

On the structure of holonomic D_X module with two irreducible characteristic varieties.

東大・理 本多 尚文 (HONDA Naohumi)

§ Introduction

一般に, holonomic module の構造は, microlocalize する事で, かなりの事が判っている. 本稿では, 特に, その特性多様体が 2 つの既約ラグランジアン解析集合からなる場合について, D_X -module の Category で, どの程度構造が判るか」という事を, 問題とする. X を複素多様体, γ を X の部分複素多様体とする. この時, 次の事が知られている.

定理 (Kashiwara [1])

m を D_X Coherent module, s.t. $\text{char}(m) \subset T_\gamma^* X$

$$\Rightarrow m \simeq \bigoplus_{\text{fini}} \mathcal{B}_{\gamma|X}. \quad \square$$

ここで, $\mathcal{B}_{\gamma|X} = R\Gamma_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X)[d]$ ($d = \text{codim}(\gamma)$) とする.

そこで, 次の様な問題を考える.

Problem(II) X を複素多様体, γ_1, γ_2 を X の部分複素多様体とする. Coherent D_X module m が $\text{char}(m) \subset T_{\gamma_1}^* X \cup T_{\gamma_2}^* X$ を満たす時, m の構造は?

§ Holonomic module の構造

この Problem に対する、最も単純な場合の解答は、以下の通りである。

定理 I

X, γ_1, γ_2, M は Problem (#) の通りとする。

γ_1, γ_2 が以下の a) or b) を満足するとする。

a) $\gamma_1 \not\subset \gamma_2$ かつ $\gamma_2 \not\subset \gamma_1$

b) $\gamma_1 \subset \gamma_2$ (resp. $\gamma_2 \subset \gamma_1$) 且 $\text{codim}_{\gamma_2}(\gamma_1) \geq 2$.
(resp. $\text{codim}_{\gamma_1}(\gamma_2) \geq 2$)

この時、

$$M \simeq \left(\bigoplus_{f \in I_1} \mathcal{B}_{\gamma_1|X} \right) \oplus \left(\bigoplus_{f \in I_2} \mathcal{B}_{\gamma_2|X} \right) \quad \square$$

従って、特に問題となるのは、次の様な場合である。

$$\begin{cases} \gamma \text{ は } X \text{ の non-sing hypersurface} \\ \text{char}(M) \subset T_X^* X \cup \pi^{-1}(r) \quad (\pi: T^*X \rightarrow X) \end{cases}$$

しかし、この場合 M の構造を決定することは非常に難しい問題である。特に、単純な場合として、1変数の holonomic

に、reduce 出来る時を考えよう。

$X = \mathbb{C}^n$ とし、以下の様に設定する

$$\begin{array}{ccccc} \gamma & & X & & \mathbb{C} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbb{C}^{n-1} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{P} & \mathbb{C} \\ (y) & \longmapsto & (y, 0) & & \\ & & (y, z) & \longmapsto & (z) \end{array}$$

Th II

X, Y, Z は既に述べた通り. M は holonomic D_X module 2.

$\text{char}(M) \subset T_X^* X \cup \pi^{-1}(Y)$, $\Gamma(Y) M = 0$ を満足するとする.

更に M が 条件 (*) $\text{char}_p(M) \subset \text{null section of } T^*(X/Z)$ を満たすとする.

この時, holonomic D_Z module $\widetilde{M}_Z$ が存在し

$$M \simeq \mathcal{O}_Y \hat{\otimes} \widetilde{M}_Z \quad \square$$

Remark:

1) M が R.S 2-あひは, (*) は 常に満たされる.

2) D^∞ を用いければ, (*) は必要ない. つまり常に $M^\infty \simeq \mathcal{O}_Y \hat{\otimes} (\widetilde{M}_Z)^\infty$.

$\text{char}_p(M)$ 及び $T^*(X/Z)$ については, (Schapira [2]) を参照せよ.

[Reference]

[1] Kashiwara, M.: On the maximally overdetermined system of linear differential equation I, Publ. R.I.M.S., Kyoto, 10, 563-579, (1975).

[2] Schapira, P.: Microdifferential systems in the Complex domain, Grundlehren der Math., 269, Springer, (1985).