

チャールズ・バベッジの “Essays on the Philosophy of Analysis” のうち “Of Induction” について On Charles Babbage’s “Of Induction” in his “Essays on the Philosophy of Analysis”

野村恒彦
Tsunehiko Nomura *

Abstract

Charles Babbage was an English polymath in the Victorian age. In his student days at Cambridge University, he organized the Analytical Society with his colleagues J. F. W. Herschel and George Peacock. The purpose of this Society was to introduce the Continental notations to England. Babbage left an unpublished manuscript entitled “Essays on the Philosophy of Analysis”. This manuscript is very important to understand English mathematical scene in his age. “Of Induction” is the forth essay in the manuscript. In this essay Babbage considered induction through treatises of Euler, these of Lagrange and correspondences of Leibniz and Johan Bernoulli. Babbage claims that we had to pay attentions to “an highly probable to necessarily truth” in reasoning of induction. Also Babbage introduces new mathematical notations in this chapter. Unfortunately his attempts does not have much success.

§ 1. はじめに

筆者はこれまでにチャールズ・バベッジ (Charles Babbage) による “Essays on the Philosophy of Analysis”¹ のうち “Analysis of the Essay of Games” (f.4r-f.15v)、 “Of Games” (f.16r -f.40v)、 “General Notions Respecting Analysis” (f.41r-f.55r)、 “Of Analogy” (f.83r-91r)、 “Of Artifice” (f.92r-123r) 及び “Merits for Invention” (f.56r-67r) について報告したが、今回報告するのは “Of Induction” で、これは “Essays on the Philosophy of Analysis”

Received November 29, 2016. Revised April 30, 2017.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 01A27, 01A45

Key Words: History of Mathematics, Charles Babbage

*神戸大学 Kobe University, Kobe, 657-8501 JAPAN

email: noraneke@portnet.ne.jp

¹Ch. Babbage, “Essays on the Philosophy of Analysis”, British Museum Additional Manuscripts 37202.

の第4番目の章にあたる。本章の内容については、一般的な帰納法の考え方についてバベッジの主張がなされている。

なお“Essays on the Philosophy of Analysis”の成立については、以前に報告しているところであり、ここではふれない。また“Essays on the Philosophy of Analysis”は大部な手稿となっているため、各章ごとに論じる形態を採ることにした。従って全体を俯瞰することを目的とした論考は、すべての章を論じた後に行いたいと考える。

§2. “Essays on the Philosophy of Analysis”について

“Essays on the Philosophy of Analysis”はチャールズ・バベッジ (Charles Babbage) が残した未刊行の手稿である。バベッジはケンブリッジ大学生時代に解析協会 (The Analytical Society) を友人たちと組織して、大陸解析学を導入しようとした。この解析協会についての意義や歴史については、既に発表している拙稿を参照願いたい²。1821年頃成立した本手稿は³、バベッジの関心がどのようなものであったかが伺えるとともに、19世紀初頭の英国数学の状況を論じるための貴重な文献である。

“Essays on the Philosophy of Analysis”にはいくつかの章があるが、それぞれに付された題名を前回の報告同様掲げることとする (表1)。これらを見てもその主題は多岐にわたっており、バベッジの関心の広さが確かめられる。

表1: “Essays on the Philosophy of Analysis”のフォリオに付された章題

章の題名
Title
Index
Analysis of the Essay of Games
Of Games
General Notions Respecting Analysis
Of Induction
Of Generalization
Of Analogy
Of Artifices
Of Questions Requiring the Invention of New Modes of Analysis
Merits for Invention and the Philosophy of Analysis
On Notation

²野村恒彦, 「チャールズ・バベッジと解析協会 (Analytical Society)」, 『京都大学数理解析研究所講究録』, No.1513, 2006, pp.36-45.

³J. M. Dubbey, *The Mathematical Works of Charles Babbage* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978, 2nd 2004), p.93.

Analogy
 Induction
 Des rapprochements
 Of Artifices
 Abstraction
 Notation
 Games
 Notation
 Continuity
 Preface
 Invention

§ 3. 先行研究について

筆者の知る限りにおいては、“Essays on the Philosophy of Analysis”全体の先行研究は、ダビーによる *The Mathematical Works of Charles Babbage* のみである⁴。ただし、“Essays on the Philosophy of Analysis”の一部の章について論じたものは他の著者による論文がいくつかあるが、これら論文の大部分は本手稿の第3番目の章である“General Notions Respecting Analysis”を論じたものである。その理由は、ダビーがその著書で“General Notions Respecting Analysis”とピーコックの *A Treatise on Algebra* との関連性を最初に指摘したことによるものである⁵。

ダビーは本章“Of Induction”については、次の“Of Generalization”及び“Of Analogy”と一体となっていると指摘した後、その内容について概説している⁶。しかしその内容は次節で述べるように、本章の一部の概説にとどまっている。

§ 4. “Of Induction”の構成及び内容について

“Of Induction”は“Essays on the Philosophy of Analysis”の第4番目の章にあたる。本章は今までに発表した“Essays on the Philosophy of Analysis”の他の章に比べて長いものとなっている。フォリオの枚数から判断して他の章と同様な量であると思われるが、他の章ではフォリオ裏面の記述はほとんどなく、またあったとしても数葉であったのに比し、本章ではそのほとんどのフォリオの裏面に記述がある。従って章全体の分量はフォリオ数の倍近くになると考えるのが妥当である。

⁴J. M. Dubbey, *The Mathematical Works of Charles Babbage* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978, 2nd 2004).

⁵Dubbey, *op. cit.*, pp.100-9.

⁶Dubbey, *op. cit.*, pp.109-13.

また最も重要なことであるが、バベッジによる帰納法 (Induction) についての議論は数学的帰納法についての議論ではなく、一般的な帰納法についての議論であることに留意する必要がある。

“Of Induction”の構成は大きく分けて次の6つに分けることができる。

- (1) 2項定理による2項式の展開についての議論
- (2) フェルマーによる素数を求める数式についての議論
- (3) 7の累乗についての議論
- (4) 4を例にした累乗についての議論
- (5) 2項定理による2項式の展開と微積分の式との類似についての議論
- (6) ウォリス (John Wallis) の *Arithmetica Infinitorum* にある例の議論

これらの議論の境界は明確なものではなく、議論の対象からの区分であることに留意していただきたい。これら3つの議論のうち(1)、(2)及び(3)の議論については同分量のページを占めているが、(4)についての議論は前記3つの議論に比して多くのページを費やしている。また、(5)については後述するようにラグランジュの著作やライプニッツとヨハン・ベルヌーイとの往復書簡等が引用され、バベッジの数学的関心がこれらの著作等から影響されていることを確かめることができる。以下にバベッジが本章で言及している著作等のリストを掲げる。

1. Euler	(1) Observationes de theoremate qvodam Fermatiano, aliisque ad nvmmeros primos spectantibvs. (2) Theorematvm qvorvndam ad nvmeros primos spectantivm demonstratio. (3) De indvctione ad plenam certitvdinem evehenda. (4) Varia artificia in seriervm indolem inqvirendi.
2. Leibniz	Symbolismus memorabilis calculi Algebraici et Infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum; et de Lege Homogeneorum Transcendentali, Berlin-Brandenburgische Akademie
3. Leibniz - Johan Bernoulli	Variorum Celebes Got. Gul. Leibnitii et Johan Bernoulli Commercial Philosoohicum et Mathematicum, 1755. Dated on February 28, 1695. From Leibniz to Bernoulli. Dated on April, 1695. From Bernoulli to Leibniz. Dated on May, 1695. From Leibniz to Bernoulli. Dated on July, 1695. From Bernoulli to Leibniz. Dated on October, 1695. From Leibniz to Bernoulli.
4. Lagrange	(1) Sur une nouvelle espèce de calcul relatif á la différentiation et à l'intégration des quantités variables, p.441-476. (2) Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences

et belles-lettres de Berlin, année 1772.

なお、前に記したダビーの著作はこれらの議論のうち、(1)、(2)、(3) 及び (6) についての概説を行っているが、(4) と (5) については言及されていない。

§ 4.1. 2 項定理による 2 項式の展開についての議論

本章の冒頭で、まずバベッジは 2 項式の展開について述べている。すなわち $(x + y)^n$ の展開式を掲げている。バベッジが例として示しているのは、 $(1 + x)^n$ である。

1st $1 + x$
 2nd $1 + 2x + x^2$
 3rd $1 + 3x + 3x^2 + x^3$
 4th $1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$
 5th $1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

これらは一般に次のように表される。

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \&C$$

そして、先程の n が 5 までについては成立することを示した後、この式が成立することによって n が 5 以上の場合も成立するのかどうかをバベッジは問題とする。そして、この場合は代数的公式によって、数多くの場合を検討せずに成立することを説明するが、今述べた思考 (Induction) を用いてこれ以降のことを説明する過程では、その根拠は「非常に確からしいというよりも必然的な真である」(an highly probable to a necessary truth) によるものと完全に変更するとしている⁷。

さらにバベッジは $n = \frac{1}{2}$ の場合も考えているが、これは彼自身の言葉によれば「帰納法ではなく、一般化の原理から起こるものである」と説明される⁸。

§ 4.2. フェルマーによる素数を求める数式についての議論

次にバベッジは、帰納法は他の数学の分野よりも数論の分野において使用されることが多いが、単に一つだけ一致したとはいえ、それが 10 回一致することはなく、それが誤りとなる旨を主張する⁹。そして、その例としてフェルマーによる素数を表す式である $2^{2^n} + 1$ について述べている。これについて、フェルマーは彼の帰納法は 4 回のみ成立することを前提としていたと主張する。そして、オイラーは $n = 5$ で成立しないことを示したと述べ、先述の「非常に確からしいというよりも必然的な真である」という主張の例を示している。

⁷Babbage, *op. cit.*, f.56v.

⁸Babbage, *op. cit.*, f.57r.

⁹Babbage, *op. cit.*, f.57v.

これについて、ダビーは $n = 5$ の場合について、次のようになることを紹介している¹⁰。

$$2^{2^5} + 1 = 4,294,967,297 = 6,700,417 \times 641$$

その後、バベッジは前に記したオイラーの論文を紹介しながら¹¹、ウィルソンの定理についても言及している。そして、最近の解析家たちは素数のみを表す公式を発見しようと試みているにもかかわらず、彼らはたびたび素数についてのみ成立する性質を発見していたと主張する¹²。

§ 4.3. 7 の累乗についての議論

この議論については、バベッジが7の累乗の末尾の数字に着目したことから始まる¹³。すなわち7の累乗は次の表のようになり、末尾が01になるのは n が4、8であり4の倍数であるということである。ダビーは n が12及び16でも成立し、また末尾の数字が001になるのは n が20、40の場合であるとも説明している¹⁴。

n	7^n
1	7
2	49
3	343
4	2401
5	16807
6	117649
7	823543
8	5764801
9	40353607
10	282475249

これらについて、バベッジの議論は以下のとおりである旨、ダビーは説明を行っている¹⁵。

$$\frac{7^x - 1}{10^a} = \text{whole number}$$

ここで x を i とすれば、次のようになる。

¹⁰Dubbey, *op. cit.*, p.110.

¹¹L. Euler, "Observationes de theoremate quodam Fermatiano, aliisque ad nvmmeros primos spectantibus" *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 6, 1738, pp.103-7.

¹²Babbage, *op. cit.*, f.57v.

¹³Babbage, *op. cit.*, f.60r-60v.

¹⁴Dubbey, *op. cit.*, p.112.

¹⁵Babbage, *op. cit.*, f.60v. 及び Dubbey, *op. cit.*, p.112.

$$\frac{7^i - 1}{10^a} = w \text{ or } 7^i = 10^a \cdot w + 1$$

さらに、両辺を v 乗すると、次式が得られる。

$$7^{iv} = (10^a \cdot w + 1)^v$$

ここで $iv = x$ とおくと、

$$\frac{7^x - 1}{10^a} = \frac{(10^a \cdot w + 1)^v - 1}{10^a}$$

となり、これは 10^a で割り切れる。従って、 $iv = x$ の時、上式は whole number(整数)となる。

ただしこのダビーによる説明は、バベッジの主張を証明し、バベッジが解析的に証明しようとした一般的な規則であると述べただけで、その帰納法との関連性については述べてはいない¹⁶。

§ 4.4. 4 を例にした累乗についての議論

この後にバベッジは 4 の累乗について述べているが¹⁷、4 の累乗は以下のようになる。

n	4^n
1	4
2	16
3	64
4	256
5	1024
6	4096
7	16384
8	65536
9	262144
10	1048576
11	4194304
12	16777216

まずバベッジは 4 の累乗の 1 桁目の数字に着目する。表を見ればわかるように、1 桁目の数字は 4 と 6 が交互に出てくることになる。

そこでバベッジは、 $D_i^j a$ という記号を導入する。ここで、 a は累乗される数を表す。ここでは 4 である。 i は 1 桁目に交互に出てくる数字の数を表す。ここでは 6 もしくは 4 の

¹⁶Dubbey, *op. cit.*, p.112.

¹⁷Babbage, *op. cit.*, f.61r-62v.

2つの数字であり、バベッジが示した例では、6は1、4は2となる。そして j は桁数-1を表す。2桁目の数であれば、 $j = 1$ である。

では本項目でのバベッジの主張を見ていくことにする。まず表の $n = 2$ と $n = 4$ の場合を比較するが、この2つの数字はどちらも1桁目が6であることに留意する必要がある。すなわち $i = 1$ である。次に $n = 2$ の場合である16と $n = 4$ の場合である256の2桁目(すなわち $j = 1$)に着目すると、16の場合は1、256の場合は5となる。この差は4である。これを先程の記号にあてはめると、 $D_1^1 4 = 4$ となる。

次に $i = 2$ の場合、すなわち1桁目が4の場合を考える。 $i = 1$ の場合と同様に考えて、 $n = 1$ の場合である4と $n = 3$ の場合である64の2桁目(すなわち $j = 1$)の差は6なので、 $D_2^1 4 = 6$ となる。

以下同様に考えて $i = 1$ で $j = 2$ の場合(すなわち1桁目の数字が6、3桁目の数字に着目する)、16と256の3桁目の数字の差は2なので、 $D_2^2 4 = 2$ となる。ところが、 $i = 2$ で $j = 2$ の場合(すなわち1桁目の数字が4、3桁目の数字に着目する)は4と64の3桁目の数字の差は0となり、バベッジが示している $D_2^2 4 = 8$ と一致しない。仮に $64(n = 3)$ と $1024(n = 5)$ の場合を考えてみても3桁目の数字の差は0であり、バベッジの主張とは一致しない。

このようにバベッジが記号を新たに導入して行った説明には、疑問がある。しかもバベッジ自身が記している内容にも矛盾がある。それはフォリオ62の表の面に見受けられる次のような記述である。バベッジは文中で $D_4^2 4 = 8$ と記しているにもかかわらず、続く $D_i^j 4$ の一覧で、 $D_4^2 4 = 2$ と説明している。ここで $i = 4$ という記述があり、先述の i が6と4の2種類しかないので矛盾するように思われるが、 $i = 3$ は6、 $i = 4$ は4と繰り返すことと理解する。しかし、 $D_4^2 4 = 8$ と $D_4^2 4 = 2$ のどちらであっても、先に説明したように実際の差は0であり、一致しない。

しかしこの不一致はバベッジによる説明が少ないことにより、論者が誤った解釈をしている可能性も否定できないため、ここではバベッジによる説明を続けることにする。

バベッジは $a = 4$ の場合を以下のようにまとめている。

$$D_1^1 4 = 4 \quad D_2^1 4 = 6$$

$$D_1^2 4 = 2 \quad D_2^2 4 = 8 \quad D_3^2 4 = 2 \quad D_4^2 4 = 2 \quad \& C$$

$$D_1^3 4 = 4 \quad D_2^3 4 = 6 \quad D_3^3 4 = 4 \quad D_4^3 4 = 6$$

$$D_1^4 4 = 2 \quad D_2^4 4 = 8 \quad D_3^4 4 = 2 \quad D_4^4 4 = 8$$

$$D_1^5 4 = 6 \quad D_2^5 4 = 4 \quad D_3^5 4 = 6 \quad D_4^5 4 = 4$$

そして、さらに新しい記号を導入して説明が続けられる。ここで導入される記号は $\approx$ というものであり、これは次に続く式の演算結果の1桁目を意味している。すなわち、 $\approx 2 \cdot 4^3$ というのは、 $2 \cdot 64 = 128$ であるから8となる。すると先程の一覧は次のように表される。

$$\begin{aligned}
D_1^1 4 &= 4 \approx 4^1 & D_1^2 4 &= 2 \approx 2 \cdot 4^0 & D_1^3 4 &= 4 \approx 4^1 & D_1^4 4 &= 2 \approx 2 \cdot 4^0 & D_1^5 4 &= 6 \approx 4^2 \\
D_2^1 4 &= 6 \approx 4^2 & D_2^2 4 &= 8 \approx 2 \cdot 4^1 & D_2^3 4 &= 6 \approx 4^2 & D_2^4 4 &= 8 \approx 2 \cdot 4^1 & D_2^5 4 &= 4 \approx 4^3 \\
D_3^2 4 &= 2 \approx 2 \cdot 4^2 & D_3^3 4 &= 4 \approx 4^3 & D_3^4 4 &= 2 \approx 2 \cdot 4^2 & D_3^5 4 &= 6 \approx 4^4 \\
D_4^2 4 &= 8 \approx 2 \cdot 4^3 & D_3^3 4 &= 6 \approx 4^4 & D_4^4 4 &= 8 \approx 2 \cdot 4^3 & D_4^5 4 &= 4 \approx 4^5
\end{aligned}$$

バベッジはこの後も a が 3、6、7 の場合についてもこの記号を利用して説明しているが、その意図は明確ではない。さらに言えば、ここでのバベッジによる記号を導入しての説明は、帰納法とは関係が希薄なものであると考える。

§ 4.5. 2 項定理による 2 項式の展開と微積分の式との類似についての議論

またバベッジはライプニッツとヨハン・ベルヌーイとの往復書簡から次のような 4 つの式を例示し¹⁸、二項定理と n 階微分の式の類似 (Analogy) は完璧なものであると主張する¹⁹。

$$\begin{array}{ll}
x + y & ydx + xdy \\
x^2 + 2xy + y^2 & yd^2x + 2dydx + xd^2y \\
x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 & yd^3x + 3dyd^2x + 3d^2ydx + d^3y \\
x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 & yd^4x + 4dyd^3x + 6d^2yd^2x + 4d^3ydx + xd^4
\end{array}$$

しかしこれは帰納法 (Induction) の議論ではなく、類似 (Analogy) の議論であろう。筆者は既に "Essays on the Philosophy of Analysis" のうち "Of Analogy" については発表しているが、そこではこのような議論はなかった。ただ "Of Induction" は "Of Analogy" よりも先に位置しているため、このような議論はなされなかった可能性は残っている。

§ 4.6. ウォリス (John Wallis) の *Arithmetica Infinitorum* にある例の議論

"Of Induction" の最後の部分において、バベッジはウォリス (John Wallis) の *Arithmetica Infinitorum* にある次の例について述べている²⁰。

$$\begin{aligned}
\frac{0+1}{1+1} &= \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\
\frac{0+1+4}{4+4+4} &= \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

¹⁸ *Variorum Celebes Got. Gul. Leibnitii et Johan Bernoulli - Johan Bernoulli & Commercial Philosoohicum et Mathematicum*, Marci-Michaelis Bousquet & Socior, 1755, pp.46-7.

¹⁹ Babbage, *op. cit.*, f.64r.

²⁰ Babbage, *op. cit.*, f.66r.

$$\begin{aligned}\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} &= \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18} \\ \frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16} &= \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} \\ \frac{0+1+4+9+16+25}{25+25+25+25+15+25} &= \frac{55}{150} = \frac{11}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}\end{aligned}$$

これについてもダビーは、一般式は次のように表されるとして、証明を与えているにすぎない。

$$\frac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)}{n^2(n+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

§5. まとめ

バベッジは本章に“Of Induction”と名付けているが、内容は先に述べたように数学的帰納法について述べたものではない。ここでは、いくつかの例を掲げてそれが成立するのであれば全体として成立するという、いわゆる帰納法の性質についての議論がなされている。この中でバベッジの「非常に確からしいというよりも必然的な真である」(an highly probable to a necessary truth) という主張は非常に重要であると考ええる。

しかし、章の後半に至っての議論は帰納法(Induction)についてではなく、類似(Analogy)についてのそれである。本章に続く章は、冒頭に掲げた表にあるように“Of Generalization”と題されている。これについては次の発表の機会に予定しているが、本章“Of Induction”、次の“Of Generalization”及び“Of Analogy”における議論については、“Essays on the Philosophy of Analysis”全体の評価を行う前に別途論じたいと考えており、今後の課題としたい。

京都大学数理解析研究所において発表を行った際に、ラテン語及びフランス語に関連して貴重なご意見をいただきました森本光生、但馬亨、カトリーヌ・ジャミの各先生方にこの場をお借りして感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] Babbage, Ch., “Essays on the Philosophy of Analysis”, British Museum Additional Manuscripts 37202.
- [2] Dubbey, J. M., *The Mathematical Works of Charles Babbage*, Cambridge University Press, 1978, 2nd 2004.
- [3] Leibniz, G. and Bernoulli, J., *Variorum Celebes Got. Gul. Leibnitii et Johan Bernoulli - Johan Bernoulli & Commercial Philosophicum et Mathematicum*, Marci-Michaelis Bousquet & Socior, 1755, pp.46-7.
- [4] Euler, L., “Observationes de theoremate quodam Fermatiano, aliisque ad nymmeros primos spectantibus”, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 6, 1738, pp.103-7.
- [5] 野村恒彦, 「チャールズ・バベッジと解析協会 (Analytical Society)」, 『京都大学数理解析研究所講義録』, No.1513, 2006, pp. 36-45.