

カークマン問題とその応用

藤原 良 (Ryoh FUJI-HARA)

UNIVERSITY OF WATERLOO DEPT. OF COMBINATORICS and OPTIMIZATION

T.G. ROOM は 1955 年 "A NEW TYPE OF MAGIC SQUARE"
MATH GAZETT 39 の中で, 次のような問題を提起した。

A を次の条件を満たす ARRAY とする。

- (a₁) A の各 CELL は空又は n -set N の 2-SUBSET である。
- (a₂) N の全ての元は A の各行, 各列に必ず 1 回現われる。
- (a₃) N の全ての 2-SUBSET は必ず 1 回 A の中に現われる。

このような ARRAY A を ROOM SQUARE と呼ぶ。(MENDELSON
and WOLKE) そして $RS(n)$ と書く。上の定義
より次のことは自明である。

- (b₁) n は偶数。
- (b₂) A の size は $n-1$ 。

EXAMPLE 1 $RS(8)$

$\infty 0$	2 6	4 5		1 3		
	$\infty 1$	3 0	5 6		2 4	
		$\infty 2$	4 1	6 0		3 5
4 6			$\infty 3$	5 2	0 1	
	5 0			$\infty 4$	6 3	1 2
2 3		6 1			$\infty 5$	0 4
1 5	3 4		0 2			$\infty 6$

Room Square の存在・非存在に關しては MULLIN and WALLIS 1975 で解かれた。

THEOREM 1 (MULLIN and WALLIS)

A Room Square of order n exists if and only if $n \equiv 0 \pmod{2}$, $n \neq 4, 6$.

実はこの問題は, Room より 100 年ほど前, 1968 年 A. CAYLEY によって提起されていたのである。ところが, 最近 A. ROZA と C. St. J. A. NASH-WILLIAMS の指摘により, 次のことがわかった: (CAYLEY より 18 年前, 1850 年, T. P. KIRKMAN による "NOTE ON AN UNANSWERED PRIZE QUESTION" THE CAMBRIDGE AND DUBLIN MATH. JOURNAL V の中で) 同一問題が論議されていたのである。そして, KIRKMAN の功績にちなんで, Room Square を含む, 以下のような

より一般的な ARRAY $A \in$ KIRKMAN SQUARE と呼ぶ (ROZA, VANSTONE), $KS_k(v)$ と書く.

- (c₁) A の各 CELL は, 空又は v -set V の k -subset,
- (c₂) V の全ての元は, A の各行, 各列に 必ず 1 回現われる,
- (c₃) V の全ての 2-subset は A の CELL 中に 必ず 1 回現われる.

(NOTE: これは GENERALIZED ROOM SQUARE と呼ぶこともある.)

CELL に現われる k -subset を BLOCK とすると, これは明らかに $(v, k, 1)$ -BIBD となる. $KS_k(v)$ のデザインは UNDERLYING DESIGN と呼ぶ.

デザイン上の用語を用いて, KIRKMAN SQUARE を定義すると, 次のようになる. $D = (V, \mathcal{B}) \in (v, k, 1)$ -BIBD とする, V は v -set (VARIETIES), $\mathcal{B}$ は BLOCK の集合. RESOLUTION とは次を満たすような $\mathcal{B}$ の分割 $R_1, R_2, \dots, R_r$, $r = (v-1)/(k-1)$, である:

V のどの元も必ず 1 回, 各 R_i (CLASS), $1 \leq i \leq r$, に現われる.

$\mathcal{R}, \mathcal{S}$ を 2 つの D の RESOLUTION とする. そのとき

$$|R \cap S| \leq 1, \quad R \in \mathcal{R}, \quad S \in \mathcal{S}$$

なるば, RESOLUTIONS $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ は 直交する といふ.

直交する 2 つの RESOLUTION をもつ デザイン D を DOUBLY RESOLVABLE KIRKMAN SYSTEM と呼ぶ。

EXAMPLE 2 $KS_3(27)$

	25 19 7	27 12 24	4 11 22	3 16 17			26 1 13	2 10 18	23 20 21	8 5 6	9 14 15	
26 2 14		25 20 8	27 13 17	5 12 23	4 9 18			3 11 19		24 21 22	1 6 7	10 15 16
	26 3 15		25 21 1	27 14 18	6 13 24	5 10 19		4 12 20	11 16 9		17 22 23	2 7 8
		26 4 16		25 22 2	27 15 19	7 14 17	6 11 20	5 13 21	3 8 1	12 9 10		18 23 24
12 21 7			26 5 9		25 23 3	27 16 20	8 15 18	6 14 22	19 24 17	4 1 2	13 10 11	
1 16 19	8 13 22			26 6 10		25 24 4	27 9 21	7 15 23		20 17 18	5 2 3	14 11 12
27 10 22	2 9 20	1 14 23			26 7 11		25 17 5	8 16 24	15 12 13		21 18 19	6 3 4
25 18 6	27 11 23	3 10 21	2 15 24			26 8 12		1 9 17	7 4 5	16 13 14		22 19 20
8 11 17	1 12 18	2 13 19	3 14 20	4 15 21	5 16 22	6 9 23	7 10 24	27 25 26				
	5 14 24	22 7 9	6 12 19		1 10 20	18 3 13	2 16 23			25 11 15	27 8 4	26 17 21
3 9 24		6 15 17	23 8 10	7 13 20		2 11 21	19 4 14		26 18 22		25 16 12	27 1 5
20 5 15	4 10 17		7 16 18	24 1 11	8 14 21		3 12 22		27 2 6	26 19 23		25 9 13
4 13 23	21 6 16	5 11 18		6 9 19	17 2 12	1 15 27			25 10 14	27 3 7	26 24 20	

今までに、知られてゐる $KS_k(n)$ を年代順に列挙すると、次のようになる。

- 1975 MULLIN and WALLIS $KS_2(2^n)$ $n \geq 4$
- 1978 MATHON and VANSTONE $KS_8(8^3)$, 8 a prime power
- 1979 Dickey and Fuji-Hara $KS_8(8^3)$, 8 a prime power
- 1980 MATHON and VANSTONE $KS_8(8^n)$ $n = 2^i - 1$
 $i \geq 2$, 8 a prime power, (USING BEUTELSPACHER'S
 RESULT 1974, GEOMETRIAE DEDICATA 3 35-40)
- 1980_b FUJI-HARA and VANSTONE $KS_8(8^n)$ $n = 2^i$
 $i \geq 2$, 8 a prime power.
- 1981 FUJI-HARA and VANSTONE $KS_8(8^n)$
 $n \geq 3$, 8 a prime power.

この他に, $11 < 7$ の RECURSIVE CONSTRUCTIONS があり
 (FUJI-HARA and VANSTONE 1980_c) これらにより, 次の
 の定理がなりたつ.

THEOREM 2 (FUJI-HARA and VANSTONE 1980_c)

FOR v SUFFICIENTLY LARGE AND $v \equiv 1$ OR 4
 (mod 12), THERE EXISTS A $KS_8(2v+1)$

THEOREM 3 (FUJI-HARA and VANSTONE 1980_c)

LET 8 be a PRIME POWER ($8 \geq 3$). THEN
 EXISTS A CONSTANT C SUCH THAT FOR ANY
 INTEGER $v > C$ AND $v \equiv 1$ OR $8+1$ (mod $8(8+1)$),
 THERE EXISTS A $KS_8((8+1)v+1)$.

K.R. SHAH (1970) は ROOM SQUARE の実験計画法への応用を提案している。 ROOM SQUARE $RS(n)$ の行 $\in$ BLOCK B_i , 列 $\in$ VARIETY α_i , $\times$ した SYMBOL $\in$ TREATMENT β_i として, 次のような分割実験モデルを考えている。

$$x_{tijk} = \mu + B_k + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ki} + \varepsilon_{tijk}$$

このとき, 各効果 B_k, α_i, β_j , $1 \leq k, i \leq n-1, k, j \leq n$ の推定はあるのに, $RS(n)$ が次のような性質を持つと便利である:

(d) 次のようにして定義した 0-1 MATRIX M が SYMMETRIC BIBD の INCIDENCE MATRIX になる

$$M[m_{ij}] = \begin{cases} m_{ij} = 1 & \text{if } (i,j) \text{ cell of } RS(n) \text{ is } \phi \\ m_{ij} = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このような性質をもつ KIRKMAN SQUARE $\in$ BLANK BALANCED KIRKMAN SQUARE と呼ぶ。(BBKS_B(n) と書く) BBKS の存在に關しては, MULLIN and NEMETH 1975 や FUJII-HARA and VANSTONE 1982a で研究されている。

カークマン問題といふと, カークマンの女学生問題 (RESOLVABLE $(v, 3, 1)$ -BIBD) といふのが有名である。

この問題も、やはり19世紀に出されたが、解かれたのは最近である (RAY-CHAUDHURI and WILSON 1971)。上に述べた BBKS は ケークマンの女学生問題とも密接な関係がある。EXAMPLE 1 の $RS(8)$ を考えてみよう。各列に a, b, c, d, e, f, g とラベルする。あると 空 cell かるできる SBIBD は :

$dfg \quad aeg \quad abf \quad bcf \quad acd \quad bde \quad cef$

次に、各々のペアにその列記号を付加えて、新しい BLOCK を作る。

$\infty 0 a$	$\infty 1 b$	$\infty 2 b$	$4 6 a$	$5 0 b$	$2 3 a$	$1 5 a$
$2 6 b$	$3 0 c$	$4 1 d$	$\infty 3 d$	$\infty 4 e$	$6 0 c$	$3 4 b$
$4 5 c$	$5 6 d$	$6 0 e$	$5 2 e$	$6 3 f$	$\infty 5 f$	$0 3 d$
$1 3 e$	$2 4 f$	$3 5 g$	$0 1 f$	$1 2 g$	$0 4 g$	$\infty 6 g$

あると、これは ケークマンの 15 女学生問題の解となつてくる。あるある RESOLVABLE $(15, 3, 1)$ -BIBD が構成される。一般に次のような系列が構成可能である。

THEOREM (MULLIN and VANSTONE 1980)

THERE EXISTS A ROOM SQUARE $RS(n)$ FOR $n \equiv 0 \pmod{6}$ and n a prime power, such that a RESOLVABLE $(2n-1, 3, 1)$ -BIBD IS CONSTRUCTIBLE FROM $RS(n)$.

次に BIBD を以下のよりに一般化しよう。 $V \in v\text{-set}$,
 $\mathcal{B} \in V$ の subset (block) の collection とする。

そのとき, 次の性質を満たす $\text{SYSTEM}(V, \mathcal{B}) \in \underline{(r, \lambda)\text{-DESIGN}}$
 と呼ぶ:

- (e₁) V の各元は必ず r 個の block に含まれる。
- (e₂) 全ての V の 2-subset は必ず λ 個の block に含まれる。

そして, もし $(r, \lambda)\text{-DESIGN}$ が直交する 2 つの
Resolutions を持つとき, $D \in \underline{\text{DOUBLY RESOLVABLE}(r, \lambda)\text{-DESIGN}}$
 と呼ぶ ($\text{DR}(r, \lambda)\text{-design}$ と書く)

block size が一定でない, $\text{DR}(r, \lambda)\text{-design}$ は, 以
 下のよきものが知られている。

1978 MATHON and VANSTONE $\text{DR}(q^2+q+1, 1)\text{-design}$
 q a prime power, $k = q$ or $q+1$.

1979 DICKER and FUJI-HARA, $\text{DR}(q^2+q+1, 1)\text{-design}$
 q a prime power $k = q$ or u $1 \leq u \leq q+1$.

1981 FUJI-HARA and VANSTONE, $\text{DR}((q^n-1)/(q-1), 1)\text{-design}$,
 q a prime power, n odd, $n \neq 5$
 $k = q$ or u , $1 \leq u \leq q+1$.

この $\text{DR}(r, \lambda)\text{-design}$ の問題は 次のよき問題
 と同値である (DEZA, MULLIN and VANSTONE 1976)

A を次の条件を満たす $v \times r$ Array とする.

- (51) A の各行は r -symbol R の PERMUTATION である.
 (52) A の異なる任意の 2 行に, 必ず λ 個の同一-symbol を持つ列がある.

このような $v \times r$ Array を EQUIDISTANT PERMUTATION ARRAY と呼ぶ ($EPA(r, \lambda; v)$ と書く).

$R(r)$ を $EPA(r, 1; v)$ が存在する最大 v とすると, 次のような bound が知られている:

$$2r-4 \leq R(r) \leq r^2-4r, \quad r \geq 5$$

Lower bound は HEINRICH and VAN REES 1978, Upper bound は MULLIN and NEMETH 1978 に於る. MATTHEW and VANSTON の $DR(q^2+q+1, 1)$ -design は 次のような lower bound を与える

$$R(q^2+q+1) \geq q^3+q^2, \quad q \text{ a prime power.}$$

これは $R(r)$ が r に對して non-linear で増える最初の例であり, 現在のところ $R(r)/r$ の値で最大である.

これは, FUJII-HARA and VANSTONE 1981 に於いて次のように拡大された:

$$R((8^n - 1)/(8 - 1)) \geq 8^n + 8^{n-1}$$

8 a prime power, n any odd integer $n \geq 3$, $n \neq 5$.

次に, k KIRKMAN SQUARE によって, 次のような問題が, Howell (1955) によって提起された.

- (g₁) $KS_k(v)$ の各行について, 各 non-empty cell から各々 1 個ずつ元を取り出し, k 位の互いに disjoint な (v/k) -subsets を作る.
- (g₂) (g₁) で作られた, 全部で $k \cdot (v-1)/(k-1)$ 個の (v/k) -subsets (blocks) は V 上の BIBD となる.

(g₁) (g₂) を満たす $KS_k(v)$ を BALANCED KIRKMAN SQUARE と呼び, $BKS_k(v)$ と書く.

EXAMPLE 3 (EXAMPLE 1 の $RS(8)$ を用いて)

0 2 4 1	0 6 5 3
0 3 5 2	1 0 6 4
0 4 6 3	2 1 0 5
0 5 0 4	3 2 1 6
0 6 1 5	4 3 2 0
0 0 2 6	5 4 3 1
0 1 3 0	6 5 4 2

この問題に關しては、次のようなのが知られている。

1973 SCHELLENBERG $BKS_2(2(P+1))$, when $P=2^m k+1$
is a prime power, $m \geq 1$, $k \geq 1$ odd

1982 HWANG $BKS_2(8k+6)$, $k \geq 1$ and $8k+5$
a prime power

1982 DING Zhu Du and HWANG, $BSK_2(2(2^m k+1))$
 $2^m k+1$ a prime power, k odd, $k > 9 \cdot 2^{3m}$

1982_b FUJII-HARA and Vanstone $BKS_2(2^{2^n+1})$,
 $n \geq 1$, $BKS_2(8^n)$, 8 a prime power
 $n = [(2^i-1)^k-1] \cdot [2^j-1] + 1$, $i, j \geq 2$, $k \geq 1$

その他、 (C_3) の“必ず1回”を“高々1回”におきか
えた HOWELL DESIGN, KIRKMAN SQUARE を 3次元
に拡張した KIRKMAN CUBE 等の design を
研究されている。(D.R. STINSON 1982, ROZA and
Vanstone 1981, Fujii-Hara 1982)

References

Cayley, A

- 1863 On a tactical theorem relating to the triads of fifteen things, London
Edinburgh and Dublin Philos. Magazine and J. Sci. (4) 25, 59-61
(Collected Math. Papers V 95-97)

Deza, M., Mullin, R.C. and Vanstone, S.A.

- 1976 Room squares and equidistant permutation arrays, Ars Combinatoria 2

Dickey, L.J. and Fuji-Hara, R.

- 1979 A geometrical construction of doubly resolvable $(n^2+n+1, 1)$ -designs
Ars Combinatoria 8, 3-12

Ding Zhu Du and Hwang, F.K.

- 1982 Symmetric skew balanced structures and complete balanced howell rotations
(preprint)

Fuji-Hara, R

- 1982 Baer subplanes in a finite projective plane and Kirkman cubes
Combinatorial conference at Univ. of Waterloo (submitted)

Fuji-Hara, R and Vanstone, S.A.

- 1980a On automorphisms of doubly resolvable designs, Combinatorial Mathematics
VII, Springer-Verlag Lecture Note 829
- 1980b Orthogonal resolutions of lines in $AG(n, q)$, Research report, RRCO 80-28
Univ. of Waterloo (to appear in Discrete Mathematics)
- 1980c On the spectrum of doubly resolvable Kirkman system, Congressus Numerantium
28, 399-407
- 1981 The existence of orthogonal resolution of lines of $AG(n, q)$ (submitted)
- 1982a Skew resolutions and packings with applications to statistics
Geometry conference, Rome (submitted)
- 1982b A geometrical construction of balanced Kirkman squares (in preparation)

Heinrich, K. and van Rees, G.H.J.

- 1978 Some constructions for equidistant permutation arrays of index one,
Utilitas Math. 13 193-200

Hwang, F.K.

- 1982 Complete balanced Howell Rotations for $8k+5$ teams (preprint)

Kirkman, T.P.

- 1850 Note on an unanswered prize question, The Cambridge and Dublin Math.
Journal V

Mathon, R. and Vanstone, S.A.

- 1978 On the existence of doubly resolvable Kirkman systems and equidistant
permutation arrays (preprint) (Discrete Math 30, 1980)

Mathon, R. and Vanstone, S.A.

- 1980 On the existence of orthogonally resolvable Kirkman systems
Congressus Numerantium 29

Mullin, R.C. and Nemeth, E.

- 1969 *An existence theorem for Room square*, *Canadian Math. Bull.* 12, No. 4
1978 An improved upper bound for equidistant permutation arrays, *Utilitas Math.* 13 77-86

Mullin, R.C. and Wallis, W.D.

- 1975 The existence of Room squares, *Aequationes Math.* 13 1-7

Mullin, R.C. and Vanstone, S.A.

- 1980 Steiner systems and Room squares, *Annals of Discrete Math.* 7 95-104

Ray-Chaudhuri, D.K. and Wilson, R.M.

- 1971 Solution of Kirkman's schoolgirl problem, *Proc. Symp. Pure Math.* 19
AMS Providence RI 187-203

Room, T.G.

- 1955 A new type of magic square, *Math. Gazette* 39

Roza, A. and Vanstone, S.A.

- 1981 Kirkman cubes, *Annals of Discrete Math.* (to appear)

Shah, K.R.

- 1970 Analysis of Room square design, *The annals of Mathematical Statistics*
42 No. 2, 743-745

- 1982 Optimality of Generalized Room squares (preprint) (WITH S. GHOSH)

Schellenberg, P.J.

- 1973 On balanced Room squares and complete balanced Howell rotations,
Aequationes Math. 9 75-90

Stinson, D.R.

- 1982 The existence of Howell designs (to appear in *J. Combinatorial Th.*)