

多目的離散最適化アルゴリズムの評価

高松大学経営学部

疋田光伯 (Mitsunori Hikita)

関西大学総合情報学部

仲川勇二 (Yuji Nakagawa)

関西大学総合情報学部

伊藤俊秀 (Toshihide Itou)

関西大学総合情報学部

宮下文彬 (Fumiyosi Miyashita)

岡山理科大学総合情報学部

宮地 功 (Isao Miyaji)

1. はじめに

互いに競合する複数個の目的関数を、与えられた制約式のもとで最大（最小）化する問題は多目的最適化問題と呼ばれ、実用上重要な問題の一つであり、多くの分野で定式化され応用されている [1]～[3]。一般に、多目的最適化問題のすべての目的関数を同時に最適化する解は存在しない。その代わりに、ある目的関数の値を改善するためには、少なくとも他の1つの目的関数の値を改悪せざるを得ないような解の概念としてパレート最適解が定義されている。パレート最適解は単一解ではなく普通は無数個の点集合である。しかし、実用上の問題では、単一解または適当な大きさの解集合を求めなければならない。

従来、様々な多目的計画問題が定義され、その解法が提案されてきたが、そこで取り扱われる変数はそのほとんどが連続値をとるものであった [4]～[6]。これは離散最適化問題が計算の複雑さの観点から NP 完全であることから、実用規模の離散計画問題に対する有効な最適化手法の開発が難しいことに起因する。

著者らは、文献 [7] で変数がすべて離散値をとる多目的最適化問題（多目的離散最適化問題）を実用的に取り扱うための問題の定式化とそれを解くためのアルゴリズムを提案した。さらに、例題により、提案された多目的最適化アルゴリズムがパレート最適解を与えることを示した。ここで定式化された問題は標的問題と名づけられ、各目的（標的）関数の最適値に幅を持たせて、すべての標的関数がある範囲に入る実行可能解を列挙する問題である。標的問題を解くためのアルゴリズムは主にモジュラアプローチ [8] の概念を利用して構築されている。モジュラアプローチは変数分離可能な離散最適化問題を効率良く解くためのアルゴリズム設計法である。

本論文では、計算実験によって多目的最適化アルゴリズムの評価を行い、次の点で本アルゴリズムの有効性を明らかにする。

(1) 実用規模の多目的離散最適化問題を解くことができる。

(2) 標的関数の標的値を調整することによって、任意の大きさのパレート最適解集合を得ることができる。

(3) 本アルゴリズムを用いることによって、比較的簡単に意思決定者の価値観に合う解（選好解）を得ることができる。

最後に、選好解を求めるためのアルゴリズムの例を示す。

2. 多目的離散最適化問題

文献[7]で定式化された多目的離散最適化問題は標的問題（target problem: TP）と名づけられ、次のように定式化される。

$$(TP): \quad \text{target} \quad f(x) \geq f^{\text{opt}} - \varepsilon$$

$$\text{s.t.} \quad g(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \leq b$$

ここで、 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ は n 次元整数変数ベクトル、 $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^T$ は k 次元ベクトル標的関数（target function）、 $f^{\text{opt}} = (f_1^{\text{opt}}, \dots, f_k^{\text{opt}})^T$ はそれぞれの標的関数を単独で使用した単一目的の問題の最適値ベクトル、 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)^T$ は標的定数ベクトル、 $g(x)$ は制約関数である。また、関数はすべて非線形で変数分離可能型とする。すなわち、標的問題とは各標的関数の最適値に幅を持たせて、すべての標的関数がある範囲に入る実行可能解を列挙する問題である。後述の標的問題を解くためのアルゴリズムでは ε を調整することによって任意の大きさのパレート最適解集合を求めることができる。実用上の問題ではこれらパレート最適解の中から意思決定者の価値観に最も合うような解（選好解）を求める必要がある。なお、計算実験においては、 $f^{\text{opt}} - \varepsilon$ を f^{target} （標的値）として用いている。

3. 多目的離散最適化アルゴリズム

多目的離散最適化アルゴリズムはモジュラアプローチを中心として構築される。モジュラアプローチは、大規模な離散最適化問題を効率的に解くためのアルゴリズム設計法であり、これを用いることによって実用規模の多目的離散最適化問題を解くことが可能となる。

3.1 モジュラアプローチの概要

モジュラアプローチは、単一目的単一制約で分離可能な離散計画問題を効率よく解くことができ、動的計画法(dynamic programming)と同様にボトムアップ的な手法である。まず、与えられた離散最適化問題に対して対応した最適化システムを考え、次の(1)と(2)の操作を繰り返すことにより原問題を解く。

- (1) システムに対して深測操作を適用し決定空間を縮小する。
- (2) システム内の複数のモジュールを単一のモジュールに統合することによってモジュール数を減らす。

上記の(1)の深測操作では、分枝限定法と同様に、優越テスト(dominance)、限界値テスト(bounding)、実行可能性テスト(feasibility)の3テストを用いている。但し、問題が多目的の場合には優越テストは使用できない。(2)の二つのモジュールを一つのモジュールに統合するとは、二つの変数の解空間の直積を求め、その直積空間と対応する解空間を持つ新しい変数(モジュール)を導入し、もとの2変数を消去することである。動的計画法におけるモジュールの統合順序は関数方程式によって固定されたものであるが、モジュラアプローチにおいては統合すべきモジュールの選定政策を柔軟に決定できる。

モジュラアプローチを非線形ナップザック問題に適用した論文[9]の中で、計算時間と必要記憶容量は変数の統合政策に強く依存すること、そして変数の統合政策をうまく選べば実際的な問題に対してモジュラアプローチが有効であることが示されている。この結果を受けて、モジュラアプローチを非線形計画問題に適用した論文[10],[11]では、非線形計画問題を離散最適化問題に変換した後、モジュラアプローチを適用することによって、原問題を十分に解き得ることが報告されている。

3.2 多目的離散最適化アルゴリズム

本アルゴリズムは、まず、標的問題の1番目の標的関数 $f_1(x)$ のみを用いた単一目標の問題 TP^1 をモジュラアプローチによって解き、その解集合 X^1 を得る。次にこの解集合 X^1 の中で $f_1(x)$ 以外の標的関数 $f_2(x), \dots, f_k(x)$ がすべてそれぞれの標的範囲に入る解を抽出し、その解集合 $X^{s \circ 1}$ を求める。さらに、解集合 $X^{s \circ 1}$ に対して標的関数間の優越操作を行い、縮小された解集合 $X^{o \circ s}$ を得る。 $X^{o \circ s}$ は TP のパレート最適解である。

アルゴリズム

FUNCTION Main ()

INPUT TP, Fm, CIM

BEGIN

```

 $X^1 \leftarrow \text{ModularApproach} (TP^1, F_m, \text{CIM}) ;$ 
 $X^{\text{opt}} = \{x \in X^1 : f_j(x) \geq f_j^{\text{opt}} - \varepsilon_j (j=2, \dots, k)\} ;$ 
 $X^{\text{pos}} \leftarrow \text{Dominance} (X^{\text{opt}}) ;$ 
OUTPUT Pareto Optimal Solution  $X^{\text{pos}}$ 
END

FUNCTION ModularApproach ( $P^{(0)}$ ,  $F_m$ ,  $\text{CIM}$ ) ;
BEGIN
   $r \leftarrow 0;$ 
  WHILE  $r \leq n$  DO
     $r \leftarrow r + 1;$ 
     $\{A_{M^{(r-1)}}^{(r)}\} \leftarrow \text{Fathom} (r, P^{(r-1)}, F_m) ;$ 
     $\{C^{(r)}\} \leftarrow \text{Choice} (M^{(r-1)}, A_{M^{(r-1)}}^{(r)}, \text{CIM}) ;$ 
     $\{P^{(r)}\} \leftarrow \text{Integrate} (C^{(r)}, P^{(r-1)}, A_{M^{(r-1)}}^{(r)}) ;$ 
  ENDWHILE
RETURN Solution of  $P^{(0)}$ 
END

```

但し、

F_m	深測操作をどのモジュールに対して実施するかを決めるための政策
CIM	次に統合すべきモジュールを選定するための政策
TP^1	標的問題 TP において標的関数が $f_1(x)$ のみの単一目標である問題
X^1	TP^1 の解集合
r	問題の更新レベル
$P^{(r)}$	レベル r の問題
$M^{(r-1)}$	レベル $(r-1)$ のモジュールの番号集合
$C^{(r)}$	統合政策 CIM によって、レベル $(r-1)$ のモジュール番号集合から選定されたモジュール番号部分集合
$A_{M^{(r-1)}}^{(r)}$	$\{A_m^{(r)} : m \in M^{(r-1)}\}$
$A_m^{(r)}$	レベル r におけるモジュール m に対する代替案集合
Fathom	政策 F_m による深測操作を行い、関数のリターンとして縮小された決定空間を戻す関数

- Choice モジュール集合 $M^{(r-1)}$ から統合政策 CIM を用いて次に統合すべきモジュールを選定する関数
- Integrate 選定されたモジュール集合 $C^{(r)}$ を単一のモジュールに統合し，次のレベルの問題 $P^{(r)}$ をリターンとする関数
- Dominance 優越操作を行い，関数のリターンとして縮小された解集合を戻す関数

4. 計算実験

本アルゴリズムを用いて，次に示す非線形ナップザック型の多目的離散最適化問題を解いた．

多目的非線形ナップザック問題

$$\text{target } f(x) = \sum_{i \in I} f_{i,j}(x_i) \geq f_j^{\text{target}}, j=1,2,3,\dots,k$$

$$\text{s.t. } g(x) = \sum_{i \in I} g_i(x_i) \leq b$$

$$x_i \in a_i (i \in I), I = \{1,2,\dots,n\}$$

ただし， a_i は i 番目のモジュールの代替案集合である．

問題のサイズは問題 1，問題 2 をそれぞれ ($k=3$, $n=100$, $na=10$) および ($k=7$, $n=30$, $na=10$) とした．ここで， k は標的関数の個数， n は変数の個数， na は各変数の持つ初期代替案の個数である．各サイズの問題に本アルゴリズムを適用した結果を表 1，表 2 に示す．各問題に対して第 1 番目の標的関数の標的値をパラメータとして，パレート最適解の個数，計算時間，最適化過程におけるモジュールの最大代替案数を求めた．これらの結果より，本アルゴリズムが実用規模の多目的最適化問題に適用できることが分かった．また，標的値を変化させることによって適当な大きさのパレート最適解を得ることができた．意思決定者は標的値を自分の選好構造（例えば標的関数の重要度）に基づいて調整することによって対話形式で選好最適解を容易に求めることが可能である．これらの結果より，本アルゴリズムを応用することによって，比較的簡単に実用的な対話型意思決定システムの構築が可能であると考えられる．なお，計算実験にはワークステーション (CPU R4000) を用いた．

表 1 問題 1 ($k=3$, $n=100$, $na=10$) の計算結果

標的値	パレート最適解	計算時間 (s)	最大代替案数
5649	20	0.38	245
5648	847	26.25	13679
5647	—	—	—

表 2 問題 2 ($k=7$, $n=30$, $na=10$) の計算結果

標的値	パレート最適解	計算時間 (s)	最大代替案数
1732	10	0.06	281
1731	66	0.62	1974
1730	235	9.25	10101
1729	899	62.80	22271
1728	—	—	—

5. 選好解を求めるアルゴリズム

パレート最適解は単一解ではなく普通は無数個の点集合である。実用上の問題では、意思決定者はこれらパレート最適解の中から選好解を求める必要がある。本章では多目的離散計画問題の選好解を求めるアルゴリズムの例を示す。アルゴリズム (1) は、問題の各標的関数に対する意思決定者の価値基準によって標的値を定め、多目的離散最適化アルゴリズムを適用し、パレート最適解を求める。意思決定者の満足するパレート最適解が求まるまで、対話形式で標的値の更新と多目的離散最適化アルゴリズムの適用を繰り返す。アルゴリズム (2) は、意思決定者が見て選好解を選定可能な大きさのパレート最適解を求めるまでは各標的関数を対等に扱い、標的値の更新と多目的最適化アルゴリズムの適用を繰り返す。その後、意思決定者は縮小されたパレート最適解の中から自己の価値観に従って選好解を決定する。アルゴリズム (1) は標的関数間に何らかの関係がある場合に、また、アルゴリズム (2) は各標

的関数が対等である場合に有効であると考えられる。

選好解を求めるアルゴリズム (1)

- (手順1) 各標的関数を単一で使用したときの問題（単一目標単一制約）をモジュラアプローチで解き， f^{opt} を得る．意思決定者は f^{opt} を参考にして，各標的関数に対する初期標的値を定める．
- (手順2) 標的問題を多目的離散アルゴリズムで解き，パレート最適解集合を求める．
- (手順3) 現在のパレート最適解集合の中で各標的（目的）関数の達成レベルに満足する解があればこれを選好解として終了．さもなければ，現在の標的関数の達成レベルを考慮して，標的値を更新して手順2へ戻る．

選好解を求めるアルゴリズム (2)

- (手順1) 選好解を決定するためのパレート最適解集合の大きさ β 及び標的値の分割数 T を設定する．また，繰り返し制御変数 $Q = 1$ とする．
- (手順2) 各標的関数を単一で使用したときの問題（単一目標単一制約）をモジュラアプローチで解き， $f_1^{opt}, \dots, f_k^{opt}$ を得る．各標的値の刻み幅 $\Delta t_1 = f_1^{opt} / T, \dots, \Delta t_k = f_k^{opt} / T$ とする．
- (手順3) $f_1^{target} = f_1^{opt} - Q \cdot \Delta t_1, \dots, f_k^{target} = f_k^{opt} - Q \cdot \Delta t_k$ とした標的問題を多目的離散最適化アルゴリズムで解き，パレート最適解集合を求める．
- (手順4) 手順3で求められたパレート最適解集合の大きさが β 以内ならば，手順5へ行く．さもなければ， $Q = Q + 1$ として手順3へ戻る．
- (手順5) 意思決定者は，縮小されたパレート最適解集合の中から自己の価値観に合った解を選択し，終了する．

6. あとがき

本論文では，計算実験によって多目的離散最適化アルゴリズムが実用規模の問題に適用できることを明らかにした．また，本アルゴリズムを用いて意思決定者は標的値を自分の選好構造に基づいて調整することによって対話形式で選好解を容易に求めることが可能であることも示した．今後は，本アルゴリズムを応用して多目的離散計画問題に対する実用的な対話型意思決定システムの実現に向けて研究を進める予定である．

謝辞 本研究の一部は，関西大学学術研究助成基金の援助を受けて行われたものである。

参考文献

- [1] 福川忠昭：経営計画と多目的数理計画法，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 27, No. 6, pp. 320-324 (1982).
- [2] 福川忠昭：年度予算と多目標計画法，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 28, No. 10, pp. 467-473 (1983).
- [3] 中山弘隆：対話型多目的計画法とその応用，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 36, No. 9, pp. 435-439 (1991).
- [4] 清水清孝：多目的と競争の理論，共立出版 (1982).
- [5] 坂和正敏：多目的線形計画問題に対する対話型ファジィ意思決定手法とその応用，電子情報通信学会論文誌，Vol. J65-A, No. 11, pp. 1182-1189 (1982).
- [6] 福川忠昭，山口俊和：目標計画法とその発展，日本経営工学会誌，Vol. 36, No. 1, pp. 7-19 (1985).
- [7] 疋田光伯，仲川勇二，宮地功：多目的離散最適化問題を解くためのアルゴリズム，京都大学数理解析研究所講究録，No. 889, pp. 125-132 (1995).
- [8] 仲川勇二：離散最適化問題のための新解法，電子情報通信学会論文誌，Vol. J73-A, No. 3, pp. 550-556 (1990).
- [9] 仲川勇二，疋田光伯，岩崎彰典：多重選択ナップザック問題の高速厳密解法，電子情報通信学会論文誌，Vol. J75-A, No. 11, pp. 1752-1754 (1992).
- [10] 疋田光伯，岩崎彰典，仲川勇二：モジュラ法の非線形計画問題への適用，電子情報通信学会論文誌，Vol. J76-A, No. 1, pp. 64-67 (1993).
- [11] A. Iwasaki, M. Hikita, Y. Nakagawa and H. Narihisa: An Application of Modular Approach to Separable Nonlinear Programming Problem, 京都大学数理解析研究所講究録，No. 864, pp. 83-90 (1994).