

Structure of Subfactors and $\ast$ -endomorphisms

大阪教育大 長田まり子 (Marie Choda)

超有限連続型有限因子環 M の部分因子環 N は, 有限次元でない限り, Combes の結果により超有限連続型因子環となるから, von Neumann の結果により, N は常に M と同型である。従って, M から N への $\ast$ -同型写像, 即ち, N を値域とする M の $\ast$ -endomorphism が, 多く存在する。そのような $\ast$ -endomorphism で, M と N の関係を, 最もよく反映するものは, どのような特徴を持っているのだろうか? この疑問は, 次の事実が動機となっている。即ち, Jones の指数理論が, 導入されて以来, 超有限連続型有限因子環の部分因子環で, 相対可換子環が, 自明なものを取り得る指数の値が問題となっており, Jones, Wenzl, Goodman-Harpe-Jones, Ocneanu, Haagerup-Schön 等により, 新しい部分因子環が構成されてきたが, それ等は, 或る $\ast$ -endomorphism と密接に, 結びついている。ここでは, そのような $\ast$ -endo

morphism について, 述べる。

§1. Standard $\ast$ -isomorphisms.

全体を通して, M は $\mathbb{H}$ -factor で canonical trace τ をもつものとする。 $\text{End}(M, \tau)$ により, τ を保存する M の $\ast$ -endomorphism 全体を与える。 τ の忠実性と正規性により,

$\rho \in \text{End}(M, \tau)$ に対し, $\rho(M)$ は, M の sub-factor となる。

$\rho(M)' \cap M = \mathbb{C}1$ となるとき, ρ は 既約 であるという。

Powers により, ρ の 指数 を $[M : \rho(M)]$ で定義し, $\text{Ind } \rho$ と記す。 $\rho, \sigma \in \text{End}(M, \tau)$ に対し, $\rho(x) = u \sigma(x) u^*$ を全ての $x \in M$ に対して成す $u = \text{タリ}$ $u \in M$ が, 存在するとき, ρ と σ は $u = \text{タリ}$ 同値であるという。 $M \supset \rho(M)$ が finite depth な関係にあるとき, ρ は finite depth であるといひ $M \supset \rho(M)$ の depth をもつて, depth ρ を定義する。 M から $\rho(M)$ への条件付期待値を, E_ρ で記す。

$$E_\rho(e) = (\text{Ind } \rho)^{-1} \text{ かつ } \rho^2(M) = \{e \in M' \cap \rho(M)\}$$

を成す射影 $e \in M$ が存在するとき, ρ は basic であるといひこのような条件を成す e を basic projection for ρ と呼ぶ。

$$M = \sigma\text{-weak closure of } \bigcup_j (\rho^j(M)' \cap M)$$

を成すとき, ρ は generating property を成すという。

basic かつ generating property を成す ρ を, standard な $\ast$ -endomorphism と呼ぶ。

補題 1. 指数と性質 basic, generating property 及び depth は unitary 同値に関して, 不変である。

補題 2. $P \in \text{End}(M, \tau)$ が generating property を充たすならば, P は Powers の意味で, shift である;

$$\bigcap_j P^j(M) = \mathbb{C}1.$$

§ 2. 例

ここでは, 以下基本的な役割を果たすいくつかの例について調べる。最初に掲げる例 1 は, Goodman-Harpe-Jones が, 用いたものである。

例 1. $C_0 \subset B_0$ は有限次元 von Neumann 環で, inclusion matrix の 1 行 1 列 = 乗 β が $2 \leq \beta \leq 4$ となっているものとする。 $\beta = 2 + q + q^{-1}$ を充たす数 q が存在する。この対に對する modulus β のマルチトレースを τ とする。 B_0 から C_0 への τ に関する条件付期待値に對応する射影を e_0 とする。

$B_1 = \langle B_0, e_0 \rangle$ とし, $B_0 \subset B_1$ に對する basic extension の列

$$B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_j = \langle B_{j-1}, e_{j-1} \rangle \subset \cdots$$

と射影の列 $e_0, e_1, e_2, \cdots$ を得る。 $g_j = (q+1)e_{j-1}$

とおき, $C_1 = g_0 B_0 g_0^{-1}$, $C_j = \langle g_{j-1}, e_{j-1} \rangle$ の生成する algebra

とおけば増大列: $C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_j = \text{alg} \{g_{j-1}, e_{j-1}\} \subset \cdots$

が得られる。 τ のマルチトレース性により, τ は各 B_j に拡張され

る。 τ に依る GNS 表現 π に対し, $B = \pi(\bigcup_j B_j)''$,
 $C = \pi(\bigcup_j C_j)''$ とすると, $B \supset C$ は $\mathbb{H}_1$ -因子環で, $[B:C] = \beta$
 を充す。 ρ を $x \in B$ に対して次の様に定義する:

$$\rho(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_0 g_1 \cdots g_k x g_k^* \cdots g_1^* g_0^*$$

補題 3. ρ は basic であるが, generating property をも
 持たない。 ただし $\dim C_0 \geq 2$ とする。

証明は, $\rho(B) = C$ なることと, $\rho(g_j) = g_{j+1}$ なることを
 用いて, e_0 が ρ に対する basic projection であることを示
 す。又 $\rho(x) = x$ である $x \in C_0$ に対して成立することと
補題 2 により, generating property をもたない事が判る。 //

例 2. $M \supset N$ を $\mathbb{H}_1$ -因子環の対で, $[M:N] < +\infty$ とする。
 Jones の basic construction を繰り返して得られる tower を

$$N \subset M \subset M_1 = \langle M, e_1 \rangle \subset \cdots \subset M_j = \langle M_{j-1}, e_j \rangle \subset \cdots$$

とある。以下この小文では, M_j, e_j は, ここで表われるも
 のを示す。 M の canonical trace τ はマルコフ性により,
 各 M_j にまで拡張され, それに関する $\bigcup_j M_j$ の GNS 表現 π を
 用いて, $M_\infty = \pi(\bigcup_j M_j)''$ とおく。各 M_j における J_j (
 canonical conjugation) を用いて,

$$T(x) = J_{j+1} J_j x J_j J_{j+1} \quad (x \in M' \cap M_{2j})$$

で定義される $M' \cap M_\infty$ から $M_2' \cap M_\infty$ への $*$ -isomorphism T
 は, Ocneanu の canonical shift と呼ばれる。

この canonical shift は, standard である。

実際, e_2 が Γ に対して basic projection となり, generating property を満たすことも簡単に示せる。

例 3. Jones による射影列 $\{e_j; j \geq 1\}$ により生成される II_1 -型因子環 R とし, $\theta(e_j) = e_{j+1} ({}^*j)$ とおけば, θ は R の $\mathbb{C}$ -不変な $*$ -endomorphism となる。 $\theta(R) = \{e_j; j \geq 2\}$ であり, e_1 は θ に対する basic projection となる。 $\{e_j; j\}$ の満たす基本的な性質により, θ は generating property をもち, standard $*$ -endomorphism となる。

この standard $*$ -endomorphism θ は, $\text{Ind } \theta < 4$ のときには, 例 1 で定義された形式で表わすことが出来る;

$$\theta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_1 u_2 \cdots u_k x u_k^* \cdots u_2 u_1 \quad (x \in R),$$

$$\text{ただし } u_k = (q+1)e_k - 1, \quad (q + q^{-1} + 2) = \text{Ind } \theta.$$

例 4. Ocneanu は指数 < 4 となる超有限型 II_1 -因子環の部分因子環の分類を行なう為, 相対可換因子環の tower

$$M' \cap M_1 \subset M' \cap M_2 \subset \cdots \subset M' \cap M_j \subset \cdots$$

の解析を行ない, string algebra $\mathcal{E}$ の flat connection を用いて, 各 $M' \cap M_j$ $\mathcal{E}$ 上の $*$ -endomorphism φ を定義することにより, 彼らの不変量を持つ部分因子環を与える方法を述べている。定義は, 簡単では無いので, 彼の文献を参照して下さい。

この $*$ -endomorphism φ は, $M' \cap M_\infty$ から $M'_1 \cap M_\infty$ への

最も興味深い standard なものの例となる。尚、例2に於ける Γ は、 q^2 においても定義され得ることと Ocneanu は記している。

§3. 有限可換群による接合積に対する basic extension

II-型因子環 $M \supset N$ に対する Jones basic extension 及び相対可換子環の tower は $M \supset N$ の関係が、接合積。又は fixed point algebra で与えられる場合には、 M の M の standard $*$ -endomorphism を調べるのに有用な、他の表示が、可能である。ここでは、それについて記す。

N は有限因子環、 G は N の外部自己同型写像のなす可換有限群、 M は N の G による接合積とする。 $g \in G$ に対する M の canonical な $*$ -等射 $u(g)$ と表わす。 u は G の M の中への $*$ -等射表現となる。 G の相対 $\hat{G}$ の元 r は次の定義により M の自己同型写像と考えることにより得られる。 $\delta(u(g)a) = \langle r, g \rangle u(g)a$, ($a \in N, g \in G$)。このとき、自己同型写像 $r \in \hat{G}$ は、 $u_1(r)(x \xi_0) = r(x) \xi_0$ ($x \in M$) を充す $L^2(M, \tau)$ 上の $*$ -等射 $u_1(r)$ を induce する、ただし ξ_0 は $L^2(M, \tau)$ における M に対する cyclic vector である。 $L^2(M, \tau)$ 上の M と $u_1(\hat{G})$ により生成される von Neumann 環は因子環となるが、これにより、 $M \supset N$ から basic extension に与えられる環 M_1 に他ならず、Jones projection e_1 は $e_1 = \sum_{r \in \hat{G}} u_1(r) / |\hat{G}|$ で与えられる。この方法を繰り返し述べることにし、 $*$ -等射の列

$\{u_{2i-1}(r) : r \in \hat{G}\}$ と $\{u_{2i}(g) : g \in G\}$ を

$$M_{2i} = \{M_{2i-1}, u_{2i}(G)\}'', \quad M_{2i+1} = \{M_{2i}, u_{2i+1}(\hat{G})\}''$$

と表すことも可能である。 Jones projection e_i は夫々

$$e_{2i} = \sum_g u_{2i}(g) / |G|, \quad e_{2i+1} = \sum_r u_{2i+1}(r) / |\hat{G}|$$

で与えられる。

補題 4. $\forall j$ に対して, 次が成立する;

$$M_{2j} = \{u_{2j+2i}(G), u_{2j+2i+1}(\hat{G}) : i \geq 1\}' \cap M_{\infty}$$

$$M_{2j+1} = \{u_{2j+2i+1}(\hat{G}), u_{2j+2i+2}(G) : i \geq 1\}' \cap M_{\infty}$$

$$J_{2j} u_{2j}(g) J_{2j} = u_{2j+2}(g), \quad J_{2j+1} u_{2j+1}(g) J_{2j+1} = u_{2j+3}(r)$$

$$J_{2j+1} u_{2j+2}(g) J_{2j+1} = u_{2j+2}(g), \quad [J_{2j+2}, u_{2j+3}(r)] = 0$$

証明 M_{2j}, M_{2j+1} 上に記した様な関係をもつことは, 定義により, 簡単に示すことが出来る。次に $M_{2i} \supset M_{2i-2}$ に対する projection (即ち $M_{2i} = \langle M_{2i-2}, e \rangle$) を e とすると, e は

$$e = \sum_{t \in \hat{G}} \sum_{k \in G} \langle k, t \rangle / |G|^2 \cdot u_{2i-1}(k) u_{2i}(t) u_{2i+1}(k)$$

で与えられる。この e を用いると, $u_{2i}(g) \in M_{2i-2}' \cap M_{2i}$

なる事実に注目すれば, 次の式を得ることが出来る;

$$J_{2i} u_{2i}(g) J_{2i} = \sum_{t \in \hat{G}} \sum_{k \in G} u_{2i-1}(t) u_{2i}(k) e u_{2i}(kg)^* u_{2i-1}(t)^*$$

この等式を用いることにより, 求める関係式がでてくる。 //

次に $M \cap M_{\infty}$ における standard $*$ -isomorphism の例を掲

ける。

例5. G は有限可換群だから, G から $\hat{G}$ の上への同型写像 ψ が存在する。 $g \in G, r \in \hat{G}$ とおいて r に対して,

$$P(u_{2i}(g)) = u_{2i+1}(\psi(g)), \quad P(u_{2i+1}(r)) = u_{2i+2}(\psi^{-1}(r))$$

とおけば, P は $M' \cap M_{\infty}$ から $M' \cap M_{\infty}$ への $*$ -isomorphism であり, basic の generating property をもつ。 basic projection は,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u_2(g) \text{ で与えられる。}$$

§4. M_{∞} における M の正規性

von Neumann の double commutant 定理の一般化として, Kadison は von Neumann 環 A の部分環 B が次の条件を満たすとき, B は A で正規であると呼んだ; $(B' \cap A)' \cap A = B$ 。 このとき, M や M_{∞} で正規であることと等しい。

この正規性は, 以下で, self-conjugate (Longo の意味で) な $*$ -endomorphism の決定に, 基本的な役割を果たす。

命題5. $M \supset N$ を II₁-因子環に対して次の条件のうちのどちらかを満たすとする;

(i) $[M:N] \leq 4$

(ii) M は N の有限可換な群 G による外部作用に関する横合積である。

そのとき M は M_{∞} の中で正規である。

証明. (i) の場合は Skau の補題 $e_1, e_2, \dots, \psi' \cap M_{\infty} = N$

を用いる。 (ii) の場合には, 補題 4 を用いる。 //

§5. standard $\ast$ -isomorphism の特徴付け

この節では, standard $\ast$ -isomorphism p が $M \supset N$ のある種の対に対しては, 決定されることについて述べる。

$p \in \text{End}(M)$ が finite depth のときには, $M \supset p(M)$ の関係と調べることは, $M \supset N = p(M)$ に対する相対可換子環の tower に対して $M' \cap M_\infty \supset M'_1 \cap M_\infty$ での関係を調べることに同値であり, 又 $M' \cap M_\infty$ から $M'_1 \cap M_\infty$ への $\ast$ -isomorphism と調べることに, $M \supset N$ が超有限連続型有限因子環のときには, 同値である。従って $M' \cap M_\infty \supset M'_1 \cap M_\infty$ における議論が, 本質的な役割を果たす。記号の簡略化のため,

$p \in \text{End}(M, \tau)$ に対し, $M \supset p(M)$ に対する paragraph を, p の graph と呼び, $\text{Graph}(p)$ で, 記すことにする。 $\text{Graph}(p)$ が A 型の coxeter graph のときには, standard なものは, 例 2 で掲げた θ (の本質的) にはないことを先づ示す。

補題 6. e を $p \in \text{End}(M, \tau)$ に対する basic projection とする。 $e_j = p^{j-1}(e)$ とおくとき, 列 $\{e_j; j \geq 1\}$ は $\lambda = (\text{Ind } p)^{-1}$ に対する Jones の関係 (即ち次の関係) を満たす;

$$e_i e_j e_i = \begin{cases} \lambda e_i & (|i-j|=1) \\ e_i e_j & (|i-j| \neq 1) \end{cases}$$

命題 7. $M \in \text{hyperfinite II}_1\text{-factor}$ とし, $p \in \text{End}(M, \tau)$ が

standard, $\text{Ind } p < 4$ とする。 $\text{Graph}(p)$ が Type A ならば,
 p は例 2 の θ である。

証明. $e \in p$ の basic projection とすると, 補題 6 により
 $p^j(e) = e_j$ は Jones の関係を満たす。 $p(M)' \cap M \supset \{1, e_0, \dots$
 $\dots, e_{j-1}\}$ で $\text{Graph}(p)$ が Type A かつ $\text{Ind } p < 4$ ならば
 により $p^j(M)' \cap M = \{1, e_0, \dots, e_{j-1}\}$ が得られる。 他方
 p は generating property をもつから $M = \{e_j : j \geq 0\}$ 。 従
 って $p = \theta$ 。 //

次の補題は, $M' \cap M_\infty \supset M_1' \cap M_\infty$ 上の Longo の意味での
 self-conjugate $\ast$ -endomorphism は, θ と密接な関係を持
 つことを示す。

補題 8. $M \supset N$ は II_1 -factor に対して, 次の (i), (ii) の, いづ
 れかを満たすとする;

$$(i) [M : N] \leq 4,$$

(ii) M は N の外部自己同型写像の有限可換群による接合積。

$M' \cap M_\infty$ から $M_1' \cap M_\infty$ への $\ast$ -isomorphism σ が $\sigma^2(M' \cap M_\infty)$
 $= M_2' \cap M_\infty$ を満たすならば, 次式を満たす;

$$\sigma(M_i' \cap M_j) = M_{i+1}' \cap M_{j+1} \quad (i \leq j).$$

証明. 命題 5 を用いる事にしよう。

定理 9. M が II_1 -factor N の外部自己同型写像の有限可
 換群による接合積ならば, 次の二つの集合の間に, 1 対 1 の

対応 Ψ が存在する:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho: * \text{-isomorphism of } M_1' \cap M_\infty \text{ into } M_1' \cap M_\infty, \rho^2 = \Gamma \text{ (unitary equiv.)} \\ \updownarrow \Psi \end{array} \right.$$

$\{ (r, \psi); r \in \hat{G}, \psi \text{ は } G \text{ から } \hat{G} \text{ の } \mathbb{C} \text{ 上の同型写像} \}$.

証明. 補題 4 により $\Gamma(u_{2c}(g)) = u_{2c+2}(g)$ かつ

$$\Gamma(u_{2c+1}(r)) = u_{2c+3}(r) \quad (g \in G, r \in \hat{G}) \text{ が判る。 } G \text{ から } \hat{G}$$

への同型写像 ψ と $r \in \hat{G}$ に対して,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(u_{2c}(g)) = \langle r, g \rangle u_{2c+1}(\psi(g)) \quad (g \in G) \\ \rho(u_{2c+1}(x)) = \langle r, g \rangle^{-1} u_{2c+2}(\psi^{-1}(x)) \quad (x \in \hat{G}) \end{array} \right.$$

と定義する。この ρ は求める条件を満たすこと、条件を満たす ρ は必ずこの関係を満たすような r, ψ を持つこと又、この様子は $\rho \leftrightarrow r, \psi$ への関係は 1対1 なることを等しいとせよ。 //

系 10. M は命題 9 に於けるものとする。 $M_1' \cap M_\infty$ から

$M_1' \cap M_\infty$ への $\rho^2 = \Gamma$ を満たす $* \text{-isomorphism}$ は $\rho(e_i) = e_{i+1}^r$ ($r \in \hat{G}$) を満たす。ただし e_{i+1}^r は次で定義される。

$$e_{2c}^r = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\langle r, g \rangle} u_{2c}(g), \quad e_{2c+1}^r = \frac{1}{|G|} \sum_g \langle r, g \rangle u_{2c+1}(\psi(g)),$$

ψ は G から $\hat{G}$ の同型写像。この e_{2c+1}^r は ψ の取り方に依らぬ。

定理 11. $M > N$ は II_1 -factor に対して $[M:N] \leq 4$ とする。 σ

は $M_1' \cap M_\infty$ から $M_1' \cap M_\infty$ への $* \text{-isomorphism}$ で $\sigma^2(M_1' \cap M_\infty) =$

$M_2' \cap M_\infty$ を満たすとする。

(1) $[M:N] = 2$ ならば $\sigma(e_i) = e_{i+1}$ ($\forall i$) であるか又は

$\sigma(e_i) = 1 - e_i \quad (\forall i)$ である。

(ii) $[M:N] \neq 2$ かつ $\dim(M' \cap M_2) = 2$ ならば,

$\sigma(e_i) = e_{i+1} \quad (\forall i)$ である。

証明. 先づ $[M:N] = 2$ ならば $\dim(M' \cap M_2) = 2$ が成
立する事に注意する。この条件より補題 8 を用いて, $\sigma(M_i' \cap M_j)$
 $= M_{i+1}' \cap M_{j+1}$ 従って, $\sigma(\{e_i\}) = \{e_{i+1}\}$ が成立する。こ
の事より (ii) の場合は簡単に成立する。(i) は, 系 10 による。//

補題 12. $R \subset A \in \text{II}_1\text{-factor}$ の対で, $[M:R] > 2$ かつ
 $\dim(R' \cap \langle A, e_R \rangle) = 2$ とする。 $\sigma, \rho \in \text{End}(A, \tau)$ が R 上
で一致し $\sigma(A) = \rho(A)$ と仮定するならば $\sigma = \rho$ 。

定理 11 と補題 12 により, self-conjugate な $*$ -endomorphism,
即ち $\rho^2 = \tau$ とする様な ρ は, 決定できる事が判る。それを
指数 4 以下の $\text{hyperfinite II}_1\text{-factor}$ の対に対して示す。尚, 定理 11 を通
用できる様な hyperfinite ではない $\text{II}_1\text{-factor}$ の対の面白い例と
しては, Popa が最近示したものがあつた。以下でその議論は
他の指数の場合にも, 通用可能である。詳しくは, 他の場
所で, 示す種りである。

応用 1. $M > N$ が paragraph A_n を持つ場合。

$\dim(M' \cap M_2) = 2$ が成立する。 $[M:N] = 2$ ならば, 定理
11 により $\sigma(e_i) = e_{i+1} \quad (\forall i)$ かつ $\sigma(e_i) = 1 - e_{i+1} \quad (\forall i)$ が
成立する。従って, 定理 9 により, $\sigma^2 = \tau$ とするものは,

2つ存在する。 $[M:N] \neq 2$ ならば“定理11”により $\sigma^2 = \tau$ となる σ は唯一つだけ存在し、それは例2の θ でなければならぬ。

応用2. $M \supset N$ の paragraph が D_n のとき。

$A = M' \cap M_{\infty} \supset B = M' \cap M_n$ とし、 $R = \{e_i; i \geq 2\}'' \supset R_\lambda = \{e_i; i \geq 3\}''$ とする。 $A \supset B$ は commuting square とし、

$$\begin{array}{ccc} A & \supset & B \\ \cup & & \cup \\ R & \supset & R_\lambda \end{array}$$

$R \supset R_\lambda$ の paragraph は A_{2n-3} である。このとき $A \supset B$ と $R \supset R_\lambda$ の関係は、Okamotoの結果により、 D_n と A_{2n-3} との関係のみによって決定される。すなわち D_n と A_{2n-3} の関係は、それを Bratteli diagram とみ直すことにより、 D_n は A_{2n-3} の周期2の outer automorphism による接合積とみられるから $A \supset B$ は $R \supset R_\lambda$ の周期2の outer automorphism による接合積とみられる。

補題13. $\sigma \in \text{End}(A, \tau)$ に対し、 $E_\sigma(e) = (\text{Ind } \sigma)^{-1} 1$ とする射影 $e \in R$ が存在するとする。 $E_R(u) = 0$ とする $u = \tau$ 1) $u \in M$ に対して、 $E_R(\sigma(u)) = 0$ が常に成立する。

補題14. A が $\mathbb{Z}_2$ -因子環 R の外部自己同型写像のみが有限可換群の接合積で $\sigma \in \text{End}(A, \tau)$ は既約であるとする。すると σ と $\{p \in \text{End}(A, \tau); p(A) = \sigma(A), p|R = \sigma|R\}$ の間には1対1の対応が存在する。

$M \supset N$ の paragraph が D_n 型のとき、 n は偶数でなければ

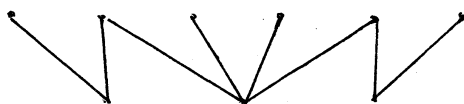
ならぬことが, Ocneanu, 河東, 泉等により示されているが,
 D_4 と D_n ($n \neq 4$) とでは, self dual $*$ -endomorphism の決定に,
 大きな違いが生じる。理由は, D_4 のときには, $\dim(M_1' \cap M_2) = 3$ で,
 D_n ($n \neq 4$) のときには, $\dim(M_1' \cap M_2) = 2$ に依る。

paragraph が D_4 のときには, 定理 9 により, $\sigma^2 = \tau$ となる
 A から B への $*$ -isomorphism のは 6 個存在する。paragraph
 が D_n ($n \neq 4$) のときには, 定理 11, 補題 13, 補題 14 により, 求
 めるのは 2 個で, 互いに可換である。

応用 3. $M \supset N$ の paragraph が E_6 のとき.

$[M:N] \geq 2$ かつ $\dim(M_1' \cap M_2) = 2$ なることが, E_6 のグラ
 フから判る。応用 2 のときと同様な形で, A, B, R, R_λ を置
 く。このとき $R \supset R_\lambda$ の包含関係は, A_{11} なるグラフにより,
 決定される。従って, $A \supset R$ の関係は, 十分大きな n に対
 して, $\{e_2, \dots, e_{2n}\}' \subset \bigcup \{M_1' \cap M_{2i}\}$ なる commuting square

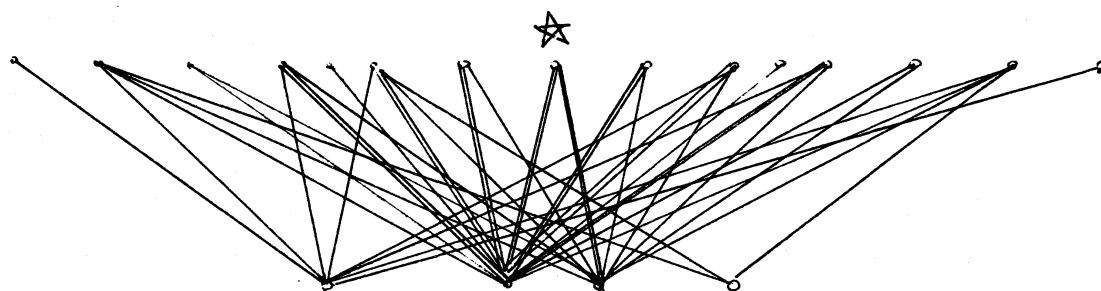
$$\bigcup \{e_3, \dots, e_{2n}\}' \subset \bigcup \{M_1' \cap M_{2i}\}$$
 で決まるが, これは, Evans - Gould, Okamoto, Pasquier 等
 の結果を用いると, 次のグラフで表わされる;



この事と補題 12 を用いると, $\sigma^2 = \tau$ となるものは, Ocneanu
 による $*$ -endomorphism (p) となることを判る。

応用4. $M \supset N$ の paragraph $\mathcal{P}$ の $E_{\mathcal{P}}$ のとき

応用3 のときと同様に, $[M:N] > 2$ かつ $\dim(M' \cap M_2) = 2$ となる こと が $E_{\mathcal{P}}$ の グラフ から 判る. A, B, R, R_{λ} を 応用2 のときと同様に定めると, 求める $\ast$ -isomorphism (A から B へ) は R を R_{λ} に移し, R 上では, unique である こと が 判る (定理11). 又 $A \supset R$ の関係は, 応用3 のときと同様な方法で求められ, グラフ $A_{\mathcal{P}}$ から 求める 環 $\ast$ グラフ $E_{\mathcal{P}}$ から 求める 環 $\wedge$ の 違いにより, 決定される. Evans-Gould の結果を用いると, それは, 次の様な グラフ で表わす こと が 可能になる.



図では見えにくいかもしれないので, この グラフ を 行列で表わすと, 次の様になる. ただし 紙面の都合上, 転置行列を示す.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

グラフの ☆ を中心として, 上段の頂点を左右対称に移し ☆ と下段の頂点は動かさない様な字像はグラフの自己同型字

像と同一, Ocneanu の不変量 τ, μ, w を保存する α で, A の自己同型字像で, R を不変にする。又 α のグラフから $R' \cap \langle A, e_R \rangle$ の中に, e_R とトレースの値が等しい射影は, 他にもう一つしか存在しないことが判る。以上のことを総合すると, $\sigma^2 = \tau$ とする $M' \cap M_w$ から $M'_1 \cap M_w$ への同型字像は, 2つであることが導ける。

Ocneanu の結果より, $M \supset N$ が $[M:N] < 4$ なる hyper-finite II₁-factor の組のときには, α とそれの逆なればならないことより, その様な組についてのみ議論した。この方法により, $A \supset R$ の関係が決定できる組合せならば, 他の場合についても議論可能である。

参考文献 (順不同)

- ① V. F. R. Jones : Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-15.
- ② F. Goodman, P. de la Harpe, V. F. R. Jones ; Coxeter graphs and towers of algebras, MSRI publications 14, Springer, 1989
- ③ A. Ocneanu ; Quantized group string algebras and Galois theory for algebras, in "Operator algebras and applications", vol. 2 (Wormicki, 1987), London Math. Soc. Lecture note 136.
- ④ S. Popa, Classification of subfactors : reduction to commuting squares, Invent. Math. 101 (1990), 19-43.

- ⊙ D. Evans, J. D. Gould ; Embeddings and dimension group of non-commutative AF algebras associated to models in classical statistical Mechanics, preprint
- ⊙ S. Okamoto ; Invariants for subfactors arising from coxeter graphs, preprint.
- ⊙ R. Longo ; Index of Subfactors and statistics of Quantum fields, I, II. Commun. Math. Phys. 126 (1989) 217-247, 130 (1990), 285-309.
- ⊙ M. Pimsner, S. Popa ; Iterating the basic construction, Trans, Amer. Math. Soc., 310 (1988), 127-133.
- ⊙ Y. Kawahigashi ; On flatness of Ocneanu's connections on the Dynkin diagrams and classification of subfactors preprint.
- ⊙ M. Izumi ; in preparation.
- ⊙ M. Choda ; Entropy for canonical shifts, to appear in Trans, Amer. Math. Soc.
- ⊙ M. Choda, Hiari ; Entropy for canonical shifts II, to appear in RIMS, Kyoto Univ.
- ⊙ M. Choda ; Duality for finite bipartite graphs.
- ⊙ R. T. Powers ; An index theory for semigroups of $\ast$ -endomorphisms of $B(H)$ and Type II_1 factors, Canad. J. Math., 40 (1988), 40