

REFINEMENT OF CARR AND JOHNSON'S RESULTS ON $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ -COMBINATORICS

神奈川大学工学部 阿部 吉弘 (Yoshihiro Abe)

$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の combinatorics における Carr の定理を改善し, Johnson の問題に部分的な回答を与える. 必要な概念の定義はその都度述べることにする. ただし, 本文では, κ は regular uncountable で, λ は κ より大きい cardinal とする. また, $\mathcal{P}_\kappa\lambda = \{x \subset \lambda : |x| < \kappa\}$ で, $|x|$ は x の cardinality である.

1. Carr の定理について.

Carr は [2] において次の定理を述べている.

Theorem. (Carr) *If $\mathcal{P}_\kappa\lambda \rightarrow (SNS_{\kappa\lambda}^+)^2$, then κ is almost λ -ineffable.*

ここで用いられていて, 本文で必要ないくつかの定義を述べる.

Definition. (1) $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して, $\hat{x} = \{y \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : x \subset y\}$.
(2) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が **unbounded** とは次のことである.

$$\forall x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda (X \cap \hat{x} \neq \emptyset)$$

(3) $I_{\kappa\lambda} = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : X \text{ is not unbounded}\}$.
(4) X 上の function f が **regressive** とは, 次のことである.

$$\forall x \in X (f(x) \in x)$$

(5) $SNS_{\kappa\lambda} = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : \exists f : X \rightarrow \lambda (f \text{ is regressive and } f|_Y \text{ is not constant for any unbounded } Y \subset X)\}$.
(6) $I \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)$ に対し, $I^+ = \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda) - I$, $I^* = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : \mathcal{P}_\kappa\lambda - X \in I\}$.
(7) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対し, $[X]^2 = \{(x, y) \in X \times X : x \subsetneq y\}$.
(8) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ と $I \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)$ に対し, $X \rightarrow (I^+)^2$ とは以下のことである.

$$\forall F : [X]^2 \rightarrow 2 \exists H \in \mathcal{P}(X) \cap I^+ (F|[H]^2 \text{ is constant})$$

(9) X 上の function f が **set regressive** とは, 次のことである.

$$\forall x \in X (f(x) \subset x)$$

(10) $X \subset \mathcal{P}_\kappa \lambda$ が **almost λ -ineffable** とは、次のことである。

$$\forall f: X \rightarrow \mathcal{P}_\kappa \lambda \left[(f \text{ is set regressive}) \longrightarrow \exists A \subset \lambda (\{x \in X : f(x) = x \cap A\} \in I_{\kappa\lambda}^+) \right]$$

我々は、Carr と同じ仮定から始めて、もう少し強い結論を導こう。そのための準備として、いくつかの定義とよく知られた事実を述べる。

Definition. (1) $I \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa \lambda)$ が **ideal** であるとは、次の条件 (a)~(d) を満たすことである。

- (a) $\emptyset \in I \wedge \mathcal{P}_\kappa \lambda \notin I$.
 - (b) $X \subset Y \wedge Y \in I \longrightarrow X \in I$.
 - (c) $\delta < \kappa \wedge \{X_\alpha : \alpha < \delta\} \subset I \longrightarrow \bigcup_{\alpha < \delta} X_\alpha \in I$.
 - (d) $\forall \alpha < \lambda (\{x \in \mathcal{P}_\kappa \lambda : \alpha \notin x\} \in I)$.
- (2) $NP(I) = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa \lambda : X \not\vdash (I^+)^2\}$.
- (3) I が **normal** とは次のことである。

$$\forall X \in I^+ \forall f: X \rightarrow \lambda \left[(f \text{ is regressive}) \longrightarrow \exists Y \in \mathcal{P}(X) \cap I^+ (f|Y \text{ is constant}) \right].$$

(4) $X \subset \mathcal{P}_\kappa \lambda$ が **closed** とは次のことである。

$$\forall \delta < \kappa \forall \{x_\alpha : \alpha < \delta\} \subset X [\forall \alpha < \forall \beta < \delta (x_\alpha \subset x_\beta) \longrightarrow \bigcup_{\alpha < \delta} x_\alpha \in X]$$

(5) $X \subset \mathcal{P}_\kappa \lambda$ が **club** とは、 X が closed and unbounded であること。

(6) $NS_{\kappa\lambda} = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa \lambda : \exists C (C \text{ is club and } C \cap X = \emptyset)\}$.

Fact 1. (1) $NP(I)$ is an ideal on $\mathcal{P}_\kappa \lambda$ for any ideal I on $\mathcal{P}_\kappa \lambda$.

(2) $NS_{\kappa\lambda}$ is the minimal normal ideal on $\mathcal{P}_\kappa \lambda$.

(3) $I_{\kappa\lambda} \subsetneq SNS_{\kappa\lambda} \subsetneq NS_{\kappa\lambda}$.

(4) If any regressive function on X is constant on some $Y \in \mathcal{P}(X) \cap SNS_{\kappa\lambda}^+$, then $X \in NS_{\kappa\lambda}^+$.

Lemma 1. $NS_{\kappa\lambda} \subset NP(SNS_{\kappa\lambda})$.

Proof. $X \in NP(SNS_{\kappa\lambda})^+$ で、 $f: X \rightarrow \lambda$ は regressive とする。

$F: [X]^2 \rightarrow 2$ を次のように定める。

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x) > f(y) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

仮定により、ある $H \in \mathcal{P}(X) \cap SNS_{\kappa\lambda}^+$ が存在して、 $F|[H]^2$ は constant であるが、明らかに $F''[H]^2 = \{1\}$ である。すなわち、任意の $x, y \in H$ に対し、

$$x \subset y \longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

ここで、 $H \in SNS_{\kappa\lambda}^+$ だから、 $T \in \mathcal{P}(H) \cap I_{\kappa\lambda}^+$ があって、

$$f|T \text{ is constant}$$

になっている。ゆえに、

$$H \cap \hat{x} \text{ 上で } f \text{ が constant}$$

であるような $x \in H$ が存在することが分かる。

$H \cap \hat{x} \in SNS_{\kappa\lambda}^+$ だから、Fact 1-(4) により、 $X \in NS_{\kappa\lambda}^+$ である。 $\square$

Definition. (1) $h : \lambda \times \lambda \rightarrow \lambda$ に対し、

$$C_h = \{x \in \mathcal{P}_\kappa \lambda : h''x \times x \subset x\}$$

(2) $X \subset \mathcal{P}_\kappa \lambda$ のとき、 $f : X \rightarrow \lambda \times \lambda$ が **regressive** とは、

$$\forall x \in X (f(x) \in x \times x)$$

Fact 2. (1) C_h is club for any $h : \lambda \times \lambda \rightarrow \lambda$.

(2) If any regressive function $f : X \rightarrow \lambda \times \lambda$ is constant on some unbounded subset of X , then $X \in NS_{\kappa\lambda}^+$.

Lemma 2 (1) Let $h : \lambda \times \lambda \rightarrow \lambda$ be a bijection. If $X \cap C_h \in SNS_{\kappa\lambda}^+$, then $X \in NS_{\kappa\lambda}^+$.

Proof. $g : X \cap C_h \rightarrow \lambda \times \lambda$ は regressive とする。

$h \circ g : X \cap C_h \rightarrow \lambda$ は $X \cap C_h$ 上の regressive function となり、 $X \cap C_h \in SNS_{\kappa\lambda}^+$ の仮定から、

$$\exists Y \in I_{\kappa\lambda}^+ (Y \subset X \cap C_h \wedge (h \circ g)|Y \text{ is constant})$$

となるが、 h は bijection だから、

$$g|Y \text{ is constant}$$

従って、Fact 2-(2) より、 $X \cap C_h \in NS_{\kappa\lambda}^+$. $\square$

Lemma 3. $NP(SNS_{\kappa\lambda}) = NP(NS_{\kappa\lambda})$.

Proof. Lemma 1 と定義から、 $NS_{\kappa\lambda} \subset NP(SNS_{\kappa\lambda}) \subset NP(NS_{\kappa\lambda})$ である。

$X \in NP(SNS_{\kappa\lambda})^+$ とする。

任意の bijection $h : \lambda \times \lambda \rightarrow \lambda$ に対し、Lemma 1 と Fact 2-(1) から、 $C_h \in NS_{\kappa\lambda}^* \subset NP(SNS_{\kappa\lambda})^*$ であるから、

$$X \cap C_h \in NP(SNS_{\kappa\lambda})^+$$

つまり、

$$\forall F : [X \cap C_h]^2 \rightarrow 2 \exists H \in SNS_{\kappa\lambda}^+ (F|[H]^2 \text{ is constant})$$

ここで、 $H = H \cap C_h \in SNS_{\kappa\lambda}^+$ だから、Lemma 2 により、 $H \in NS_{\kappa\lambda}^+$ を得る。すなわち、

$$\forall F : [X]^2 \rightarrow 2 \exists H \in NS_{\kappa\lambda}^+ (F|[H]^2 \text{ is constant})$$

だから、 $X \in NP(NS_{\kappa\lambda})^+$. よって、

$$NP(SNS_{\kappa\lambda}) \supset NP(NS_{\kappa\lambda}) \quad \square$$

以上から、次の定理が得られた。

Theorem 1. $\mathcal{P}_\kappa\lambda \rightarrow (SNS_{\kappa\lambda}^+)^2$ if and only if $\mathcal{P}_\kappa\lambda \rightarrow (NS_{\kappa\lambda}^+)^2$.

$\mathcal{P}_\kappa\lambda \rightarrow (NS_{\kappa\lambda}^+)^2$ からは、 κ が λ -ineffable であることが導かれる。

Definition. (1) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が λ -ineffable とは次のことである。

$$\forall f: X \rightarrow \mathcal{P}_\kappa\lambda \left[(f \text{ is set regressive}) \longrightarrow \exists A \subset \lambda \left(\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : f(x) = x \cap A\} \in NS_{\kappa\lambda}^+ \right) \right].$$

(2) κ が λ -ineffable とは $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ が λ -ineffable であることとする。

Kamo [6] では、 κ が λ -ineffable であることは、almost λ -ineffable であることより、本質的に強い仮定であることが示されている。これはまた、Theorem 1 が最初に述べた Carr の定理よりも実際に良い結果であることを意味している。

2. Partial answer for Johnson's question.

[5] で Johnson は次のような質問をしている。

Is $I_{\kappa\lambda}(\lambda, 2)$ -distributive if κ is mildly λ -ineffable?

これに対して、Theorem 2 で部分的な解答を与える。

Theorem 2. One can not prove in ZFC that $I_{\kappa\lambda}$ is $(\lambda, 2)$ -distributive whenever κ is mildly λ -ineffable.

まず、定義を述べる。

Definition. (1) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が mildly λ -ineffable とは、次のことである。

$$\forall f: X \rightarrow \mathcal{P}_\kappa\lambda \left[(f \text{ is set regressive}) \longrightarrow \exists A \subset \lambda \forall x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \exists y \in X \cap \hat{x} (f(y) \cap x = x \cap A) \right]$$

(2) W が $A \in I^+$ の I -partition であるとは、次の (a)~(c) を満たすことである。

(a) $W \subset \mathcal{P}(A) \cap I^+$.

(b) $\forall \{X, Y\} \subset W [(X \neq Y) \longrightarrow (X \cap Y \in I)]$.

(c) $\forall B \in \mathcal{P}(A) \cap I^+ \exists Z \in W (B \cap Z \in I^+)$.

(3) イデアル I が $(\lambda, 2)$ -distributive とは、

$$\forall \{W_\alpha : \alpha < \lambda\} [\forall \alpha < \lambda (W_\alpha \text{ is an } I\text{-partition of } A \wedge |W_\alpha| \leq 2)$$

$$\longrightarrow \exists B \in \mathcal{P}(A) \cap I^+ \forall \alpha < \lambda \exists X_\alpha \in W_\alpha (B - X_\alpha \in I)]$$

Johnson's question の背景. mildly λ -ineffable という性質は、weak compactness の一般化と考えられる。実際、

κ is weakly compact if and only if κ is mildly κ -compact

が成り立つ。ところで、

κ is weakly compact $\longrightarrow I_{\kappa\kappa}$ is $(\kappa, 2)$ -distributive

である。Johnson's question はこの意味で自然なものといえるだろう。

Lemma 4. *If I is $(\lambda, 2)$ -distributive, then $I|X = \{Y \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : Y \cap X \in I\}$ is also $(\lambda, 2)$ -distributive for any $X \in I^+$.*

Proof. $A \in (I|X)^+$, $\alpha < \lambda$ に対して W_α は A の $I|X$ -partition で $|W_\alpha| \leq 2$ とする。

$B = A \cap X \in I^+$ である。 $U_\alpha = \{Z \cap X : Z \in W_\alpha\}$ とすると、 U_α は B の I -partition になることが次のようにして確かめられる。

(a) $U_\alpha \subset \mathcal{P}(B) \cap I^+$ であることは、

$$Z \in W_\alpha \longrightarrow Z \in \mathcal{P}(A) \cap (I|X)^+ \longrightarrow Z \cap X \in \mathcal{P}(B) \cap I^+$$

(b) は明か。

(c) $Y \in \mathcal{P}(B) \cap I^+$ とする。 $Y \subset B \subset X$ より $Y \in \mathcal{P}(A) \cap (I|X)^+$ でもある。ゆえに、 $Z \in W_\alpha$ で $Y \cap Z \in (I|X)^+$ であるものが存在する。

$Z \cap X \in U_\alpha$ で $(Y \cap Z) \cap X \in I^+$ だから、 $Y \cap (Z \cap X) \in I^+$ 。

そこで、 $B \in I^+$ に I が $(\lambda, 2)$ -distributive であることを適用すると、

$$\forall \alpha < \lambda \exists S_\alpha \in W_\alpha (C - S_\alpha \in I)$$

であるような、 $C \in \mathcal{P}(B) \cap I^+$ が存在する。

$C \in \mathcal{P}(A) \cap (I|X)^+$ で、 $S_\alpha = T_\alpha \cap X$ である $T_\alpha \in W_\alpha$ を考えると、

$$(C - T_\alpha) \cap X = C \cap X - T_\alpha \cap X \subset C - S_\alpha \in I$$

より、 $C - T_\alpha \in I|X$ が得られる。 $\square$

Definition. (1) $J_{\kappa\lambda} = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : \exists \delta < \lambda \exists f : X \rightarrow \delta \times \delta (f \text{ is regressive and } f|Y \text{ is not constant for any } Y \in \mathcal{P}(X) \cap I_{\kappa\lambda}^+)\}$.

(2) I が **seminormal** とは、 次のことが成り立つことである。

$$\forall X \in I^+ \forall \delta < \lambda \forall f : X \rightarrow \delta [(f \text{ is regressive}) \longrightarrow \exists Y \in \mathcal{P}(X) \cap I^+ (f|Y \text{ is constant})].$$

(3) $h : \delta \times \delta \rightarrow \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して、

$$C_h = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : \forall \alpha, \beta \in x \cap \delta (h(\alpha, \beta) \subset x)\}$$

(3) I が λ -generated とは

$$\exists \{G_\alpha : \alpha < \lambda\} (I = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa \lambda : \exists \alpha < \lambda (X \subset G_\alpha)\}).$$

(4) $I^+ \rightarrow (I^+)^2$ とは次のことである.

$$\forall X \in I^+ \forall F : [X]^2 \rightarrow 2 \exists H \in \mathcal{P}(X) \cap I^+ (F| [H]^2 \text{ is constant}).$$

次の Fact 3 は Johnson [4] の結果である.

- Fact 3.**(Johnson) (1) If λ is regular, then $J_{\kappa\lambda}$ is the minimal seminormal ideal on $\mathcal{P}_\kappa \lambda$.
 (2) If $\lambda^{<\lambda} = \lambda$, then for all $X \in J_{\kappa\lambda}^+$ there exists a $Y \in \mathcal{P}(X) \cap J_{\kappa\lambda}^+$ such that $J_{\kappa\lambda}|X = I_{\kappa\lambda}|X$.
 (3) If I is seminormal λ -generated and $(\lambda, 2)$ -distributive, then $I^+ \rightarrow (I^+)^2$.
 (4) If I is seminormal λ -generated and $P_\kappa \lambda \rightarrow (I^+)^2$, then for any set regressive $f : P_\kappa \lambda \rightarrow P_\kappa \lambda$, there is a set $A \subset \lambda$ such that for each $\delta < \lambda$,

$$\{x \in P_\kappa \lambda : f(x) \cap \delta = x \cap A \cap \delta\} \in I^+.$$

Fact 4. (Abe [1]) (1) If λ is regular, then $J_{\kappa\lambda}$ is generated by $\{P_\kappa \lambda - C_h : h : \delta \times \delta \rightarrow P_\kappa \lambda \text{ for some } \delta < \lambda\}$.

Lemma 5. If $\lambda^{<\lambda} = \lambda$ and $I_{\kappa\lambda}$ is $(\lambda, 2)$ -distributive, then κ is δ -ineffable for all $\delta < \lambda$.

Proof. Fact 3-(1), Fact 4 と $\lambda^{<\lambda} = \lambda$ より, λ は regular で $J_{\kappa\lambda}$ は seminormal で λ -generated であることになる. さらに, Fact 3-(2) を使うと,

$$I = J_{\kappa\lambda}|X = I_{\kappa\lambda}|X$$

となる $X \in I_{\kappa\lambda}^+$ がある. $I_{\kappa\lambda}$ は $(\lambda, 2)$ -distributive であるという仮定と Lemma 4 から, $I = I_{\kappa\lambda}|X$ は $(\lambda, 2)$ -distributive である. また, $J_{\kappa\lambda}$ を $\{G_\alpha : \alpha < \lambda\}$ が生成するとすると, $\{G_\alpha \cup (P_\kappa \lambda - X) : \alpha < \lambda\}$ は $J_{\kappa\lambda}|X = I$ を生成するので, I も λ -generated であり, seminormal なことも明らかである. 以上から, I は seminormal λ -generated $(\lambda, 2)$ -distributive であるので, Fact 3-(3) より, $I^+ \rightarrow (I^+)^2$ が成り立つ. 特に,

$$P_\kappa \lambda \rightarrow (I^+)^2$$

である.

さて, $\delta < \lambda$ で, $f : P_\kappa \delta \rightarrow P_\kappa \delta$ は set regressive だとする.

$$g(x) = f(x \cap \delta)$$

で $g : P_\kappa \lambda \rightarrow P_\kappa \lambda$ を定義すると, g は set regressive だから Fact 3-(4) より,

$$\{x \in P_\kappa \lambda : g(x) \cap \delta = x \cap A \cap \delta\} \in I^+.$$

を満たす $A \subset \lambda$ が存在する.

$B = \{x \cap \delta : x \in A\}$ とすると, 任意の $x \in B$ に対して, $f(x) = x \cap A$ が成り立つ.

また, $p_*(I)$ を

$$X \in p_*(I) \quad \text{iff} \quad X \subset P_\kappa \delta \quad \text{and} \quad \{x \in P_\kappa \lambda : x \cap \delta \in X\} \in I$$

で定めると, $p_*(I)$ は $P_\kappa \delta$ 上の normal ideal で $B \in p_*(I)^+$ である. 特に $B \in NS_{\kappa\lambda}^+$ (Fact 1-(2)) であるので, κ は δ -ineffable なことが示された. $\square$

ここで, large cardinal における基本的な定義を述べる.

Definition. (1) $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(P_\kappa \lambda)$ が **fine ultrafilter** on $P_\kappa \lambda$ とは次の条件を満たすことである.

- (a) $\emptyset \notin \mathcal{U}$.
- (b) $X \in \mathcal{U} \wedge X \subset Y \longrightarrow Y \in \mathcal{U}$.
- (c) $\delta < \kappa \wedge \{X_\alpha : \alpha < \delta\} \subset \mathcal{U} \longrightarrow \bigcap_{\alpha < \delta} X_\alpha \in \mathcal{U}$.
- (d) $\forall \alpha < \lambda (\{x \in P_\kappa \lambda : \alpha \in x\} \in \mathcal{U})$.
- (e) $\forall X \subset P_\kappa \lambda (X \in \mathcal{U} \vee P_\kappa \lambda - X \in \mathcal{U})$.

(2) A fine ultrafilter $\mathcal{U}$ on $P_\kappa \lambda$ is **normal** if any regressive function $f : P_\kappa \lambda \rightarrow \lambda$ is constant on some $X \in \mathcal{U}$.

(3) κ is **λ -compact** if there is a fine ultrafilter on $P_\kappa \lambda$. κ is **strongly compact** if κ is λ -compact for all $\lambda \geq \kappa$.

(4) κ is **λ -supercompact** if there is a normal ultrafilter on $P_\kappa \lambda$. κ is **supercompact** if κ is λ -supercompact for all $\lambda \geq \kappa$.

(5) κ is **measurable** if κ is κ -compact.

Fact 5. (DiPrisco and Zwicker [3], Magidor [8], [9])

- (1) If κ is $2^{\lambda < \kappa}$ -ineffable, then κ is λ -supercompact.
- (2) It is consistent that the first strongly compact cardinal is the first measurable.
- (3) If κ is λ -compact, then κ is mildly λ -ineffable.
- (4) If κ is 2^κ -supercompact, then κ is not the first measurable.

Proof of Theorem 2. $ZFC \vdash \forall \kappa \forall \lambda (\kappa \text{ is mildly } \lambda\text{-ineffable} \longrightarrow I_{\kappa\lambda} \text{ is } (\lambda, 2)\text{-distributive})$ とする. Fact 5-(2) にみられるような κ が strongly compact で the first measurable である ZFC の model を考える. Fact 5-(3) と Lemma 5 より κ は 2^{2^κ} -ineffable であり, さらに Fact 5-(1) より κ は 2^κ -supercompact である. Fact 5-(4) を使うと, κ は the first measurable でないことになり仮定に矛盾する. $\square$

同様な議論で次のことが示される.

Theorem 3. $ZFC \vdash \forall \kappa [\kappa \text{ is strongly compact} \longrightarrow \forall \lambda (I_{\kappa\lambda}^+ \rightarrow (I_{\kappa\lambda}^+)^2)]$.

3. Complement.

$I_{\kappa\lambda}$ が $(\lambda, 2)$ -distributive でない場合について付記する.

Theorem 4. *If $\lambda^{<\kappa} = 2^\lambda$, then $I_{\kappa\lambda}$ is not $(\lambda, 2)$ -distributive.*

この定理のために, Johnson [4], [5] に述べられているいくつかの結果を挙げる.

Definition. I が **strongly normal** とは次のことである.

$$\begin{aligned} \forall X \in I^+ \forall f : X \rightarrow \mathcal{P}_\kappa \lambda \ [\forall x \in X (f(x) \subset x \wedge |f(x)| < |x \cap \kappa|) \\ \longrightarrow \exists Y \in \mathcal{P}(X) \cap I^+ (f|Y \text{ is constant})] \end{aligned}$$

Fact 6. (1) (Baumgartner) *If there is a $\nu < \kappa$ such that $\nu^+ < \kappa$, $\lambda^\nu = 2^\lambda$ and for each $\eta < \kappa$, $\eta^\nu < \kappa$, then $I_{\kappa\lambda}|X$ is normal for some $X \in I_{\kappa\lambda}^+$.*

(2) $I_{\kappa\lambda}|X$ is not strongly normal for any $X \in I_{\kappa\lambda}^+$ if κ is weakly inaccessible.

(3) Suppose that κ is inaccessible. If I is normal and (μ, λ) -distributive for any $\mu < \kappa$, then I is strongly normal.

(4) If $I_{\kappa\lambda}$ is $(\lambda, 2)$ -distributive, then κ is mildly λ -ineffable.

Proof of Theorem 4. $\lambda^{<\kappa} = 2^\lambda$ で $I_{\kappa\lambda}$ は $(\lambda, 2)$ -distributive とする. Fact 6-(4) より κ は inaccessible で, Fact 6-(1) の条件が成り立つ. そこで, $I_{\kappa\lambda}|X$ が normal であるような $X \in I_{\kappa\lambda}^+$ をとる. $I_{\kappa\lambda}|X$ は Fact 6-(3) の条件を満たしているので strongly normal になってしまい, Fact 6-(2) に反する. $\square$

[1] では $I_{\kappa\lambda}$ と $SNS_{\kappa\lambda}$ の中間の ideal の hierarchy が考察されているが, それらについて Theorem 1 の一般化が成立する.

参考文献

- [1] Y. Abe, *A hierarchy of filters smaller than $CF_{\kappa\lambda}$* , Preprint.
- [2] D. M. Carr, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ -partition relations, *Fund. Math.* 128 (1987), 181-195.
- [3] C. A. DiPrisco and W. S. Zwicker, *Flipping properties and supercompact cardinals*, *Fund. Math.* 109 (1980), 31-36.
- [4] C. A. Johnson, *Seminormal λ -generated ideals on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$* , *J. Symb. Logic* 53 (1988), 92-102.
- [5] C. A. Johnson, *Some partition relations for ideals on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$* , *Acta Math. Hung.* 56 (1990), 269-282.
- [6] S. Kamo, *Remarks on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ -combinatorics*, *Fund. Math.* 145 (1994), 141-151.
- [7] T. K. Menas, *On strong compactness and supercompactness*, *Ann. Math. Logic* 7 (1974), 327-359.

- [8] M. Magidor, *Combinatorial characterization of supercompact cardinals*, Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974), 279-285.
- [9] M. Magidor, *How large is the first strongly compact cardinal?*, Ann. Math. Logic 10 (1976), 33-57.