

氏 名	菅 原 邦 雄 すが はら くに お
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	論 理 博 第 550 号
学 位 授 与 の 日 付	昭 和 51 年 11 月 24 日
学 位 授 与 の 要 件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目	On the Diameter of Certain Riemannian Manifolds (ある種のリーマン多様体の直径について)

(主 査)
論文調査委員 教 授 戸 田 宏 教 授 永 田 雅 宜 教 授 楠 幸 男

論 文 内 容 の 要 旨

一般に（連結かつコンパクトな）リーマン空間 M は、リーマン計量 g から導かれる距離函数 d に関して、距離空間になる。 M の2点 x, y の間の距離 $d(x, y)$ の上限 $d(M) = \sup d(x, y)$ は M の直径といわれるが、この論文の目的は直径についての良い評価式を与えることである。

申請者菅原邦雄はまず第一に直径を等長変換群との関連において考察した。 M をリーマン空間、 G_p を M の点 p を固定する等長変換の作る群、 K を M の断面曲率とする。このとき次の定理を証明した。

定理A $K \leq 1$ かつ M のある1点 p で $\dim G_p \geq 1$ と仮定する。このとき $d(M) \geq \frac{\pi}{2}$ である。ここで等号が成立するための必要条件是 M が定曲率1の空間になることである。特に M が偶数次元のときは、等号成立するための必要かつ十分な条件は M が定曲率1の実射影空間に等長になることである。

この定理によって、等質対称空間を含む殆ど全ての等質リーマン空間について、その直径が評価される。次に申請者は正曲率のリーマン空間について次の定理を証明した。

定理B M は偶数次元のリーマン空間で、 $0 < K \leq 1$ なるものとする。このとき $d(M) \geq \frac{\pi}{2}$ である。ここで等号が成立するための必要かつ十分な条件は M が定曲率1の実射影空間に等長になることである。

定理A, Bとも評価は最良であり、定理Bは奇数次元では成立しないことが知られている。また定理A, Bとも M の位相については何らの条件も課せられていない。

位相的条件を付加することによって、評価を良くしようとするのは自然な発想であるが、この問題について申請者は定理Aに対応する次の定理を証明した。（その一部は参考論文中に証明されている。）

定理A' 定理Aの仮定の下に、さらに M は単連結かつ M の次元は2, 3または4と仮定する。このとき $d(M) \geq \pi$ である。但し、 M の次元が2の場合には G_p についての仮定は不要である。

以上3定理の証明はリーマン空間 M の測地線の状況を詳しく調べることにより行なわれる。特に中心的定理である定理Aの証明では次に述べる命題が基本的役割を果たす。命題「 G を等方群 G_p の単位元の連結成分、 F を G で固定される M の点全体とする。（ F は全測地的部分多様体の和になる。） q を F の1点、 v

を点 q での M の接ベクトルで F と直交 L かつ長さ $\|v\|$ が $\frac{\pi}{2}$ 以下であるものとする。このとき $d(F, \exp_q v) = \|v\|$ である。」

なお参考論文では、リーマン空間 M の 1 点 P での cut locus と conjugate locus との相互関係を詳しく調べることにより、 M の位相に関する研究を行っており、主論文における研究の先駆をなすものである。

論文審査の結果の要旨

測地線の考察に基づくリーマン空間の大域的研究は近年めざましい発展をみせている。しかし直径の評価についての研究は、その重要性にもかかわらず、付随的に行われたものが殆んどであり、本格的な研究はなかった。申請者菅原邦雄は、直径の評価の問題に本格的に取り組み、極めて興味ある 3 つの定理を証明したものであり、本論文はリーマン空間の大域的研究に大きく貢献したものと高く評価される。

中心的な定理である定理 A は、1 点 P での等方群 G_P の大きさに着目して、直径を評価したものである。リーマン空間についてよく仮定される条件に、等長変換群の作用の推移性すなわち等質空間ということが挙げられる。申請者もまずこの条件に着目したが、推移性の条件の有効性は、リーマン計量に付随するいくつかの量がリー環の構造から代数的に計算されるところにある。しかしこのような代数的方法で直径の評価をするには大きい困難が伴い、実際にこの方法が通用できるのは等質対称空間の場合に限られる。一般の等質空間の場合にはその適用は甚だしく複雑かつ困難である。そこで申請者は推移性の条件に訣別し、全く新しい条件として、1 点 P の等方群 G_P の大きさに着目し、定理 A を確立したのである。しかも定理 A によって、殆んどの等質空間の直径が評価される。等方群 G_P の大きさに着目したところは、申請者の独創性と洞察の深さを余すところなく示している。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。