のみに着目していながら、系に含まれる特徴的な構造を取り出すことを可能にしている。

## 2. 再帰時間の分布

着目する領域への再帰時間 $\tau$ の分布 $f(\tau)$ の長時間での振る舞いにより、どのような情報が取り出せるかについて調べた。

一般に、カオスでは、軌道不安定性により、軌道間距離が指数関数的に増大するから、 $f(\tau)$ の長時間的振る舞いは、

$$f(\tau) \propto \exp(-\tau/\tau_c) \quad (\tau \gg 1)$$

となる。ここで、 $\tau_c$ は、着目する領域の全領域に対する体積比と Liapunov 指数に依存する。

ところが、系の一部にベキ的構造が存在するとき、 $f(\tau)$ の長時間的振る舞いは、この構造を反映して、

$$f(\tau) \propto \tau^{-\alpha-1} \quad (\tau \gg 1)$$

となる。そこで、この長時間での指数 $\alpha$ に注目しながら、カオスに現れるべき的構造の性質を考える。

今、 $\tau$ の $q$ 次のモーメントを考えると、

$$\langle \tau^q \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tau^q f(\tau) d\tau \simeq \lim_{T \rightarrow \infty} T^{q-\alpha}$$

となり、 $\alpha < q$ ならば、 $\langle \tau^q \rangle$ は発散する。すなわち、 $0 < \alpha < 1$ に対しては、 $\tau$ の平均値が存在せず、 $1 < \alpha < 2$ では、 $\tau$ の平均値は存在するが分散が存在しない。

他に、便利な量として、長さ $n$ の時系列のうち、領域内にはいつている回数 $N_n$ を考える。このとき、考えている領域内の滞在確率 $\mu$ は、

$$\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} N_T/T \simeq 1/\langle \tau \rangle$$

と表せる。また、 $N_n$ の平均 $E(N_n)$ と分散 $Var(N_n)$ の $n$ 依存性は、 $\alpha$ の値によって、次の二つのタイプに分かれる。

$$E(N_n) \propto n/\langle \tau \rangle \quad Var(N_n) \propto n^{3-\alpha} \quad (1 < \alpha < 2)$$

$$E(N_n) \propto n^\alpha \quad Var(N_n) \propto n^{2\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

逆に、このことから、 $\alpha$ を見積もる事ができる。

## 3. 散逸系

## 1) カオスの拡散

図1のような区分的線形な一次元写像を単位として、対角線上に並べる。各単位間の遷移を考えると、左右対称、かつ並進対称で、マクロには、拡散として捉えられる。

あるパラメーターに対しては、単純なマルコフの構造を考える事ができ、再帰時間の長時間的振る舞いを厳密に評価でき、 $\alpha = 0.5$ となった。

## 2) Critical map

$x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|^2$  の写像に対して  $z$  を変えていくと、再帰時間の分布は、 $z > 0.5$  では指数関数的に、 $z = 0.5$  でべき的となった。この事は、 $x = 0$  に  $z' = 2$  次の接触が生じる事の反映である。実際、長時間の振る舞いの指数は、 $\alpha = \frac{1}{z(z'-1)} = 2$  と見積もれ、数値的に得た値と良い一致を示した。

#### 4. 保存系

散逸系の場合、一般にべき的構造は存在しない。ところが、保存系の場合、崩壊直前の KAM トーラスのまわりの自己相似な島構造により、いつもべき的構造が準備されていると考えられる。この構造のうち、カオス軌道に最も影響を与える構造を取り出す事を目的としている。以下では、standard map

$$\begin{bmatrix} \theta_{i+1} \\ J_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i + J_{i+1}, \pmod{1} \\ J_i - (K/2\pi) \sin(2\pi\theta_i) \end{bmatrix}$$

を例にとり、再帰時間の分布を調べた。

##### 1) 拡散 ( $K > K_c \simeq 0.972$ )

相空間を分離するような last KAM が存在していないため、 $J$  方向の拡散が起こる。このため、一次元的拡散の結果と同じ、指数  $\alpha = 0.5$  を得た。

##### 2) sticking ( $K < K_c$ )

last KAM の存在により、系は有限の領域に限定され、指数関数的混合が起こる。ところが、保存系は、崩壊寸前の KAM トーラスがあちこちに存在し、カオス軌道はそれらのトーラスの近くに何度も捕まる。この反映として、長時間の相関は、べき的となる。実際、再帰時間の分布の長時間的振る舞いはべき的減衰となった。(図 2、図 3)  $\alpha$  の値を決める事は、系の統計量の収束の遅さを反映して、1 に近い値となった。

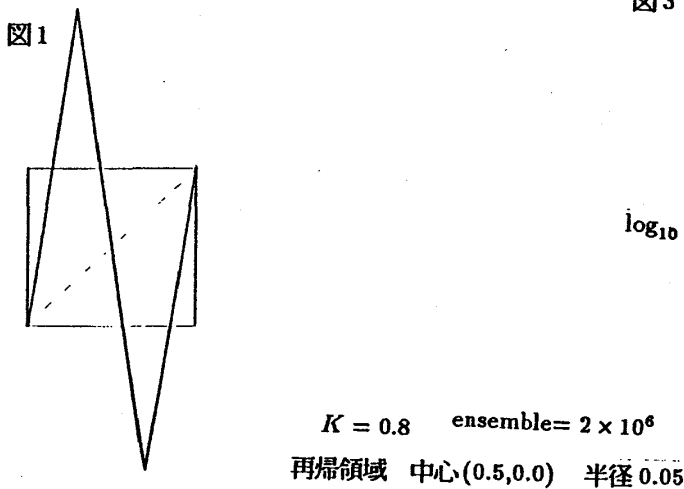


図 2 1 本の時系列から得た再帰時間の分布

