

氏 名 小 池 達 也
 学位(専攻分野) 博 士 (理 学)
 学 位 記 番 号 理 博 第 2145 号
 学位授与の日付 平 成 12 年 3 月 23 日
 学位授与の要件 学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
 研究科・専攻 理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
 学位論文題目 On the exact WKB analysis of second order linear ordinary differential equations with simple poles.
 (単純極を含む二階線型常微分方程式の完全 WKB 解析について)

論文調査委員 (主 査) 教 授 河 合 隆 裕 教 授 宮 岡 洋 一 助 教 授 竹 井 義 次

論 文 内 容 の 要 旨

主論文の目標とする所は、大きなパラメタ η を含む常微分方程式

$$(1) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q \right) \Psi(x, \eta) = 0$$

に対し、ポテンシャル Q が

$$(2) \quad \frac{Q_0(x)}{x} + \eta^{-2} \frac{Q_2(x)}{x^2} \quad (Q_0(x), Q_2(x) \text{ は } x=0 \text{ の近傍で正則})$$

と云う形の時、(1) の完全 WKB 解析を展開することである。ここで「完全 WKB 解析」とは(1) の WKB 解(それは一般には η^{-1} の発散級数である) の Borel 和を考えることにより指数的に小さい項まで「完全に」解析する手法を指す。ここで最も重要な課題は Borel 和が確定する領域外に或る WKB 解を解析接続した時指数的に小さい他の WKB 解を拾い込む現象(Stokes 現象)の解析(所謂接続公式)であり、それは Borel 和の定義に由り、WKB 解 Ψ の Borel 変換 $\Psi_b(x, y)$ (y は n の双対変数)の特異性の構造の研究に帰着される。

本論文では $\Psi_b(x, y)$ の特異性の研究を次の 3 段階に分けて遂行している。

(i) 方程式(1)に対し然るべき形式的座標

$$\tilde{x} = \tilde{x}_0(x) + \eta^{-1} \tilde{x}_1(x) + \eta^{-2} \tilde{x}_{12}(x) + \cdots$$

を見出して(1)の WKB 解 $\Psi(x)$ が、次の方程式

$$(3) \quad \left(-\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \eta^2 \tilde{Q} \right) \tilde{\Psi}(\tilde{x}, \eta) = 0$$

但し

$$(4) \quad \tilde{Q} = \frac{1}{\tilde{x}} + \eta^{-2} \frac{\lambda}{\tilde{x}^2}, \quad \lambda = Q_2(0)$$

の WKB 解 $\tilde{\Psi}(\tilde{x}, \eta)$ に拠り

$$(5) \quad \Psi(x, \eta) = \left(\frac{d\tilde{x}}{dx} \right)^{-1/2} \tilde{\Psi}(\tilde{x}, \eta) = 0$$

と形式的に表現できることを示す。

(ii) 方程式(3)の WKB 解の Borel 変換の具体的表示を求める。この場合 $\tilde{\Psi}$ の Borel 変換 $\tilde{\Psi}_b$ は、それが Borel 変換の定義に拠り

$$(6) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{1}{\tilde{x}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{\tilde{x}^2} \right) \tilde{\Psi}_B(\tilde{x}, y) = 0$$

なる偏微分方程式を満たすことと、この場合 WKB 解が方程式の特殊性に由り有する斉次性を併せ用いて具体的にガウスの超幾何関数に依り書けるので、超幾何関数に対する接続公式を用いて 2 つの規準的に定められる WKB 解 $\tilde{\Psi}_\pm$ に対しそれ等の Borel 変換 $\tilde{\Psi}_{\pm, B}$ の相互関係を書き下すことができる。

(iii) Borel 変換の定義に由り η^{-1} と云う掛け算作用素は Borel 変換に対しては y に関する不定積分として作用することを用いて (5) と云う形式的な関係式に解析的を味付けを与える。

このようにして得られた最終結果は次の通りである。以下 $s(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{Q_0(x)}{x}} dx$ と記すことにする。又、 $\Psi_\pm(x, \eta)$ は通常通り ($x=0$ に関して) 正規化された WKB 解を、 $\Psi_{\pm, B}$ はその Borel 変換を表わすものとする。

[主論文定理 2. 1] ($y=-s(x)$ の近傍での収束級数として与えられる) $\Psi_{+, B}(x, y)$ の解析接続は $y=s(x)$ に特異性を有し、そこでの (カット $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2; x \in W, \operatorname{Im} y = \operatorname{Im} s(x), \operatorname{Re} y \geq \operatorname{Re} s(x)\}$ (W は $x=0$ の適当な近傍) に沿っての) その不連続性 $\Delta \Psi_+$ は $2i \cos(\pi \sqrt{1+4Q_2(0)}) \Psi_{-, B}$ に一致する。

この主定理は、 $\Psi_\pm(x, \eta)$ の Borel 和が x 空間内の曲線 $S = \{x \in W; \operatorname{Im} s(x) = 0\}$ では確定しないこと、即ちこの曲線がストークス曲線であることを示している。 $\Psi_\pm(x, \eta)$ の Borel 和の S を越えての解析接続の際の変化の様子は (解析接続の向き、 $\operatorname{Re} s(x)$ の正負等で符号等種々小さな違いはあるが、概略) 次のような形でまとめられる。

$$\begin{cases} \Psi_+ \longrightarrow \Psi_+ \\ \Psi_- \longrightarrow \Psi_- + 2i \cos(\pi \sqrt{1+4Q_2(0)}) \Psi_+ \end{cases}$$

(詳しい陳述に関しては主論文 (2.22) 及び (2.23) 参照。)

論文審査の結果の要旨

主論文で論じられた微分方程式はその主部に単純極を持っている。(完全) WKB 解析に於いて (i) ポテンシャルが単純零点 (所謂 単純変わり点) を持つ場合、及び (ii) ポテンシャルが 2 重極を持つ場合、には WKB 解の構造はよく調べられているが、単純極を持つ場合はこの 2 つの場合が混ざりあって WKB 解の構造は複雑であろう、と予想されていただけに主論文の結果は驚く程明快である。申請者のこの鮮やかな成功の因は、申請者が周期ポテンシャルの解析から出発してその解析に応用することを常に念頭に置いていたお蔭と思われる。実際ポテンシャルが $P(\cos z)$ と云う形を持つ時 $x=\cos z$ と云う座標変換を行って得られる方程式は申請者が扱っている場合に該る。ここで注意すべきはこの際対応するポテンシャルが $Q_0(x)x$ と云う主部だけでなく $\eta^{-2}Q_2(x)/x^2$ と云う η に関して低次ではあるが特異性はより強い項を含んでいることである。実際この $\eta^{-2}Q_2(x)/x^2$ と云う項が申請者の解析に於いて重要な役割を果たしていることは申請者の与えた、この種の方程式の標準型が一つのパラメタを含み、そのパラメタが $Q_2(0)$ に依って与えられることから容易に察せられる所である。輪理的には申請者が扱った場合よりはるかに限定的な場合しか対象としないポテンシャル $Q_0(x)/x$ に考察を限っていたら多分問題の本質を捉えそこなったであろうと思われる。

さて、このようにデリケートな状況設定の下で、申請者はそのようなポテンシャルを持つ Shrödinger 方程式の WKB 解の Borel 変換に対し、その特異性の構造を調べるにより次のような事実を明示的に示している：

- $s(x) = \int_0^x \sqrt{Q_0(x)}/x dx$ と置く時、WKB 解の Borel 変換は $y = \pm s(x)$ に特異性を持つ。
- 従って $s(x) = 0$ となる点、即ち $x=0$ は完全 WKB 解析的には“変わり点”と見做すべき点であり、問題の方程式に於て $x=0$ は特異点であると同時に変わり点の役割も果していることが判る。
- さらに、 x 空間の曲線 $S = \{x \mid \operatorname{Im} s(x) = 0\}$ 上では (Borel 和の定義に拠り) WKB 解の Borel 和が確定しないけれど Borel 和が確定する領域から WKB 解が S を越えて解析接続される時の表示 (所謂 接続公式は具体的に与えられる。

この接続公式は標準型の WKB 解の Borel 変換の満たす偏微分方程式の解の構造を開けることに拠って与えられる。

このように“単純極を持つ方程式”の完全 WKB 解析は完璧な形で為されており申請者の力量が並々ならぬ物であることを示している。さらに申請者は

参考論文 2 : On the asymptotics of the spectrum of Heun's equation and the exact WKB analysis.

に於いて、単純極を持つ方程式の解析が最近数理物理学で関心が持たれ始めた Heun の方程式の解析にも有用であると思われる情況証拠を計算機実験と共に提示しており申請者の今後の活躍が期待される所である。

尚,

参考論文 3 : On the perturbation series in large order of anharmonic oscillators.

は やはり完全 WKB 解析に関わるものであるが、主論文、参考論文 1, 2 とは全く毛色の違うテーマ“非調和振動子の固有値の摂動展開の高次項の振舞”を分散公式を援用して調べたもので、完全 WKB 解析の有用性を示すと同時に申請者のセンスの良さをも示していると言えよう。

以上に見てきた所から明らかなように申請者は完全 WKB 解析の理論・応用両面に於いて卓越した業績を挙げており理学博士の学位を受けるにふさわしいと判断した。