

非可換超積に関する問題について

江田 勝哉

一般に超積を非可換化しようという話しではなく、群の非可換無限積、つまり、自由積の無限化と準同型写像と関係した話しである。以下 B_i ($i \in I$) を群とする。また $F \in I$ は F が I の有限部分集合であることを意味する。

普通の積を、可換な場合の積と呼ぶが、それを

$$\prod_{i \in I} B_i = \varprojlim (\prod_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \in I)$$

と見ることにより、群の自由積は

$$\varinjlim (*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \in I)$$

のように無限化することができる (Higman [7])。Higman はこの群を unrestricted free product と呼んでいる。この群は位相幾何では shape group と呼ばれる群に対応する。その部分群

$$x_{i \in I} B_i = \bigcap_{F_0 \in I} *_{i \in F_0} B_i * \varinjlim (*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \in I \setminus F_0)$$

は、 I が可算の場合、基本群に対応する。非可算の場合、Cannon-Conner[1] の Big fundamental group に対応する。この群の要素は無限語と関係し、 I が非可算の場合でも可算サポートをもつ部分群が基本群に対応する [4]。とくに、 $x_{n < \omega} \mathbb{Z}$ は Hawaiian Earring の基本群となる。

可換の積の場合準同型写像を考えると有限個の可算完備 ultrafilter $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ が存在して、

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} B_i & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \prod_{i \in I} B_i / \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \prod_{i \in I} B_i / \mathcal{U}_n & & \end{array}$$

となる [6]。念のため書いておくが、これは準同型写像の行く先が slender 群といわれる群のときにのみ成立することで、自明なことではない。

$$\mathcal{F} = \{X \mid \exists X_i (X_i \in \mathcal{U}_i \& \bigcup_{i=1}^n X_i \subseteq X)\}$$

とおけば、

$$\prod_{i \in I} B_i / \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \prod_{i \in I} B_i / \mathcal{U}_n = \prod_{i \in I} B_i / \mathcal{F}$$

江田 勝哉

となる。\$I\$ の濃度は最小の可測濃度未満であるならば、\$\mathcal{U}_i\$ は principal filter となり、有限集合 \$\{i_1, \dots, i_n\}\$ が存在し、\$\mathcal{F} = \{X \subseteq I : \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq X\}\$ となるので

$$\prod_{i \in I} B_i / \mathcal{F} = B_{i_1} \oplus \dots \oplus B_{i_n}$$

が成立する。この非可換化が成立して

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim (*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \in I) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \varprojlim (*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \in I) / \mathcal{F} & & \end{array}$$

が成立する [5]。\$I\$ の濃度は最小の可測濃度未満であるならば、\$\mathcal{F} = \{X \subseteq I : \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq X\}\$ となるので、

$$\varprojlim (*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \in I) / \mathcal{F} = B_{i_1} * \dots * B_{i_n}$$

となり、可換の場合と同じようにわかるやすい形となる。しかし \$\mathcal{U}_i\$ が principal でない場合、\$\varprojlim (*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \in I) / \mathcal{F}\$ は \$\varprojlim (*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \in I) / \mathcal{U}_1 * \dots * \varprojlim (*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \in I) / \mathcal{U}_n\$ とはならないので、複雑になる可能性が高い。しかし、まずは、\$n=1\$ のとき、つまり \$\mathcal{F}\$ が ultrafilter \$\mathcal{U}\$ で、\$B_i = \mathbb{Z}_i \cong \mathbb{Z}\$ のとき、\$\varprojlim (*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \in I) / \mathcal{F}\$ がどのようなものになるかを問題にすべきであろう。ここでは、その問題を扱う。

たとえば、\$\mathcal{U}\$ が \$\kappa\$ 上の normal ultrafilter であるならば \$X \subseteq [\kappa]^n\$ について

$$X \in \mathcal{U}^n \leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{U} ([Y]^n \subseteq X)$$

で定義される ultrafilter がある。このときは、

$$\begin{aligned} & \varprojlim (*_{i \in F} \mathbb{Z}_i, p_{FG} : F \subseteq G \in I) / \mathcal{U} \\ & \cong \{x \in \varprojlim (*_{i < n} \mathbb{Z}_i, p_{n,n+1} : n < \omega) \mid x \text{ is homogeneous}\} \end{aligned}$$

となる、ここで、\$x\$ が homogeneous であることの定義および先の説明のため、いくつかの notion の定義をする。\$F_0 \in I\$ について \$p_{F_0} : \varprojlim (*_{i \in F} \mathbb{Z}_i, p_{FG} : F \subseteq G \in \omega) \to *_{i \in F_0} \mathbb{Z}_i\$ を projection とすれば \$p_{FG} \circ p_G = p_F\$ が成立する。\$F, G \in \omega\$ が \$|F| = |G|\$ であるとき \$e_{FG} : F \to G\$ を順序同型写像とする。\$e_{FG}(a_i) = a_{e_{FG}(i)}\$ とすれば \$e_{FG}\$ は \$*_{n \in F} \mathbb{Z}_n\$ 上の同型写像に拡大される。\$F, G \in \omega\$ で \$|F| = |G|\$ であるときつねに、\$e_{FG}(p_F(x)) = p_G(x)\$ が成立するとき \$x\$ を homogeneous と呼ぶ。

\$\varprojlim (*_{i < n} \mathbb{Z}_i, p_{n,n+1} : n < \omega)\$ とくに、\$\mathbf{x}_{i < \omega} \mathbb{Z}_i\$ に homogeneous な要素が \$2^{\aleph_0}\$ ある。つまり、\$\mathcal{U}^n\$ がすべて ultrafilter となるような ultrafilter \$\mathcal{U}\$ に対しては、\$\varprojlim (*_{i \in F} \mathbb{Z}_i, p_{FG} : F \subseteq G \in \kappa) / \mathcal{U}\$ の濃度は \$2^{\aleph_0}\$ となる。

非可換超積に関する問題について

可換のとき常に、 $\mathbb{Z}$ と同型になるという状況であるのに対し、非可換の場合これとは全く異なる状況である。一般に principal でないとき、非可換の場合には $\mathbb{Z}$ と同型にならないということが成立すると思っ
ているが、よくわからない。もっと強く、「上記の $\mathcal{U}^n$ が ultrafilter とな
らないときには $\varprojlim (*_{i \in F} \mathbb{Z}_i, p_{FG} : F \subseteq G \in \kappa) / \mathcal{U}$ の濃度が κ 以上にな
る」という予想をしている。(これが問題 1)

2 番目の問題は、上に書いた Big fundamental group との関係の問題で、非可換超積と直接は関係はないが、素直な問題なのでここに、書
いておく。

L を compact, connected, densely, linearly ordered set とする (L は
順序位相で考えている)。このとき、 $L \times L$ は fixed point property を
もつか? L が可分のときは、単位区間となるから、これは、Brouwer
の不動点定理として有名。問題は一般に、成立するという事。

残りのところに、homogeneous elements が $2^{\aleph_0}$ あることの証明を
書く。

$\mathbf{x}_{i < \omega} \mathbb{Z}_i$ に homogeneous な要素が $2^{\aleph_0}$ あることを示すので、 $\mathcal{U}^n$ がす
べて ultrafilter となるような ultrafilter $\mathcal{U}$ に対しては、 $\mathbf{x}_{i < \omega} \mathbb{Z}_i / \mathcal{U}$ の濃
度が $2^{\aleph_0}$ あることになる。

与えられた語 W に対して W_n を $\overline{W_n} = \overline{W}$ で $W(\alpha) = a_i^m$ のとき
 $W_n(\alpha) = a_{i+n}^m$ と定義する。そして

$$V \equiv W_0 a_0 W_0^- W_1 a_1 W_1^- \cdots W_{n-1} a_{n-1} W_{n-1}^- W_n a_n W_n^- \cdots$$

とする。

$\overline{W}$ を有理数全体の順序とし W が既約であれば $W_{n-1}^- W_n^-$ も既約と
なり、それにより、 V も既約である。 $F = \{n_0, \dots, n_k\}$ (ただし $n_0 < \dots < n_k$) とする。 F が n を含まなければ $p_F(W_n a_n W_n^-) = e$ であるこ
とに注意すると

$$p_F(V) = W_{n_0} a_{n_0} W_{n_0}^- W_{n_1} a_{n_1} W_{n_1}^- \cdots W_{n_{k-1}} a_{n_{k-1}} W_{n_{k-1}}^- W_{n_k} a_{n_k} W_{n_k}^-.$$

が成立することがわかる。(右辺が既約語であるとは限らないことは注
意すべきである。)

V が homogeneous element を定義していることは、 $e_{FG}(p_F(V)) = p_G(V)$ をチェックすればよいが、それは上式から明らかである。一方
 $\overline{W}$ が有理数全体の順序となる既約語 W は $2^{\aleph_0}$ あるので $\mathbf{x}_{n < \omega} \mathbb{Z}_n$ の
homogeneous elements も $2^{\aleph_0}$ ある。

REFERENCES

- [1] J. W. Cannon and G. R. Conner, *The big fundamental group, big hawaiian earrings, and the big free groups*, Topology Appl. 106 (2000), 273–291.
- [2] G. R. Conner and K. Eda, *Free subgroups of free complete products*, J. Algebra 250 (2002), 696–708.

江田 勝哉

- [3] K. Eda, *A note on subgroups of F^N* , Abelian group theory (R. Göbel and E. Walker, eds.), LMN, vol. 1006, Springer-Verlage, 1983, pp. 171–174.
- [4] ———, *Free σ -products and noncommutatively slender groups*, J. Algebra **148** (1992), 243–263.
- [5] K. Eda and S. Shelah, *The non-commutative specker phenomenon in the uncountable case*, J. Algebra **252** (2002), 22–26.
- [6] P. Eklof and A. Mekler, *Almost free modules: Set-theoretic methods*, North-Holland, 1990.
- [7] G. Higman, *Unrestricted free products, and variety of topological groups*, J. London Math. Soc. **27** (1952), 73–81.
- [8] S. Shelah and L. Struengmann, *The failure of the uncountable non-commutative specker phenomenon*, J. Group Theory **4** (2001), 417–426.

早稲田大学理工学術院, 東京都新宿区大久保 169-8555

E-mail address: eda@waseda.jp