

有限群の局所部分群に於ける因子分解について

愛知教育大 林 誠

(Makoto Hayashi)

仮定 A: G を有限群で $F^*(G) = O_p(G)$, $P \in \text{Syl}_p(G)$ とし
 $\mathcal{L}(P) = \{ Q / Q \text{ は } P \text{ の特性部分群} \neq 1 \}$ とおく。

主問題: I. 仮定 A 及び “適当な条件” を満たすすべて
 の G に対し, $G = \langle N_G(Q) / Q \in \mathcal{L} \rangle$ となる $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(P)$
 を見出せ。

II. 適当な $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(P)$ に対し, $G \neq \langle N_G(Q) / Q \in \mathcal{L} \rangle$
 なるとき, G について何が云えるか?

$$\text{例. } G = Q_d(p) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 1 \end{bmatrix} / a, \dots, f \in GF(p), ad-bc=1 \right\}$$

$$P \in \text{Syl}_p(G) \text{ に対して, } G \neq N_G(P) = \langle N_G(Q) / Q \in \mathcal{L}(P) \rangle.$$

この様に, 標数 p の体上の Chevalley 群と natural な

module の半直積群 G に対しては, 上記主問題 I, II は微妙となる。また, M を A_n (亦は S_n) の n 次の自然な permutation module $\overline{M}$ を trace で α の剰余とすると, $\overline{M}$ と A_n の半直積群 $\overline{M} \cdot A_n$ に於いても主問題 I, II は微妙となる。即ち, 逆に本質的に問題となるのは, この筈に非常に似通ったものに限るのではなからうか? というところに問題の意味がある。

何故このような問題を考えるか? 有限単群の分類完成以後は非単群 G を適当な言語で表現することが問題となろう。この際, 構造的に扱いか最も厄介なのは $F^*(G) = O_p(G)$ (即ち G の極小 normal (はすべて p -群) のときである。この case を G の Sylow p -群の invariant (特性部分群 $(\neq 1)$ (の正規化群)) で記述しようという試みである。尚, 問題の global な意味については本稿五味氏の記事参照。

従来得られた結果: 以下 G はすべて仮定 A を満たすとする。また, ^{但し} 特性部分群の定義については原論文を参照。

1° (Glauberman [33]) p が odd で, G が $Qd(p)$ を“含まない”ならば $G = N_G(Z(J(p))) = N_G(K^\infty(p)) = N_G(K_{\text{ev}}(p))$.

2° (Glauberman [4]) $p=2$ で G が $Qd(2) \cong S$ を“含まない”ならば, $G = N_G(J_i) N_G(J_j) \ (1 \leq i \neq j \leq 3)$ として $\{J_i \mid 1 \leq i \leq 3\} = \{J(p), Z(p), J(p)\}$.

問題:

1° (Aschbacher [1]) $J(G) = \langle J(R) \mid R \in \mathcal{S}_p(G) \rangle$, $p=2$.

$V = \langle \Omega_1 Z(P)^G \rangle$, $\overline{G} = G/C_G(V)$ とおくとき,

① $G \neq \langle N_G(J(P)), C_G(Z(P)) \rangle$ ならば,

$\overline{J(G)} \cong \prod_i SL_{n_i}(2^{m_i}) \times \prod_j Sp_{p_{n_j}}(2^{m_j}) \times \prod_k S_{n_k}$ で $V/C_V(J(G))$

はそれ等の natural modules の直和であるか?

② $G \neq N_G(J(P))C_G(Z(P))$ ならば,

$\overline{J(G)} \cong \prod_i C_i \times \prod_j S_{n_j}$, ここで C_i は 標数 2 の体上の

Chevalley 群の適当なもので, $V/C_V(J(G))$ はそれ等の

natural modules の直和であるか?

2°. $\exists K \triangleleft G$ s.t. $G/K \cong PSL(2, p^n)$, P を含む G の極大部分群は唯一つとするとき,

① (Aschbacher) $\exp(P)$ 又は P の nilpotent length が十分大ならば $\exists \{J_1, J_2, J_3\} \subseteq \mathcal{L}(P)$ s.t. $G = N_G(J_i)N_G(J_j)$, $k \neq j \leq 3$.

② (Thompson) ($C_p(G)$ 内の) どの chief factor も $SL(2, p^n)$ の natural な module でないならば, $G = N_G(ZJ(P))$?

但し, $p = \text{odd}$. これ等については [5] 参照.

3°. $p=2$, S^4 を "含まない" すべての有限群 G に対し,

$G = N_G(Q)$ なる $Q \in \mathcal{L}(P)$ を構成せよ.

3° (Hayashi [7]) $p=2$ で G が位数 $p(p-1)$ (p : Fermat prime) の Frobenius 群を "含まない" ならば, $G = N_G(\Omega, ZN^\omega(p))$.

更に関連した結果として,

4° (Goldschmidt [6]) G^* を (必ずしも仮定 A を満たさない) 有限群で S を G^* の 2-部分群, $H_i \leq G$ で $S \in \text{Syl}_2(H_i)$, $i=1,2$ とする。 $|H_i:S|=3$, $i=1,2$ で $\langle H_1, H_2 \rangle \not\leq N_{G^*}(T)$ for $\forall T \in \mathcal{L}(S)$ ならば $|S| \leq 2^7$.

5° (Rowley [9]) G^* を (必ずしも仮定 A を満たさない) 有限群で S を G^* の 2-部分群, $H_i \leq G$ で $S \in \text{Syl}_2(H_i)$, $i=1,2$ とする。 $|H_i:S|=p_i$ (素数), $i=1,2$ で $\langle H_1, H_2 \rangle \not\leq N_{G^*}(T)$ for $\forall T \in \mathcal{L}(S)$ ならば $p_1 = p_2 = 3$.

II. に関連するものとして,

6° (Niles [8]) $\exists K \triangleleft G$ s.t. $G/K \cong \text{PSL}(2, p^n)$, P を含む G の極大部分群は唯一つで $G \neq N_G(Q)$ for $\forall Q \in \mathcal{L}(P)$ とすると;
(1) $G/C_P(G) \cong \text{SL}(2, p^n)$ (2) G の non-central な chief factor は唯一つでそれは $\text{SL}(2, p^n)$ の natural な module (3) $\text{cl}(P) \leq 2$ or $p=3$ で $\text{cl}(P)=3$ 等々.

7° (Glauberman-Niles [5]) $\overset{p=2 \text{ 時}}{\exists K \triangleleft G \text{ s.t. } G/K \cong \text{PSL}(2, p^n)}$, P を含む G の極大部分群は唯一つで $G = N_G(Q)$ for some $Q \in \mathcal{L}(P)$ とすると, $G = N_G(J_i)$ for some J_i , $1 \leq i \leq 2$, として, J_1, J_2 は P に依ってのみ定義された特性部分群。

4°. G^* is (必ずしも仮定 A を満たさない) 有限群, $S \leq G^*$ is a 2-part subgroup, $H_i \leq G^*$, $S \in \text{Syl}_2(H_i)$, $F^*(H_i) = O_2(H_i)$, $|H_i : S| = p_i^{e_i}$ (p_i is prime) $i = 1, 2$ とする。さて、

① $\langle H_1, H_2 \rangle \not\leq N_{G^*}(T)$ for $\forall T \in \mathcal{L}(S)$ ならば p_1, p_2 は共に Fermat 素数で、 H_i は位数 $p_i(p_i-1)$ の Frobenius 群を "含む" か?

② $N_G(T) \not\leq \langle H_1, H_2 \rangle$ for any $1 \neq T \leq S$ with $e_1 = e_2 = 1$ ならば $\exists n$ s.t. $|S| \leq 2^n$?

5°. $Q = N_G(Q)$ for some $Q \in \mathcal{L}(P)$ ならば, Q is complete characteristic in P (i.e. $Q \leq R \leq P$ ならば Q は R の特性部分群) になるか?

REFERENCES

- [1] Aschbacher, On the failure of the Thompson's factorization... (to appear)
- [2] Glauberman, Canadian J. Math. 20 (1968)
- [3] ———, Math. Z. 117 (1970)
- [4] ———, Regional Conference Series 33 Providence A.M.S. (1977)
- [5] Glauberman & Niles, A pair of characteristic... (to appear)
- [6] Goldschmidt, Ann. Math. 111 (1980)
- [7] Hagashi, Math. Z. 181 (1982)
- [8] Niles, J. Alg.
- [9] Rowley, Automorphisms of certain trees (to appear)