

ある種の P -凸領域

東大 理 中根 静男

定数係数線型偏微分作用素 $P(D)$ が、 $(D_{n+1}, \dots, D_{n+k})$ を含まないとき、 $\mathbb{R}^{n+k}$ における領域 Ω の P -convexity を幾何学的に特徴付けることを目標にする。

一般に、 $\mathbb{R}^n$ の領域 Ω が P -convex とは、

$\forall K: \text{compact in } \Omega$ に對し、 $\exists K': \text{compact in } \Omega$, such that

$$u \in \mathcal{E}'(\Omega), \text{ supp } P(-D)u \subset K \Rightarrow \text{supp } u \subset K'$$

が成り立つことである。この概念が重要なのは、Malgrange

[3] による、次の性質にある。

$P(D)u = f$ が $\forall f \in C^\infty(\Omega)$ に對し 解 $u \in C^\infty(\Omega)$ を持つ

$\Leftrightarrow \Omega$ が P -convex。

開凸集合が P -convex であることはよく知られているが、 P -convex set の完全な特徴付けは、次の場合にしかわかっていない。

1) P が elliptic (Hörmander [1])

2) $n=2$ (Hörmander [1])

3) P が 1 階 (Zachmanoglou [10])

4) $n=3$, P は principal type (i.e. $P_m(\xi)=0 \Rightarrow \text{grad } P_m(\xi) \neq 0$)

$\Omega \supset \partial\Omega$ は C^2 (Persson [8])

5) $P(D) = D_1 D_2 + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^n D_j^2$, $\partial\Omega$ は C^2 (Persson [9])

ここでは、主に上の場合のような作用素をとり上げ、それらを $\mathbb{R}^{n+k}$ の作用素とみなす。つまり、 $(D_{n+1}, \dots, D_{n+k})$ に依らぬ。

§ 1 一般的な結果

まず、Persson [5] にそって uniqueness cone を定義する。

定義 1 M : proper open convex cone in $\mathbb{R}^n$, vertex 0

と $y \in \mathbb{R}^n$ に対し、

$$K(M, y) = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x-y, \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in M\}$$

とおく。また、 $N \in M$, $0 < p \leq \infty$ に対し、

$$K(N, M, y, p) = \{x \in K(M, y); \langle x-y, N \rangle \gg -p\}$$

とおく。 $M \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; P_m(\xi) \neq 0\}$ のとき、 $K(N, M, y, p)$ を y での P の uniqueness cone という。

すると、Persson [5] により、次を得る。

補題 1 $K(N, M, y, p) \subset \Omega$ を P の uniqueness cone とする。

$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ が、

$$P(D)u = 0 \quad \text{near } K(N, M, y, p)$$

$$u = 0 \quad \text{near } K(N, M, y, P) \cap \{x; \langle x - y, N \rangle = -P\} \quad (1)$$

を満たせば、

$$u = 0 \quad \text{in } \text{Int } K(N, M, y, P)$$

(ここでは、(1)の集合を cone の底ということにする。)

証明は Holmgren の一意性定理から従う。この補題は、

$P(\cdot)u = 0$ の distribution 解の零点が、 P の uniqueness cone に沿って伝播することを示している。特に P が elliptic のときは、 M をいくらでも開半空間に近づけられるので、 P の uniqueness cone は、線分又は半直線にいくらでも近づけられる。故に、解の零点は、任意の折線に沿って伝わる。これは、 P が elliptic のとき、任意の開集合が P -convex になることの別証明を与える。なお、Holmgren の定理は hyperfunction でも成り立つので、この補題と、以下の零点の伝播に関する結果は hyperfunction でも正しい。

さて、cones の chain を、cones の有限集合 $\{K_i\}$ で、各 K_i の底は K_{i+1} に含まれるものと定義する。

定義 2 K : compact in Ω に対し

$$\hat{K}(P, \Omega) = K \cup \{x \in \Omega \mid K; x \text{ は } K^c \text{ 内の } P \text{ uniqueness cones の chain での } \Omega^c \text{ とは結ばない。}\}$$

と置き、 K の Ω における weak P -hull と呼ぶ。

特に P が elliptic なら、 $\hat{K}(P, \Omega)$ は K と Ω で相対 compact な K^c

のすべての連結成分の和集合である。次の補題は補題1からすぐ出る。

補題2 $K : \text{compact in } \Omega$ とすると、 $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ に対し、

$$\text{supp } P(D)u \subset K \Rightarrow \text{supp } u \subset \hat{K}(P, \Omega)$$

すると、 P -convexity のひとつの十分条件を与えることができる。

定理1 任意の $K : \text{compact in } \Omega$ に対し、 $\hat{K}(P, \Omega)$ が compact in Ω

$\Rightarrow \Omega$ は P -convex.

実は、先に上げた 1) へ 5) の場合は、この十分条件が必要条件にもなっている。即ち、これらの場合、

$$\Omega : P\text{-convex} \iff \hat{K}(P, \Omega) : \text{compact in } \Omega \text{ for all } K : \text{compact in } \Omega \quad (2)$$

§2 P が一部の変数を含まない場合

以後、 $\mathbb{R}^{n+k}$ 上の作用素 $P(D)$ で、 $(D_{n+1}, \dots, D_{n+k})$ を含まないものを考える。即ち、 P は $\mathbb{R}^n$ 上の作用素でもある。混乱を避けるために、 P を $\mathbb{R}^n$ 上の作用素とみなすときは P' と書く。そして $\mathbb{R}^{n+k}$ の領域 Ω の P -convexity を調べる。

$$\mathbb{R}^{n+k} \ni x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

$$a \in \mathbb{R}^k, \Omega \subset \mathbb{R}^{n+k} \text{ に対し, } \Omega_a = \{x \in \Omega : x'' = a\}$$

と書くことにする。まず、 P -convexity のひとつの必要条件を与える。以下の議論で Ω_a は $\mathbb{R}^n$ の開集合ともみなしている。

定理2 $\Omega: P\text{-convex} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}^k$ に対し、 Ω_a は P' -convex

証明 或る $a \in \mathbb{R}^k$ に対し、 Ω_a が P' -convex でないとする。 Ω_a の compact set K_a と、 $\Sigma'(\Omega_a)$ の列 $\{u_j(x)\}$ があって、

$$\text{supp } P'(-D') u_j \subset K_a \quad \text{かつ} \quad \text{dist}(\text{supp } u_j, \Omega_a^c) \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

そこで、

$$v_j(x) = u_j(x) \delta(x'' - a)$$

とおくと、 $v_j \in \Sigma'(\Omega)$ で

$$\text{supp } P(-D) v_j \subset K_a \quad \text{かつ} \quad \text{dist}(\text{supp } v_j, \Omega^c) \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

故に Ω は $P\text{-convex}$ でない。 //

この条件は十分条件ではない。反例は、例えば P' が $\mathbb{R}^n$ で elliptic のときである。しかし、 P' が $\mathbb{R}^n$ で (2) を満たしているならば、 $P\text{-convexity}$ のひとつの十分条件を与えることができる。

定理3 P' が $\mathbb{R}^n$ で (2) を満たすとき、

任意の $a \in \mathbb{R}^k$ に対し、 Ω_a が P' -convex かつ $\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$ が compact in Ω
 $\Rightarrow \Omega: P\text{-convex}$

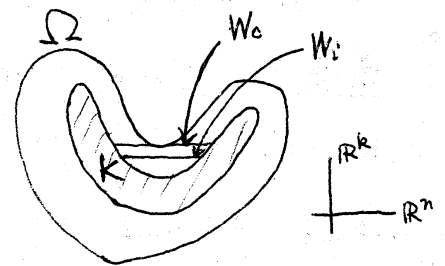
証明 y での P の uniqueness cone は、 $x'' = y''$ 上の P' の y' での uniqueness cone にいくらでも近づけられる。これは、 P が $(D_{m_1}, \dots, D_{m_k})$ を含まないことから容易にわかる。即ち、 P の uniqueness cone は $\mathbb{R}^k$ 方向にはつぶれていて、 $\mathbb{R}^n$ に平行とみなしてよい。故に $\hat{K}(P, \Omega)$ は $\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$ に含まれ、仮定より compact in Ω 。よって、定理1より Ω は $P\text{-convex}$ 。 //

特に P' が $\mathbb{R}^n$ で elliptic なら、定理 3 の条件は必要条件にもなっている。故に、この場合は、 P -convexity の完全な特徴付けができたことになる。

定理 4 P' は $\mathbb{R}^n$ で elliptic とすると、

$$\Omega : P\text{-convex} \iff \forall K : \text{compact in } \Omega \text{ に対し、} \bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a) \text{ は compact in } \Omega$$

証明 Zachmanoglou [10] の定理 4 の証明の若干の変形である。必要性を示せばよい。或る compact な K に対し $\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$ が compact でないとする。 $\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$ の点列 $\{x^i\}$ で $[\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)]^c$ の点 x^0 に収束するものがある、 $x^i \in K^c$ としてよい。 W_i を、 x^i を含む、 Ω で相対 compact な、 $K^c \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k}; x'' = x^{i''}\}$ の連結成分とする。又、 W_0 を、 x^0 を含む、 $K^c \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k}; x'' = x^{0''}\}$ の連結成分とする。 $x^0 \in [\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)]^c$ 故、 W_0 は非有界又は Ω^c と交わる。 W_0 が非有界なら、 x^0 は W_0 内の ∞ を通る



折線の端点で、この折線は K と交わらぬ。故に、十分大きな i に対し、 x^i も K^c 内の折線で ∞ と結ばれ、矛盾。故に W_0 は Ω^c と交わる。同様に、 $\text{dist}(W_i, \Omega^c) \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$) は容易にわかる。図のような状況になっている。 $2W_i$ は K に含まれることに注意しておく。

さて、 $w(x)$ を $P'(-D')w(x) = 0$ の実解析解とし、 $\chi_i(x')$ を $\mathbb{R}^n$ での W_i の特性函数とし、

$$u_i(x) = \chi_i(x') w(x') \delta(x'' - x_i'')$$

とかくと、

$$\text{supp } u_i = \overline{W_i}, \quad \text{supp } P(-D)u_i \subset W_i$$

故に Ω は P -convex であり、よって必要性が言えた。 //

定理 3 は 2) ~ 5) の場合にも適用できるが、このとき定理 3 の条件が必要かどうかは筆者にはわからない。

最後に、4) において、 P が principal type という条件は、constant multiplicity にまで緩められる。実際、uniqueness cone は multiplicity には依らないこと、null solution が constant multiplicity でも作れる (Persson [6], [7], Komatsu [2]) ことから容易にわかる。

文献

- [1] L. Hörmander: Linear partial differential operators. Springer, Berlin (1963).
- [2] H. Komatsu: Irregularity of characteristic elements and construction of null solutions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 23, 297-342 (1976).
- [3] B. Malgrange: Existence et approximation des solutions des équations

aux dérivées et des équations de convolutions. Ann. Inst. Fourier
Grenoble, 6, 271-355 (1955-1956).

[4] J. Persson : A sufficient condition for a set to be P -convex in $\mathbb{R}^n$.
Mathematike, 25, 1-7 (1970).

[5] _____ : On uniqueness cones, velocity cones and P -convexity.
Ann. Mat. Pura Appl., (4) 96, 69-87 (1973).

[6] _____ : Semi-global null solutions and P -convexity. Boll. Un.
Mat. Ital., (4) 8, 20-28 (1973).

[7] _____ : Correction of "Semi-global null solutions and P -convexity".
Boll. Un. Mat. Ital., (4) 11, 518-524 (1975).

[8] _____ : The Cauchy problem at simply characteristic points and
 P -convexity. To appear in Ann. Mat. Pura Appl.

[9] _____ : The wave operator and P -convexity. To appear.

[10] E.C. Zachmanoglou : An application of Holmgren's uniqueness theorem
and convexity with respect to differential operators with flat
characteristic cones. Trans. Am. Math. Soc., 140, 109-115 (1969).