

数式処理による水面波の摂動計算

東京大学 理学部 青木 弘

§ 1 まえがき

二枚の垂直な平行平面壁で囲まれた、無限に深い二次元領域内に発生可能な定在波を考察した。このような定在波の高次の摂動展開による研究は、Penney & Price¹⁾ (1952) によって最初になされた。この研究で彼らは、定在波を時間と空間の二重 Fourier 級数に展開し、さらにそれらの係数を、振幅が小さいとき、振幅に相当するパラメーターで展開し解をもとめた。計算はこのパラメーターの5次のオーダーまでなし、それによって、周期や波形などを5次の項までもとめた。興味深い結果は、流体粒子は重力加速度より大きな加速度で下に落ちることはないという条件から、安定な最大振幅をもって定在波の振幅を決定していることである。また、項を無限にとったとき、この最大振幅波はその頂点で90度の角をなすと予測している。

一方、実験的研究は、Taylor²⁾(1953)によってなされ、最大振幅波の解析解は、この実験とかなりよく一致することが示された。このような大きな振幅をもつ水面波で、実験と解析計算の両方で研究がなされたのは、これまでこの波がただ一つである。ここで、大きな振幅をもつ水面波とは、有限振幅をもつというだけでなく、その粒子が、重力加速度と同程度の加速度で動く波を意味する。KdV方程式に代表される非線形の有限振幅の波の理論は、流体粒子の加速度が重力加速度にくらべて十分小さいとき有効な理論であるから、この意味では、大きな振幅の波の理論とは言えない。

Penney & Priceの計算結果は、実験に誤差範囲内でよくあう。しかしながら、彼らの計算にはかなりありまいた部分があり、さらに、彼らは、計算結果の信頼性を調べるために、他の方法によって、計算の一部を再計算しているが、その結果は、もとの計算結果と13パーセント程度の差があり、十分に信頼性が保障されたとは思えない。さらに高次の計算をして、信頼性のある解にすべきであるう。しかしながら、この高次の計算は、計算量が膨大であるため今日まで計算することができなかった。

この困難を克服するために、数式処理言語 REDUCE-2³⁾⁻⁴⁾を利用した。REDUCE-2は、Hermによって、量子電磁力学の計

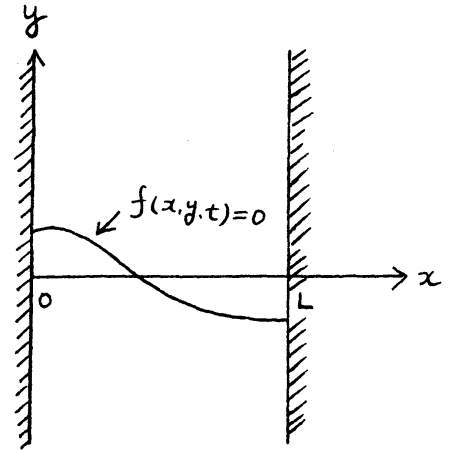
算のために開発された言語である。数式処理は、電子計算機が發明されると同時に研究され、その重要さは、昔から認められていた。しかし、それを実行するためには、大量の記憶装置と高速の電子計算機が必要であった。そのため、実験的な非常に小さな計算しかできなかった。最近、電子計算機の製造技術が急速に発展した結果、大量の記憶装置をもつ高速計算機によって、ようやく実用的な計算が可能となった。また、ソフトウェアの発展も重要な役割を果たしていることも無視できない。

電子計算機を利用した解析計算は、流体力学の分野では、Kuwahara & Imai⁵⁾, Takagi⁶⁾, Van Dyke⁷⁾ および Schwartz⁸⁾ など多くの研究者によってなされているが、それらはいずれも、Fortran 言語で書かれているため、丸め誤差の入る余地があり、厳密な意味では、解析計算ではない。また、それらはいずれも regular な摂動展開であるが、ここで扱う計算は singular な摂動計算である。

定在波であるという条件は、数値解析においては、大変扱いにくい条件である。このため、この問題は、数値計算で解くことはたぶん不可能だと思われる。しかし、解析解が定在波であることは、数値的にも容易に確かめることができると思われる。

§ 2 基本方程式

右の図のように x 軸を平均水面にとり、 y 軸を鉛直上方にとる。 x 軸と垂直な平面壁が $x=0$ と $x=L$ のところにあるとする。このとき、二つの壁に囲まれた領域内に発生可能な定在波を考



察する。流体は完全流体とし、非

圧縮であるとする。実在可能な波は渦なしであるから、ここでも渦なしと仮定する。このとき、速度 (u, v) はポテンシャル ϕ から導かれる。そして、そのポテンシャル ϕ は

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{ここで} \quad u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.1)$$

を満たす。また

$$x=0 \quad \text{と} \quad x=L \quad \text{で} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$y \rightarrow -\infty \quad \text{のとき} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

である。自由表面 $f(x, y, t) = 0$ においては

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\text{kinematic condition}) \quad (2.4)$$

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} = -gy + \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (\text{Bernoulli's equation}) \quad (2.5)$$

ここで、 P は圧力、 P_0 は大気圧、 ρ_0 は流体の密度である。

自由表面上では $P = P_0$ とおけるから (2.5) 式は

$$-gy + \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = 0 \quad (2.6)$$

となる。境界条件 (2.2) と (2.3) を使って (2.1) を解くと ϕ は次のような形で書けることがわかる。

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{nky} \cos nkx \quad (2.7)$$

ここで、 $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ は時間 t の関数であり、 $k = \frac{2\pi}{L}$ である。

(2.7) の式を (2.6) に代入して、

$$\begin{aligned} gy - \sum_{n=0}^{\infty} \dot{\alpha}_n e^{nky} \cos nkx \\ + \frac{1}{2} k^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \alpha_m \alpha_n e^{(m+n)ky} \cos (m-n)kx = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

ここでドットは時間 t に関する微分を意味する。定在波が存在すると仮定し、その自由表面は

$$y = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nkx \quad (2.9)$$

で表わすことが出来るとする。ここで $a_0, a_1, \dots$ は時間 t の関数である。次のように置き換えることによって方程式を無次元化する。

$$x = kx', \quad y = ky', \quad a_n = k a'_n, \quad (2.10)$$

$$t = k^{1/2} g^{1/2} t', \quad (2.11)$$

$$\Phi = k^{3/2} g^{-1/2} \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e^{ny} \cos nx, \quad (2.12)$$

$$\beta_n = k^{3/2} g^{-1/2} \alpha_n, \quad (2.13)$$

以下ではさらにダッシュをはぶく。このとき kinematic の条件は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.14)$$

となる。方程式 (2.8), (2.9) はそれぞれ

$$\begin{aligned} y - \sum_{n=0}^{\infty} \dot{\beta}_n e^{ny} \cos nx \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_m \beta_n e^{(m+n)y} \cos(m-n)x = 0, \quad (2.15) \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (2.16)$$

となる。

§3. 方程式の Fourier 展開

§2 において方程式は (2.14), (2.15) および (2.16) に集約された。これを解くには (2.16) を (2.15) に代入し、それを x について Fourier 展開する。(2.15) の式は恒等的に成立するからその係数はすべて 0 でなければならぬ。同様に (2.15), (2.16) を (2.14) に代入し、Fourier 展開すれば、もう一組の方程式が得られる。これが、解くべき a_n, β_n ($n=0, 1, \dots$) の連立方程式である。

この計算をするためには $e^{\lambda y} \cos \mu x$ の y に (2.16) を代入し Fourier 級数に展開しなければならぬ。(2.16) は

$$y = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \quad (a_n = a_{-n}) \quad (3.1)$$

と書くことが出来る。

$$y^n = \frac{1}{2^n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} S_n(l) e^{ilx} \quad (3.2)$$

とおくと

$$y^n = y^{n-1} \cdot y = \frac{1}{2^n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m S_{n-1}(l-m) e^{ilx} \quad (3.3)$$

となる。したがって

$$S_n(l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m S_{n-1}(l-m) \quad (3.4)$$

さらに

$$e^{\lambda y} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} E(\lambda, l) e^{ilx} \quad (3.5)$$

とおくと

$$E(\lambda, l) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{2^n n!} S_n(l) \quad (3.6)$$

が得られる。ゆえに

$$e^{\lambda y} \cos \mu x = E(\lambda, \mu) + \sum_{l=1}^{\infty} \cos lx \{E(\lambda, l-\mu) + E(\lambda, l+\mu)\} \quad (3.7)$$

したがって、解くべき方程式は $(l=1, 2, \dots)$ に対して

$$\frac{1}{2} \dot{a}_0 = \dot{\beta}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\beta}_n E(n, n) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \beta_m \beta_n E(m+n, m-n) \quad (3.8)$$

$$a_l = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\beta}_n \{E(n, l-n) + E(n, l+n)\} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \beta_m \beta_n \times \{E(m+n, l-m+n) + E(m+n, l+m-n)\} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{a}_0 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn a_m \beta_n \{E(m, m-n) - E(n, m+n)\} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n E(n, n) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_l &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn a_m \beta_n \{E(n, l-m+n) + E(n, l+m-n) \\ &\quad - E(n, l-m-n) - E(n, l+m+n)\} - \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n \{E(n, l-n) + E(n, l+n)\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

a_0 は平均水面を意味するから、これを 0 になるように座標をとれば、(3.9) と (3.11) を連立して解けばすべての値が決定できる。また、 β_0 も一般性を失うことなく 0 とおくことができる。

§ 4. 8 次の近似方程式

振幅が小さいとき、波形は

$$y = A \sin t \cos x \quad (4.1)$$

となると仮定する。ここで A は正数と仮定することができる。さらに Fourier 係数 a_n および β_n は

$$a_n = O(A^n) \quad (4.2)$$

$$\beta_n = O(A^n) \quad (4.3)$$

であると仮定する。この仮定は以下の計算において矛盾することはない。

(4.2) および (4.3) を考慮し、 $a_0 = \beta_0 = 0$ に注意すれば (3.4) の関係式より A^8 までの $\check{S}_n(x)$ の関係式が得られる。その関係式を Appendix A に示した。この結果は Penney & Price の結果と $A^{8.5}$ のオーダーまで完全に一致する。この式を利用して、(3.6) を計算すると $E(\lambda, \mu)$ が得られる。 $E(\lambda, \mu)$ は Appendix B に示した。それらを (3.9), (3.11) に代入すれば 8 次の近似方程式が得られる。これを Appendix C に示した。

ここまでの結果は A^5 までとるかぎり Penney & Price の結果と完全に一致する。

§ 5. 8 次までの解

a_n, β_n の方程式を A^2 までとると

$$\begin{aligned} a_1 &= \dot{\beta}_1 & \dot{a}_1 &= -\beta_1 \\ a_2 &= \frac{1}{2} a_1 \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 & \dot{a}_2 &= -a_1 \beta_1 - 2\beta_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

A が非常に小さいとき (4.1) に近すかなければならぬから

(5.1) の解は

$$\begin{aligned} a_1 &= A \sin t \\ a_2 &= \frac{1}{2} A^2 \sin^2 t \\ \beta_1 &= -A \cos t \\ \beta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

となる。さき 5 にこの方程式を A^3 までとると

$$a_1 = \frac{3}{8} a_1^2 \dot{\beta}_1 - a_1 \beta_1^2 + a_1 \dot{\beta}_2 + \frac{1}{2} a_2 \dot{\beta}_1 - 2\beta_1 \beta_2 + \dot{\beta}_1 \quad (5.3)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \quad (5.4)$$

$$a_3 = \frac{1}{8} a_1^2 \dot{\beta}_1 + a_1 \dot{\beta}_2 + \frac{1}{2} a_2 \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_3 \quad (5.5)$$

$$\dot{a}_1 = -\frac{1}{8} a_1^2 \beta_1 - a_1 a_2 + \frac{1}{2} a_2 \beta_1 - \beta_1 \quad (5.6)$$

$$\dot{a}_2 = -a_1 \beta_1 - 2\beta_2 \quad (5.7)$$

$$\dot{a}_3 = -\frac{3}{8} a_1^2 \beta_1 - 3a_1 \beta_2 - \frac{3}{2} a_2 \beta_1 - 3\beta_3 \quad (5.8)$$

となる。(5.3) を t で微分し、(5.6) の左辺に代入し整理する

と

$$\ddot{\beta}_1 + \beta_1 = (\text{非線形項}) \quad (5.9)$$

となる。(5.9)の右辺を計算するためには、右辺が非線形^項な
 けでできているため、低次の解を使って計算できる。このこ
 とは以下の計算において、常に言えることである。(5.9)に
 (5.2)の二次の解を代入して、(5.9)を解こうとすると永年
 項があらわれ、定在波という条件を満たさなくなる。そこで
 (5.9)の解を次のように仮定する。

$$a_1 = A \sin \omega t + \delta_1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} A^2 \sin^2 \omega t + \delta_2$$

$$\beta_1 = -A \cos \omega t + r_1$$

$$\beta_2 = r_2$$

$$a_3 = \delta_3$$

$$\beta_3 = r_3$$

$$\omega = 1 + \sigma_3 A^2 \quad (5.10)$$

ここで $r_1, r_2, \dots, \delta_1, \delta_2, \dots$ は A^3 のオーダーの関数であり
 σ_3 は定数である。(5.10)を(5.9)に代入し、Fourier展開する
 と

$$\ddot{r}_1 + r_1 = -\frac{1}{4} \{ (8\sigma_3 + 1) \cos \omega t - 5 \cos 3\omega t \} A^3 \quad (5.11)$$

となる。 r_1 は周期関数でなければならぬから $\sigma_3 = -\frac{1}{8}$ である。
 ゆえに $r_1 = -\frac{5}{32} A^3 \cos 3\omega t$

この結果を (5.3) に代入して

$$a_1 = A \sin \alpha t + \frac{3}{32} A^3 \sin \alpha t + \frac{1}{16} A^3 \sin 3\alpha t \quad (5.12)$$

同様な方法で

$$\beta_2 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{4} A^2 - \frac{1}{4} A^2 \cos 2\alpha t$$

$$\beta_3 = 0, \quad a_3 = \frac{9}{32} A^3 \sin \alpha t - \frac{3}{32} A^3 \cos 3\alpha t$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{8} A^2$$

を得る。 A^4 のオーダーにおいても同様に計算できる。ただし

β_4 の 4 次の項 r_4 に対する方程式は

$$\ddot{r}_4 + 4r_4 = 0 \quad (5.13)$$

となり、一般にこの方程式の解は 0 とならず

$$r_4 = -A_1 A^4 \cos 2\alpha t - B_1 A^4 \sin 2\alpha t \quad (A_1, B_1 \text{ は任意定数})$$

となる。したがって、4 次の解は任意定数を含む解となる。

この任意定数はさらに 2 次高い解の計算において決定される。

Penney & Price は (5.13) の解を 0 と置いている。したがって

6 次の計算において永年項があらわれ、計算を続けるこ

とができなくなる。しかし、彼らは 5 次の解までしか計算し

なかったため問題は起らなかった。

6 次の解の計算において、 β_4 の 6 次の項 r_4 は

$$\begin{aligned} \ddot{r}_4 + 4r_4 = \frac{1}{96} A^6 \{ & -960 A_1 \cos 4\alpha t - 96 A_1 \cos 2\alpha t + \sin 6\alpha t \\ & + (-96 B_1 + 1) \sin 2\alpha t + 192 A_1 \} \end{aligned} \quad (5.14)$$

となる。(5.14) の解が周期的であるためには、 $\cos 2\alpha t$

$\sin 2\alpha t$ の係数は 0 でなければならぬ。したがって

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{1}{96} \quad (5.15)$$

一般に $(n+3)$ 次にあらわれる任意定数を A_n, B_n とすると、8 次までの計算で

$$A_2 = 0, \quad B_2 = 0 \quad (5.16)$$

$$A_3 = 0, \quad B_3 = \frac{7031}{236544} \quad (5.17)$$

となる。8 次までの解を Appendix D に示した。Penney & Price のように、任意定数を 0 と置いたとき、解は 4 次までは彼らの結果と完全に一致する。しかし、5 次の解は一致しない。この原因は彼らの計算のあやまりである。彼らは、5 次の解の計算において

$$\dot{a}_5 = -5\beta_5 - \frac{805}{384} \beta_1 \dot{\beta}_1^4 \quad (5.18)$$

を得てゐる。しかし、正しくは

$$\dot{a}_5 = -5\beta_5 - \frac{625}{384} \beta_1 \dot{\beta}_1^4 \quad (5.19)$$

である。(5.19) が正しいことは簡単な手計算で容易に確かめられる。Penney & Price は α^2 を計算してゐるので比較のため α^2 を計算しておく。

$$\alpha^2 = 1 - \frac{1}{4} A^2 - \frac{13}{128} A^4 - \frac{4163}{86016} A^6 \quad (5.20)$$

この結果も 4 次の項まで一致する。 $A=0.584$ の場合のときの波の時間的变化を図 1 に示した。 $A=0.584$ の波は次の章で与えるように最大振幅波を意味する。

§ 6. 安定な最大振幅波

流体粒子は、重力加速度より大きな加速度で下に落ちることはない。すなわち

$$-g - \frac{\partial v}{\partial t} \leq 0 \quad (6.1)$$

(6.1) の不等式をパラメータ A で展開し、 A の範囲をもとめる。その不等式は 6 次まではうまく解けるが、7、8 次の場合、すべての A が (6.1) の不等式を満たすことになり、すなわち、どんな大きな波でも安定となりわれわれの日常経験に反する。したがって、(6.1) の不等式を A で展開した場合、ほんとうに小さな値でなければ、 A の展開は無意味になると考えなければならぬ。そこで、この A の展開級数の有効範囲を拡大するために、Shanks の方法を利用した。その結果は

$$A \leq 0.57265 \quad (3 \text{ 次の式})$$

$$A \leq 0.59256 \quad (4 \quad \text{ " } \quad)$$

$$A \leq 0.57995 \quad (5 \quad \text{ " } \quad)$$

$$A \leq 0.58542 \quad (6 \quad \text{ " } \quad)$$

$$A \leq 0.58336 \quad (7 \quad \text{ " } \quad)$$

$$A \leq 0.58496 \quad (8 \quad \text{ " } \quad)$$

となり、次数をあげると、非常によく収束する。ただし、この方法ではすべての任意定数は 0 とおいている。したがって

$$A \leq 584$$

であると結論できる。任意定数の影響をみるために、高次の計算で決まる任意定数を先取りして計算すると

$$A \leq 0.57265 \quad (3\text{次})$$

$$A \leq 0.58936 \quad (4\text{次})$$

$$A \leq 0.58103 \quad (5\text{次})$$

$$A \leq 0.58470 \quad (6\text{次})$$

となり、結論はほとんど変化はなり。したがって、この変換は、この場合、大変より変換であると思われる。

§7. 8次の解のテスト

Appendix C の方程式を、4次の Runge-Kutta 法で解き、いろいろな A の場合について、周期を計算した。その結果は

A	数値解	解析解
0.1	6.29108	6.29108
0.2	6.31534	6.31536
0.3	6.35760	6.35787
0.4	6.42086	6.42211
0.5	6.48981	6.51397

となり、 $A=0.1$ の場合は、解析解と数値解は完全に一致する。このことは、解析解が正しいことを証明する一例である。

$A=0.6$ の場合にも同様に計算を試みたが、数値が大変大きくなり、計算することが出来なかった。このことは、前章の結論に一致する。また又図に実験と比較するために、波形と実験結果を示した。この図をみると、Penney & Price の結果も 8 次の解も誤差範囲内で、実験と一致するが、実験結果が信頼できる波の谷のところでは、8 次の解の方が実験とよく一致するように思われる。

§ 8 あとがき

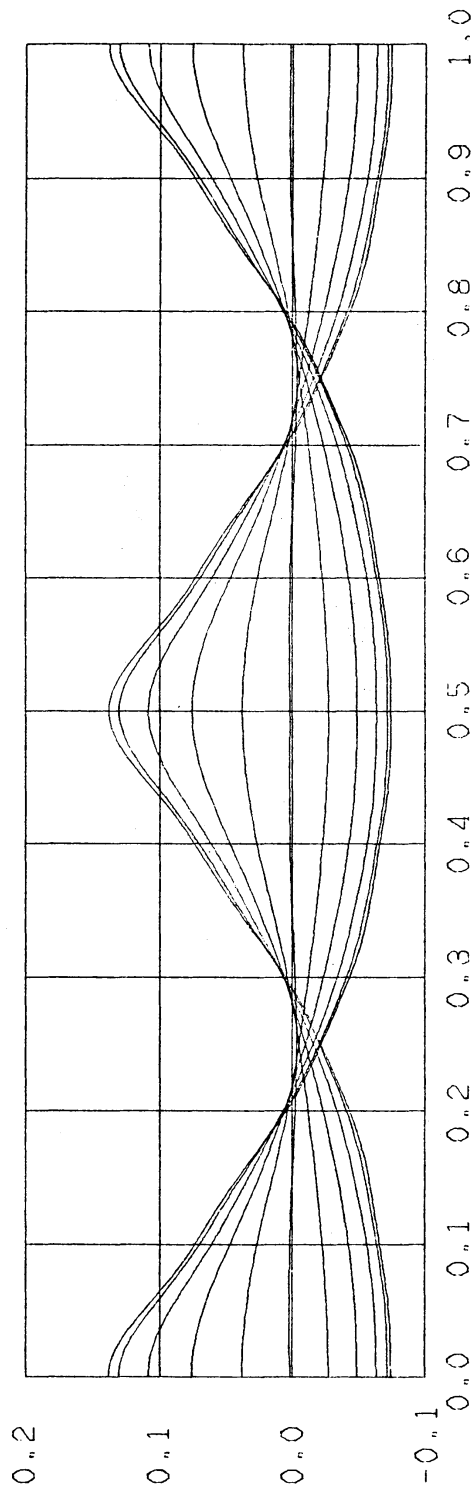
この計算は東京大学大型計算機センターの HITAC 8800/8700 システムによって実行した。S の表式を計算するためには、コンパイラタイプの REDUCE-2 を使って約 120 秒要した。コンパイラタイプを使わない場合、600 秒内では計算できなかった。この計算全部を計算するためには、約 70 分ぐらゐ計算が必要だと思う。ただし、この計算は、途中まで計算しなければ、次のプログラムが組めなり計算であるから、時間はその 2 倍程度必要である。また、この計算は、REDUCE-2 の範囲だけで、プログラムは組むことが出来ない。したがって、少なからず、その計算機固有の言語使ってプログラムを組まなければならぬ。

Reference

- 1) W. G. Penney and A. T. Price : Phil. Trans. Roy. Soc.
A CCXXLIV (1952) 254.
- 2) G. I. Taylor : Proc. Roy. Soc. A CCXVIII (1953) 44.
- 3) A. C. Hern : " REDUCE - 2 USER'S MANUAL " 2nd. ed. 1973.
- 4) Y. Kanada : "IMPLIMENTATION OF HLISP AND ALGEBRAIC
MANIPULATION LANGUAGE REDUCE-2"
TECHNICAL REPORT 75-01.
- 5) K. Kuwahara and I. Imai : Phys. of Fluid, Suppl. II
12 (1969) 94.
- 6) H. Takagi : J. Phys. Soc. Japan 42 (1977) 319.
- 7) M. Van Dyke : J. Fluid Mech. 44 (1970) 365.
- 8) L. W. Schwartz : J. Fluid Mech. 62 (1974) 533.
- 9) D. Shanks : J. Math. and Phys. 34 (1955) 1.

1 図

$A = 0.584$ に対応する波形の時間変化を示した。
 時間間隔は $\frac{1}{20}$ 周期である。水面は水平になら
 ないことがこの図からわかる。



2 図

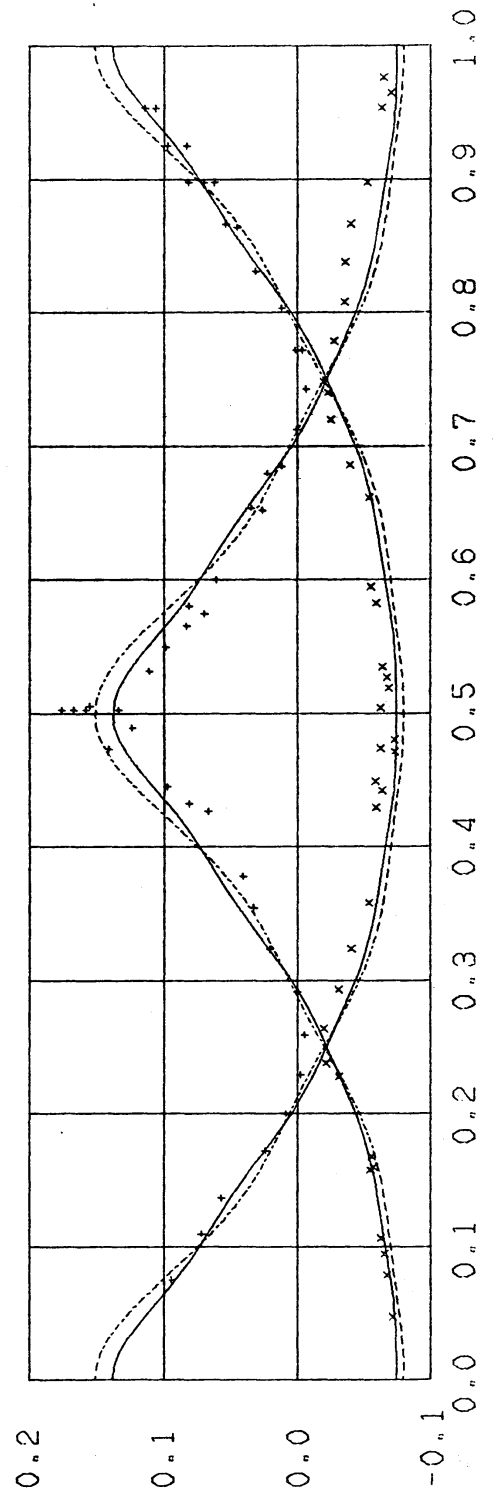
G. I. Taylor の実験結果

実線 — は 8 次の解を示す。

破線 ---- は 5 次の Penney & Price の解である。

x は上にのぼるうとしている点 (実験)

+ は下にくだるうとしている点 (")



以下の数式はすべて計算機からの出力である。式はFortranと同じような方法で書いてある。ただし、べき乗は異っている。たとえば A^{**3} は A^3 と書いてある。なるべくもとの式と同じ記号を使うようにしてあが、一部異っているものがある。それを下に示す。

$$S_n(s) \rightarrow S(n,s)$$

$$a_n \rightarrow a(n), c(n)$$

$$\dot{a}_n \rightarrow \dot{D}(n)$$

$$= \rightarrow :=$$

$$\lambda \rightarrow R$$

$$\alpha \rightarrow \text{sgm}$$

$$E(n,\lambda) \rightarrow E(n)$$

$$\beta_n \rightarrow B(n)$$

$DF(P, Q)$ は P を Q について微分することを意味する。

$$A_1, B_1 \rightarrow A1, B1$$

一般に $A_n, B_n \rightarrow An, Bn$ (n は整数)

APPENDIX A

```

S(1,1) := a(1)
S(1,2) := a(2)
S(1,3) := a(3)
S(1,4) := a(4)
S(1,5) := a(5)
S(1,6) := a(6)
S(1,7) := a(7)
S(1,8) := a(8)

S(2,1) := 2*a(1)*a(2) + 2*a(2)*a(3) + 2*a(3)*a(4)
S(2,2) := a(1)2 + 2*a(1)*a(3) + 2*a(2)*a(4) + 2*a(3)*a(5)
S(2,3) := 2*a(1)*a(2) + 2*a(1)*a(4) + 2*a(2)*a(5)
S(2,4) := 2*a(1)*a(3) + 2*a(1)*a(5) + a(2)2 + 2*a(2)*a(6)
S(2,5) := 2*a(1)*a(4) + 2*a(1)*a(6) + 2*a(2)*a(3)
S(2,6) := 2*a(1)*a(5) + 2*a(1)*a(7) + 2*a(2)*a(4) + a(3)2
S(2,7) := 2*a(1)*a(6) + 2*a(2)*a(5) + 2*a(3)*a(4)
S(2,8) := 2*a(1)*a(7) + 2*a(2)*a(6) + 2*a(3)*a(5) + a(4)2
S(3,1) := 3*a(1)3 + 3*a(1)2*a(3) + 6*a(1)*a(2)2 + 6*a(1)*a(2)*a(4) + 6*a(1)*a(
3)2 + 3*a(2)2*a(3)
S(3,2) := 6*a(1)2*a(2) + 3*a(1)2*a(4) + 6*a(1)*a(2)*a(3) + 6*a(1)*a(2)*a(5) +
6*a(1)*a(3)*a(4) + 3*a(2)3 + 6*a(2)2*a(3)
S(3,3) := a(1)3 + 6*a(1)2*a(3) + 3*a(1)2*a(5) + 3*a(1)*a(2)2 + 6*a(1)*a(2)*a(4)
+ 6*a(2)2*a(3)

```

$$\begin{aligned}
S(3,4) &:= 3*a(1)^2*a(2) + 6*a(1)^2*a(4) + 3*a(1)^2*a(6) + 6*a(1)*a(2)*a(3) + 6*a(1)*a(2)*a(5) + 6*a(2)^2*a(4) + 3*a(2)^2*a(3) \\
S(3,5) &:= 3*a(1)^2*a(3) + 6*a(1)^2*a(5) + 3*a(1)^2*a(2) + 6*a(1)*a(2)*a(4) + 3*a(1)*a(3)^2 \\
S(3,6) &:= 3*a(1)^2*a(4) + 6*a(1)^2*a(6) + 6*a(1)*a(2)*a(3) + 6*a(1)*a(2)*a(5) + 6*a(1)*a(3)*a(4) + a(2)^3 \\
S(3,7) &:= 3*a(1)^2*a(5) + 6*a(1)*a(2)*a(4) + 3*a(1)^2*a(3) + 3*a(2)^2*a(3) \\
S(3,8) &:= 3*a(1)^2*a(6) + 6*a(1)*a(2)*a(5) + 6*a(1)*a(3)*a(4) + 3*a(2)^2*a(4) + 3*a(2)*a(3)^2 \\
S(4,1) &:= 16*a(1)^3*a(2) + 4*a(1)^3*a(4) + 36*a(1)^2*a(2)*a(3) + 12*a(1)*a(2)^3 \\
S(4,2) &:= 4*a(1)^4 + 12*a(1)^3*a(3) + 4*a(1)^3*a(5) + 18*a(1)^2*a(2)^2 + 24*a(1)^2*a(2)*a(4) + 12*a(1)^2*a(3)^2 + 36*a(1)*a(2)^2*a(3) \\
S(4,3) &:= 12*a(1)^3*a(2) + 12*a(1)^3*a(4) + 24*a(1)^2*a(2)*a(3) + 12*a(1)*a(2)^3 \\
S(4,4) &:= a(1)^4 + 12*a(1)^3*a(3) + 12*a(1)^3*a(5) + 12*a(1)^2*a(2)^2 + 24*a(1)^2*a(2)*a(4) + 6*a(1)^2*a(3)^2 + 24*a(1)*a(2)^2*a(3) + 4*a(2)^4 \\
S(4,5) &:= 4*a(1)^3*a(2) + 12*a(1)^3*a(4) + 24*a(1)^2*a(2)*a(3) + 4*a(1)*a(2)^3 \\
S(4,6) &:= 4*a(1)^3*a(3) + 12*a(1)^3*a(5) + 6*a(1)^2*a(2)^2 + 24*a(1)^2*a(2)*a(4) + 12*a(1)^2*a(3)^2 + 12*a(1)*a(2)^2*a(3) \\
S(4,7) &:= 4*a(1)^3*a(4) + 12*a(1)^2*a(2)*a(3) + 4*a(1)*a(2)^3 \\
S(4,8) &:= 4*a(1)^3*a(5) + 12*a(1)^2*a(2)*a(4) + 6*a(1)^2*a(3)^2 + 12*a(1)*a(2)^2*a(3) + a(2)^4 \\
S(5,1) &:= 10*a(1)^5 + 25*a(1)^4*a(3) + 70*a(1)^3*a(2)^2 \\
S(5,2) &:= 35*a(1)^4*a(2) + 20*a(1)^4*a(4) + 100*a(1)^3*a(2)*a(3) + 60*a(1)^2*a(2)^3 \\
S(5,3) &:= 5*a(1)^5 + 30*a(1)^4*a(3) + 50*a(1)^3*a(2)^2 \\
S(5,4) &:= 20*a(1)^4*a(2) + 30*a(1)^4*a(4) + 80*a(1)^3*a(2)*a(3) + 40*a(1)^2*a(2)^3
\end{aligned}$$

```

S(5,5) := a(1)5 + 20*a(1)4*a(3) + 30*a(1)3*a(2)2
S(5,6) := 5*a(1)4*a(2) + 20*a(1)4*a(4) + 60*a(1)3*a(2)*a(3) + 20*a(1)2*a(2)3
S(5,7) := 5*a(1)4*a(3) + 10*a(1)3*a(2)2
S(5,8) := 5*a(1)4*a(4) + 20*a(1)3*a(2)*a(3) + 10*a(1)2*a(2)3
S(6,1) := 90*a(1)5*a(2)
S(6,2) := 15*a(1)6 + 66*a(1)5*a(3) + 180*a(1)4*a(2)2
S(6,3) := 66*a(1)5*a(2)
S(6,4) := 6*a(1)6 + 60*a(1)5*a(3) + 120*a(1)4*a(2)2
S(6,5) := 30*a(1)5*a(2)
S(6,6) := a(1)6 + 30*a(1)5*a(3) + 60*a(1)4*a(2)2
S(6,7) := 6*a(1)5*a(2)
S(6,8) := 6*a(1)5*a(3) + 15*a(1)4*a(2)2
S(7,1) := 35*a(1)7
S(7,2) := 182*a(1)6*a(2)
S(7,3) := 21*a(1)7
S(7,4) := 112*a(1)6*a(2)
S(7,5) := 7*a(1)7
S(7,6) := 42*a(1)6*a(2)
S(7,7) := a(1)7
S(7,8) := 7*a(1)6*a(2)
S(8,1) := 0
S(8,2) := 56*a(1)8
S(8,3) := 0
S(8,4) := 28*a(1)8
S(8,5) := 0
S(8,6) := 8*a(1)8
S(8,7) := 0
S(8,8) := a(1)8

```

APPENDIX B

$$\begin{aligned}
 E(1) := & 1/18432 \cdot R^7 \cdot a(1)^7 + 1/512 \cdot R^6 \cdot a(1)^5 \cdot a(2)^2 + 1/384 \cdot R^5 \cdot a(1)^5 \cdot a(2)^3 + 5/768 \cdot R^5 \cdot a(1)^4 \cdot a(2)^4 \\
 & + 7/384 \cdot R^5 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^5 + 1/24 \cdot R^4 \cdot a(1)^4 \cdot a(2)^3 + 1/96 \cdot R^4 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^4 + 3/32 \cdot R^4 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^5 \\
 & + 1/32 \cdot R^4 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^4 + 1/16 \cdot R^3 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^3 + 1/16 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^4 + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^3 \\
 & + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^2 + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^4 + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^2 \\
 & + 1/16 \cdot R^2 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^3 + 1/4 \cdot R^2 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^2 + 1/4 \cdot R^2 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^2 \\
 & + 1/4 \cdot R^2 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^4 + 1/2 \cdot R \cdot a(1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(2) := & 1/18432 \cdot R^8 \cdot a(1)^8 + 13/4608 \cdot R^7 \cdot a(1)^6 \cdot a(2)^2 + 1/3072 \cdot R^6 \cdot a(1)^6 \cdot a(2)^4 + 11/768 \cdot R^6 \cdot a(1)^5 \cdot a(2)^5 \\
 & + 1/256 \cdot R^6 \cdot a(1)^4 \cdot a(2)^6 + 7/768 \cdot R^5 \cdot a(1)^4 \cdot a(2)^5 + 1/192 \cdot R^5 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^6 + 5/192 \cdot R^5 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^4 \cdot a(3) \\
 & + 1/64 \cdot R^5 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^5 + 1/96 \cdot R^4 \cdot a(1)^4 \cdot a(2)^3 + 1/32 \cdot R^4 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^4 + 1/96 \cdot R^4 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^5 \\
 & + 1/16 \cdot R^4 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^4 + 1/32 \cdot R^4 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^3 + 3/32 \cdot R^4 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^2 + 1/16 \cdot R^3 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^2 \\
 & + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^4 + 1/16 \cdot R^3 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^3 + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^2 + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^5 \\
 & + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^4 + 1/16 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^3 + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^2 + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^4 \\
 & + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^3 + 1/4 \cdot R^2 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^3 + 1/4 \cdot R^2 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^2 + 1/4 \cdot R^2 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^2 \\
 & + 1/4 \cdot R^2 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^4 + 1/2 \cdot R \cdot a(1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(3) := & 1/3072 \cdot R^7 \cdot a(1)^7 + 11/768 \cdot R^6 \cdot a(1)^5 \cdot a(2)^2 + 1/768 \cdot R^5 \cdot a(1)^5 \cdot a(2)^3 + 1/128 \cdot R^5 \cdot a(1)^4 \cdot a(2)^4 \\
 & + 5/384 \cdot R^5 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^5 + 1/32 \cdot R^4 \cdot a(1)^4 \cdot a(2)^3 + 1/32 \cdot R^4 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^4 + 1/16 \cdot R^4 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^5 \\
 & + 1/32 \cdot R^4 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^4 + 1/48 \cdot R^3 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^3 + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^4 + 1/16 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^3 \\
 & + 1/16 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^2 + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^4 + 1/8 \cdot R^3 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^3 + 1/4 \cdot R^2 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^2 \\
 & + 1/4 \cdot R^2 \cdot a(1)^2 \cdot a(2)^4 + 1/4 \cdot R^2 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^2 + 1/4 \cdot R^2 \cdot a(1)^3 \cdot a(2)^4 + 1/2 \cdot R \cdot a(1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(6) := & \frac{1}{1290240} R^8 a(1)^8 + \frac{1}{15360} R^7 a(1)^6 a(2) + \frac{1}{46080} R^6 a(1)^6 a(3) + \frac{1}{1536} \\
 & R^6 a(1)^5 a(3) + \frac{1}{768} R^6 a(1)^4 a(2)^2 + \frac{1}{768} R^5 a(1)^4 a(2) + \frac{1}{192} R^5 \\
 & a(1)^4 a(4) + \frac{1}{64} R^5 a(1)^3 a(2) a(3) + \frac{1}{192} R^5 a(1)^2 a(2)^3 + \frac{1}{96} R^4 \\
 & a(1)^3 a(3) + \frac{1}{32} R^4 a(1)^2 a(5) + \frac{1}{64} R^4 a(1)^2 a(2)^2 + \frac{1}{16} R^4 a(1)^2 \\
 & a(2) a(4) + \frac{1}{32} R^3 a(1)^2 a(3)^2 + \frac{1}{32} R^3 a(1) a(2)^2 a(3) + \frac{1}{16} R^3 a(1) \\
 & a(2) a(4) + \frac{1}{8} R^3 a(1) a(6) + \frac{1}{8} R^3 a(1) a(2) a(3) + \frac{1}{8} R^3 a(1) a(2) a(5) \\
 & + \frac{1}{8} R^3 a(1) a(3) a(4) + \frac{1}{48} R^2 a(2)^2 + \frac{1}{4} R^2 a(1) a(5) + \frac{1}{4} R^2 \\
 & a(1) a(7) + \frac{1}{4} R^2 a(2) a(4) + \frac{1}{8} R^2 a(3)^2 + \frac{1}{2} R a(6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(7) := & \frac{1}{645120} R^7 a(1)^7 + \frac{1}{7680} R^6 a(1)^5 a(2) + \frac{1}{768} R^5 a(1)^5 a(3) + \frac{1}{384} \\
 & R^5 a(1)^3 a(2)^2 + \frac{1}{96} R^4 a(1)^3 a(4) + \frac{1}{32} R^4 a(1)^2 a(2) a(3) + \frac{1}{96} R^4 \\
 & a(1) a(2)^3 + \frac{1}{16} R^3 a(1)^2 a(5) + \frac{1}{8} R^3 a(1) a(2) a(4) + \frac{1}{16} R^3 a(1) a(3) \\
 & + \frac{1}{16} R^2 a(2)^2 a(3) + \frac{1}{4} R^2 a(1) a(6) + \frac{1}{4} R^2 a(2) a(5) \\
 & + \frac{1}{4} R^2 a(3) a(4) + \frac{1}{2} R a(7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(8) := & \frac{1}{10321920} R^8 a(1)^8 + \frac{1}{92160} R^7 a(1)^6 a(2) + \frac{1}{7680} R^6 a(1)^6 a(3) + \frac{1}{3072} \\
 & R^6 a(1)^4 a(2)^2 + \frac{1}{768} R^5 a(1)^4 a(4) + \frac{1}{192} R^5 a(1)^3 a(2) a(3) \\
 & + \frac{1}{384} R^5 a(1)^2 a(2)^3 + \frac{1}{96} R^4 a(1)^2 a(5) + \frac{1}{32} R^4 a(1) a(2) a(4) \\
 & + \frac{1}{64} R^4 a(1) a(3)^2 + \frac{1}{32} R^3 a(1) a(2)^2 a(3) + \frac{1}{384} R^3 a(2)^4 + \frac{1}{16} \\
 & R^3 a(1) a(6) + \frac{1}{8} R^3 a(1) a(2) a(5) + \frac{1}{8} R^3 a(1) a(3) a(4) + \frac{1}{16} \\
 & R^2 a(2)^2 a(4) + \frac{1}{16} R^2 a(2) a(3)^2 + \frac{1}{4} R^2 a(1) a(7) + \frac{1}{4} R^2 a(2) \\
 & a(6) + \frac{1}{4} R^2 a(3) a(5) + \frac{1}{8} R^2 a(4)^2 + \frac{1}{2} R a(8)
 \end{aligned}$$

APPENDIX C

$$\begin{aligned}
C(1) := & 7/9216 * a(1)^6 * DF(B(1), T) - 1/12 * a(1)^5 * B(1)^2 + 1/8 * a(1)^5 * DF(B(2), T) + 5/ \\
& 256 * a(1)^4 * a(2) * DF(B(1), T) - 135/32 * a(1)^4 * B(1) * B(2) + 5/192 * a(1)^4 * DF(B(1), T) \\
& + 135/128 * a(1)^4 * DF(B(3), T) - 2/3 * a(1)^3 * a(2) * B(1)^2 + 7/6 * a(1)^3 * a(2) \\
& * DF(B(2), T) + 5/96 * a(1)^3 * a(3) * DF(B(1), T) - 1/2 * a(1)^3 * B(1)^2 - 10 * a(1)^3 * B \\
& (1) * B(3) - 16 * a(1)^3 * B(2)^2 + 2/3 * a(1)^3 * DF(B(2), T) + 4/3 * a(1)^3 * DF(B(4), T) \\
& + 7/64 * a(1)^2 * a(2)^2 * DF(B(1), T) - 27/2 * a(1)^2 * a(2) * B(1) * B(2) + 1/4 * a(1)^2 * a \\
& (2) * DF(B(1), T) + 81/16 * a(1)^2 * a(2) * DF(B(3), T) - 1/2 * a(1)^2 * a(3) * B(1)^2 + \\
& 3/2 * a(1)^2 * a(3) * DF(B(2), T) + 1/16 * a(1)^2 * a(4) * DF(B(1), T) - 27/4 * a(1)^2 * B(1) \\
&) * B(2) - 25/4 * a(1)^2 * B(1) * B(4) - 225/4 * a(1)^2 * B(2) * B(3) + 3/8 * a(1)^2 * DF(B(1), T) \\
& + 9/8 * a(1)^2 * DF(B(3), T) - a(1) * a(2)^2 * B(1)^2 + 3/2 * a(1) * a(2)^2 * DF(B(2), T) \\
& + 3/8 * a(1) * a(2) * a(3) * DF(B(1), T) - a(1) * a(2) * B(1)^2 - 18 * a(1) * a(2) * B \\
& (1) * B(3) - 16 * a(1) * a(2) * B(2)^2 + 2 * a(1) * a(2) * DF(B(2), T) + 4 * a(1) * a(2) * DF \\
& (B(4), T) - 9/2 * a(1) * a(3) * B(1) * B(2) + 1/4 * a(1) * a(3) * DF(B(1), T) + 9/2 * a(1) \\
&) * a(3) * DF(B(3), T) + a(1) * a(4) * DF(B(2), T) - a(1) * B(1)^2 - 3 * a(1) * B(1) * B(3) \\
&) - 8 * a(1) * B(2)^2 - 12 * a(1) * B(2) * B(4) - 27 * a(1) * B(3)^2 + a(1) * DF(B(2), T) \\
& + 1/16 * a(2)^3 * DF(B(1), T) - 9/2 * a(2)^2 * B(1) * B(2) + 1/4 * a(2)^2 * DF(B(1), T) \\
& + 9/8 * a(2)^2 * DF(B(3), T) - a(2) * a(3) * B(1)^2 + a(2) * a(3) * DF(B(2), T) + 1/4 * a \\
& (2) * a(4) * DF(B(1), T) - 3 * a(2) * B(1) * B(2) - 5 * a(2) * B(1) * B(4) - 15 * a(2) * B(2) \\
&) * B(3) + 1/2 * a(2) * DF(B(1), T) + 3/2 * a(2) * DF(B(3), T) + 1/4 * a(3)^2 * DF(B(1), T) \\
& , T) - 6 * a(3) * B(1) * B(3) + a(3) * DF(B(2), T) + 2 * a(3) * DF(B(4), T) + 3/2 * a(4) \\
& * DF(B(3), T) - 2 * B(1) * B(2) - 6 * B(2) * B(3) - 12 * B(3) * B(4) + DF(B(1), T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(2) := & 1/11520 a(1)^7 DF(B(1), T) - 1/48 a(1)^6 B(1)^2 + 13/360 a(1)^6 DF(B(2), T) \\
& + 13/3840 a(1)^5 a(2) DF(B(1), T) - 243/128 a(1)^5 B(1) B(2) + 1/256 a(1)^5 \\
& * DF(B(1), T) + 891/1280 a(1)^5 DF(B(3), T) - 7/24 a(1)^4 a(2) B(1)^2 + 1/2 * \\
& a(1)^4 a(2) DF(B(2), T) + 11/768 a(1)^4 a(3) DF(B(1), T) - 1/6 a(1)^4 B(1)^2 \\
& - 14 a(1)^4 B(1) B(3) - 32/3 a(1)^3 B(2)^2 + 7/24 a(1)^3 DF(B(2), T) + 8/3 * \\
& a(1)^3 DF(B(4), T) + 1/32 a(1)^3 a(2) DF(B(1), T) - 189/16 a(1)^3 a(2) B(1) \\
& * B(2) + 7/96 a(1)^3 a(2) DF(B(1), T) + 135/32 a(1)^3 a(2) DF(B(3), T) - 1/2 \\
& a(1)^3 a(3) B(1)^2 + 5/6 a(1)^3 a(3) DF(B(2), T) + 1/24 a(1)^3 a(4) DF(B(1), \\
& T) - 9/2 a(1)^3 B(1) B(2) - 125/8 a(1)^3 B(1) B(4) - 125/2 a(1)^3 B(2) B(\\
& 3) + 1/12 a(1)^2 DF(B(1), T) + 27/16 a(1)^2 DF(B(3), T) + 125/48 a(1)^2 DF(B \\
& (5), T) - 3/4 a(1)^2 a(2) B(1)^2 + 3/2 a(1)^2 a(2) DF(B(2), T) + 5/32 a(1)^2 \\
& a(2) a(3) DF(B(1), T) - a(1)^2 a(2) B(1)^2 - 36 a(1)^2 a(2) B(1) B(3) - \\
& 32 a(1)^2 a(2) B(2)^2 + 3/2 a(1)^2 a(2) DF(B(2), T) + 8 a(1)^2 a(2) DF(B(4), \\
& T) - 81/8 a(1)^2 a(3) B(1) B(2) + 3/16 a(1)^2 a(3) DF(B(1), T) + 27/8 a(1)^2 \\
& a(3) DF(B(3), T) - 1/2 a(1)^2 a(4) B(1)^2 + a(1)^2 a(4) DF(B(2), T) + 1/16 \\
& a(1)^2 a(5) DF(B(1), T) - 1/2 a(1)^2 B(1)^2 - 12 a(1)^2 B(1) B(3) - 45/4 a(\\
& 1) B(1) B(5) - 8 a(1)^2 B(2)^2 - 72 a(1)^2 B(2) B(4) - 81/2 a(1)^2 B(3)^2 \\
& + a(1)^2 DF(B(2), T) + 2 a(1)^2 DF(B(4), T) + 1/16 a(1) a(2)^3 DF(B(1), T) \\
& - 81/8 a(1) a(2)^2 B(1) B(2) + 3/16 a(1) a(2)^2 DF(B(1), T) + 81/16 a(1) * \\
& a(2)^2 DF(B(3), T) - a(1) a(2) a(3) B(1)^2 + 3 a(1) a(2) a(3) DF(B(2), T) \\
& + 1/4 a(1) a(2) a(4) DF(B(1), T) - 9 a(1) a(2) B(1) B(2) - 25/2 a(1) a(\\
& 2) B(1) B(4) - 75 a(1) a(2) B(2) B(3) + 1/2 a(1) a(2) DF(B(1), T) + 9/4 * \\
& a(1) a(2) DF(B(3), T) + 25/4 a(1) a(2) DF(B(5), T) + 1/8 a(1) a(3)^2 DF(B(\\
& 1), T) - a(1) a(3) B(1)^2 - 12 a(1) a(3) B(1) B(3) - 16 a(1) a(3) B(2)^2 \\
& + a(1) a(3) DF(B(2), T) + 4 a(1) a(3) DF(B(4), T) - 9/2 a(1) a(4) B(1) B \\
& (2) + 1/4 a(1) a(4) DF(B(1), T) + 9/4 a(1) a(4) DF(B(3), T) + a(1) a(5) * \\
& DF(B(2), T) - 3 a(1) B(1) B(2) - 5 a(1) B(1) B(4) - 15 a(1) B(2) B(3) - \\
& 35/2 a(1) B(2) B(5) - 42 a(1) B(3) B(4) + 1/2 a(1) DF(B(1), T) + 3/2 a(1 \\
&) DF(B(3), T) - 1/2 a(2)^2 B(1)^2 + 3/16 a(2)^2 a(3) DF(B(1), T) - 18 a(2) * \\
& B(1) B(3) + 3/2 a(2)^2 DF(B(2), T) - 9/2 a(2) a(3) B(1) B(2) + 1/4 a(2) a \\
& (3) DF(B(1), T) + 9/2 a(2) a(3) DF(B(3), T) - a(2) a(4) B(1)^2 + 1/4 a(2) * \\
& a(5) DF(B(1), T) - a(2) B(1)^2 - 15/2 a(2) B(1) B(5) - 8 a(2) B(2)^2 - 27 * \\
& a(2) B(3)^2 + 2 a(2) DF(B(4), T) + a(3)^2 DF(B(2), T) + 1/4 a(3) a(4) DF(B(\\
& 1), T) - 3 a(3) B(1) B(2) - 15 a(3) B(2) B(3) + 1/2 a(3) DF(B(1), T) + 5/ \\
& 2 a(3) DF(B(5), T) - 6 a(4) B(1) B(3) + a(4) DF(B(2), T) + 3/2 a(5) DF(B(\\
& 3), T) - 3 B(1) B(3) - 8 B(2) B(4) - 15 B(3) B(5) + DF(B(2), T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(3) := & 7/15360*a(1)^6*DF(B(1),T) - 1/24*a(1)^5*B(1)^2 + 11/128*a(1)^5*DF(B(2),T) \\
& + 11/768*a(1)^4*a(2)*DF(B(1),T) - 135/64*a(1)^4*B(1)*B(2) + 5/384*a(1)^4* \\
& DF(B(1),T) + 81/64*a(1)^4*DF(B(3),T) - 1/2*a(1)^3*a(2)*B(1)^2 + 5/6*a(1)^3* \\
& a(2)*DF(B(2),T) + 1/16*a(1)^3*a(3)*DF(B(1),T) - 1/6*a(1)^3*B(1)^2 - 12*a(1)^3 \\
&)*B(1)*B(3) - 16/3*a(1)^2*a(2)^2 + 1/2*a(1)^2*DF(B(2),T) + 4*a(1)^2*DF(B(4) \\
&),T) + 5/64*a(1)^2*a(2)^2*DF(B(1),T) - 81/8*a(1)^2*a(2)*B(1)*B(2) + 3/16*a \\
& (1)^2*a(2)*DF(B(1),T) + 27/8*a(1)^2*a(2)*DF(B(3),T) - a(1)^2*a(3)*B(1)^2 + \\
& a(1)^2*a(3)*DF(B(2),T) + 3/16*a(1)^2*a(4)*DF(B(1),T) - 9/4*a(1)^2*B(1)*B(2) \\
&) - 25*a(1)^2*B(1)*B(4) - 75/4*a(1)^2*B(2)*B(3) + 1/8*a(1)^2*DF(B(1),T) + \\
& 9/4*a(1)^2*DF(B(3),T) + 25/8*a(1)^2*DF(B(5),T) - 1/2*a(1)^2*a(2)^2*B(1)^2 + 3 \\
& /2*a(1)^2*a(2)^2*DF(B(2),T) + 1/4*a(1)^2*a(2)*a(3)*DF(B(1),T) - a(1)^2*a(2)*B(\\
& 1)^2 - 12*a(1)^2*a(2)*B(1)*B(3) - 16*a(1)^2*a(2)*B(2)^2 + a(1)^2*a(2)*DF(B(2),T) \\
&) + 4*a(1)^2*a(2)*DF(B(4),T) - 9*a(1)^2*a(3)*B(1)*B(2) + 1/2*a(1)^2*a(3)*DF(B \\
& (1),T) - a(1)^2*a(4)*B(1)^2 + a(1)^2*a(4)*DF(B(2),T) + 1/4*a(1)^2*a(5)*DF(B(1) \\
&),T) - 6*a(1)^2*B(1)*B(3) - 15/2*a(1)^2*B(1)*B(5) - 24*a(1)^2*B(2)*B(4) + a(1)^2 \\
& *DF(B(2),T) + 2*a(1)^2*DF(B(4),T) + 1/16*a(2)^3*DF(B(1),T) - 9/4*a(2)^2*B(1) \\
&)*B(2) + 1/8*a(2)^2*DF(B(1),T) + 9/4*a(2)^2*DF(B(3),T) + 2*a(2)*a(3)*DF(B \\
& (2),T) + 1/4*a(2)*a(4)*DF(B(1),T) - 3*a(2)*B(1)*B(2) - 15*a(2)*B(2)*B(3) \\
&) + 1/2*a(2)*DF(B(1),T) + 5/2*a(2)*DF(B(5),T) - a(3)*B(1)^2 - 8*a(3)*B(2) \\
&)^2 - 3*a(4)*B(1)*B(2) + 1/2*a(4)*DF(B(1),T) + a(5)*DF(B(2),T) - 4*B(1)* \\
& B(4) - 16*B(2)*B(5) + DF(B(3),T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(4) := & 1/23040*a(1)^7*DF(B(1),T) - 1/120*a(1)^6*B(1)^2 + 1/45*a(1)^6*DF(B(2),T) + \\
& 1/480*a(1)^5*a(2)*DF(B(1),T) - 243/320*a(1)^5*B(1)*B(2) + 1/640*a(1)^5*DF(B(1),T) + \\
& 81/128*a(1)^5*DF(B(3),T) - 1/6*a(1)^4*a(2)*B(1)^2 + 1/3*a(1)^4*a(2)*DF(B(2),T) + \\
& 5/384*a(1)^4*a(3)*DF(B(1),T) - 1/24*a(1)^4*B(1)^2 - 8*a(1)^4*B(1)*B(3) - \\
& 8/3*a(1)^3*B(2)^2 + 1/6*a(1)^3*DF(B(2),T) + 4*a(1)^3*DF(B(4),T) + 1/48*a(1)^3*a(2)*DF(B(1),T) - \\
& 27/4*a(1)^3*a(2)*B(1)*B(2) + 1/24*a(1)^3*a(2)*DF(B(1),T) + 27/8*a(1)^3*a(2)*DF(B(3),T) - \\
& 1/2*a(1)^3*a(3)*B(1)^2 + 2/3*a(1)^3*a(3)*DF(B(2),T) + 1/16*a(1)^3*a(4)*DF(B(1),T) - 9/8*a(1)^3*B(1)*B(2) - \\
& 125/4*a(1)^3*B(1)*B(4) - 125/8*a(1)^3*B(2)*B(3) + 1/48*a(1)^3*DF(B(1),T) + 27/16*a(1)^3*DF(B(3),T) + \\
& 125/16*a(1)^3*DF(B(5),T) - 1/2*a(1)^2*a(2)^2*B(1)^2 + a(1)^2*a(2)^2*DF(B(2),T) + 1/8*a(1)^2*a(2)*a(3)*DF(B(1),T) - \\
& 1/2*a(1)^2*a(2)*B(1)^2 - 24*a(1)^2*a(2)*B(1)*B(3) - 16*a(1)^2*a(2)*B(2)^2 + a(1)^2*a(2)*DF(B(2),T) + \\
& 8*a(1)^2*a(2)*DF(B(4),T) - 81/8*a(1)^2*a(3)*B(1)*B(2) + 3/16*a(1)^2*a(3)*DF(B(1),T) + 27/16*a(1)^2*a(3)*DF(B(3),T) - \\
& a(1)^2*a(4)*B(1)^2 + a(1)^2*a(4)*DF(B(2),T) + 3/16*a(1)^2*a(5)*DF(B(1),T) - 6*a(1)^2*B(1)*B(3) - \\
& 45*a(1)^2*B(1)*B(5) - 36*a(1)^2*B(2)*B(4) + 1/2*a(1)^2*DF(B(2),T) + 4*a(1)^2*DF(B(4),T) + 9/2*a(1)^2*DF(B(6),T) + 1/24*a(1)^2*a(2)^3*DF(B(1),T) - \\
& 27/4*a(1)^2*a(2)*B(1)*B(2) + 1/8*a(1)^2*a(2)*DF(B(1),T) + 27/8*a(1)^2*a(2)*DF(B(3),T) - \\
& a(1)^2*a(2)*a(3)*B(1)^2 + 2*a(1)^2*a(2)*a(3)*DF(B(2),T) + 1/4*a(1)^2*a(2)*a(4)*DF(B(1),T) - 9/2*a(1)^2*a(2)*B(1)*B(2) - \\
& 25*a(1)^2*a(2)*B(1)*B(4) - 75/2*a(1)^2*a(2)*B(2)*B(3) + 1/4*a(1)^2*a(2)*DF(B(1),T) + 9/4*a(1)^2*a(2)*DF(B(3),T) + \\
& 25/4*a(1)^2*a(2)*DF(B(5),T) + 1/16*a(1)^2*a(3)*DF(B(1),T) - a(1)^2*a(3)*B(1)^2 - 12*a(1)^2*a(3)*B(1)*B(3) - 16*a(1)^2*a(3)*B(2)^2 + \\
& a(1)^2*a(3)*DF(B(2),T) - 9*a(1)^2*a(4)*B(1)*B(2) + 1/2*a(1)^2*a(4)*DF(B(1),T) - a(1)^2*a(5)*B(1)^2 + \\
& a(1)^2*a(5)*DF(B(2),T) + 1/4*a(1)^2*a(6)*DF(B(1),T) - 10*a(1)^2*B(1)*B(4) - 21/2*a(1)^2*B(1)*B(6) - 35*a(1)^2*B(2)*B(5) + \\
& 3/2*a(1)^2*DF(B(3),T) + 5/2*a(1)^2*DF(B(5),T) + 2/3*a(1)^2*DF(B(2),T) + 1/8*a(1)^2*a(3)*DF(B(1),T) - \\
& 1/2*a(1)^2*a(2)*B(1)^2 - 8*a(1)^2*B(2)^2 + 4*a(1)^2*DF(B(4),T) - 9/2*a(1)^2*a(3)*B(1)*B(2) + 1/4*a(1)^2*a(3)*DF(B(1),T) + 9/4*a(1)^2*a(3)*DF(B(3),T) + \\
& 2*a(1)^2*a(4)*DF(B(2),T) + 1/4*a(1)^2*a(5)*DF(B(1),T) - 6*a(1)^2*B(1)*B(3) - 24*a(1)^2*B(2)*B(4) + a(1)^2*DF(B(2),T) + 3*a(1)^2*DF(B(6),T) + \\
& 1/2*a(1)^2*a(3)*DF(B(2),T) - 3*a(1)^2*B(1)*B(2) - 15*a(1)^2*B(2)*B(3) + 1/2*a(1)^2*a(3)*DF(B(1),T) - \\
& a(1)^2*a(4)*B(1)^2 - 8*a(1)^2*B(2)^2 - 3*a(1)^2*a(5)*B(1)*B(2) + 1/2*a(1)^2*a(5)*DF(B(1),T) + \\
& a(1)^2*a(6)*DF(B(2),T) - 5*B(1)*B(5) - 12*B(2)*B(6) + DF(B(4),T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(5) := & 7/46080 a(1)^6 * DF(B(1), T) - 1/120 a(1)^5 B(1)^2 + 1/24 a(1)^5 * DF(B(2), T) + \\
& 5/768 a(1)^4 a(2) * DF(B(1), T) - 27/64 a(1)^4 B(1) B(2) + 1/384 a(1)^4 * DF(B(1), T) + 27/32 a(1)^4 * DF(B(3), T) - 1/6 a(1)^3 a(2) B(1)^2 + 1/2 a(1)^3 a(2) * \\
& DF(B(2), T) + 1/24 a(1)^3 a(3) * DF(B(1), T) - 4 a(1)^3 B(1) B(3) + 1/6 a(1)^3 * DF(B(2), T) + 4 a(1)^3 * DF(B(4), T) + 3/64 a(1)^2 a(2) * DF(B(1), T) - 27/8 a(1)^2 a(2) B(1) B(2) + 1/16 a(1)^2 a(2) * DF(B(1), T) + 27/8 a(1)^2 a(2) * DF(B(3), T) - 1/2 a(1)^2 a(3) B(1)^2 + a(1)^2 a(3) * DF(B(2), T) + 3/16 a(1)^2 a(4) * DF(B(1), T) - 25/2 a(1)^2 B(1) B(4) + 9/8 a(1)^2 * DF(B(3), T) + 25/4 a(1)^2 * DF(B(5), T) - 1/2 a(1)^2 a(2) B(1)^2 + 1/2 a(1)^2 a(2) * DF(B(2), T) + 1/4 a(1)^2 a(2) a(3) * DF(B(1), T) - 12 a(1)^2 a(2) B(1) B(3) + a(1)^2 a(2) * DF(B(2), T) + 4 a(1)^2 a(2) * DF(B(4), T) - 9/2 a(1)^2 a(3) B(1) B(2) + 1/4 a(1)^2 a(3) * DF(B(1), T) + 9/4 a(1)^2 a(3) * DF(B(3), T) - a(1)^2 a(4) B(1)^2 + a(1)^2 a(4) * DF(B(2), T) + 1/2 a(1)^2 a(5) * DF(B(1), T) - 15 a(1)^2 B(1) B(5) + 2 a(1)^2 * DF(B(4), T) + 3 a(1)^2 * DF(B(6), T) + 1/48 a(2)^3 * DF(B(1), T) - 9/4 a(2)^3 B(1) B(2) + 1/8 a(2)^3 * DF(B(1), T) - a(2)^3 a(3) B(1)^2 + 1/4 a(2)^3 a(4) * DF(B(1), T) - 10 a(2)^3 B(1) B(4) + 3/2 a(2)^3 * DF(B(3), T) + 1/8 a(3)^2 * DF(B(1), T) - 6 a(3)^2 B(1) B(3) + a(3)^2 * DF(B(2), T) - 3 a(4) B(1) B(2) + 1/2 a(4) * DF(B(1), T) - a(5) B(1)^2 + 1/2 a(6) * DF(B(1), T) - 6 B(1) B(6) + DF(B(5), T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(6) := & 1/80640*a(1)^7*DF(B(1),T) - 1/720*a(1)^6*B(1)^2 + 1/120*a(1)^6*DF(B(2),T) \\
& + 1/1280*a(1)^5*a(2)*DF(B(1),T) - 81/640*a(1)^5*B(1)*B(2) + 1/3840*a(1)^5 \\
& *DF(B(1),T) + 81/256*a(1)^5*DF(B(3),T) - 1/24*a(1)^4*a(2)*B(1)^2 + 1/6*a(1)^4 \\
&) *a(2)*DF(B(2),T) + 5/768*a(1)^4*a(3)*DF(B(1),T) - 2*a(1)^4*B(1)*B(3) + \\
& 1/24*a(1)^4*DF(B(2),T) + 8/3*a(1)^4*DF(B(4),T) + 1/96*a(1)^3*a(2)*DF(B(1), \\
& ,T) - 27/16*a(1)^3*a(2)*B(1)*B(2) + 1/96*a(1)^3*a(2)*DF(B(1),T) + 81/32*a \\
& (1)^3*a(2)*DF(B(3),T) - 1/6*a(1)^3*a(3)*B(1)^2 + 1/2*a(1)^3*a(3)*DF(B(2),T) \\
& + 1/24*a(1)^3*a(4)*DF(B(1),T) - 125/12*a(1)^3*B(1)*B(4) + 9/16*a(1)^3*DF(\\
& B(3),T) + 125/16*a(1)^3*DF(B(5),T) - 1/4*a(1)^2*a(2)^2*B(1)^2 + 1/2*a(1)^2*a \\
& (2)^2*DF(B(2),T) + 3/32*a(1)^2*a(2)*a(3)*DF(B(1),T) - 12*a(1)^2*a(2)*B(1)* \\
& B(3) + 1/2*a(1)^2*a(2)*DF(B(2),T) + 8*a(1)^2*a(2)*DF(B(4),T) - 27/8*a(1)^2 \\
& *a(3)*B(1)*B(2) + 1/16*a(1)^2*a(3)*DF(B(1),T) + 27/8*a(1)^2*a(3)*DF(B(3), \\
& T) - 1/2*a(1)^2*a(4)*B(1)^2 + a(1)^2*a(4)*DF(B(2),T) + 3/16*a(1)^2*a(5)*DF(\\
& B(1),T) - 45/2*a(1)^2*B(1)*B(5) + 2*a(1)^2*DF(B(4),T) + 9*a(1)^2*DF(B(6),T) \\
&) + 1/48*a(1)^2*a(2)*DF(B(1),T) - 27/8*a(1)^2*a(2)*B(1)*B(2) + 1/16*a(1)^2*a \\
& (2)^2*DF(B(1),T) + 27/16*a(1)^2*a(2)*DF(B(3),T) - a(1)^2*a(2)*a(3)*B(1)^2 \\
& + a(1)*a(2)*a(3)*DF(B(2),T) + 1/4*a(1)*a(2)*a(4)*DF(B(1),T) - 25*a(1)*a \\
& (2)*B(1)*B(4) + 9/4*a(1)*a(2)*DF(B(3),T) + 25/4*a(1)*a(2)*DF(B(5),T) \\
& + 1/8*a(1)*a(3)^2*DF(B(1),T) - 12*a(1)*a(3)*B(1)*B(3) + a(1)*a(3)*DF(B(\\
& 2),T) + 4*a(1)*a(3)*DF(B(4),T) - 9/2*a(1)*a(4)*B(1)*B(2) + 1/4*a(1)*a(4) \\
&) *DF(B(1),T) + 9/4*a(1)*a(4)*DF(B(3),T) - a(1)*a(5)*B(1)^2 + a(1)*a(5)* \\
& DF(B(2),T) + 1/2*a(1)*a(6)*DF(B(1),T) - 21*a(1)*B(1)*B(6) + 5/2*a(1)*DF \\
& (B(5),T) + 7/2*a(1)*DF(B(7),T) - 1/6*a(2)^3*B(1)^2 + 1/16*a(2)^2*a(3)*DF(B \\
& (1),T) - 6*a(2)^2*B(1)*B(3) + 1/2*a(2)^2*DF(B(2),T) - 9/2*a(2)*a(3)*B(1)* \\
& B(2) + 1/4*a(2)*a(3)*DF(B(1),T) - a(2)*a(4)*B(1)^2 + 1/4*a(2)*a(5)*DF(B(\\
& 1),T) - 15*a(2)*B(1)*B(5) + 2*a(2)*DF(B(4),T) - 1/2*a(3)^2*B(1)^2 + 1/4*a \\
& (3)*a(4)*DF(B(1),T) - 10*a(3)*B(1)*B(4) + 3/2*a(3)*DF(B(3),T) - 6*a(4)* \\
& B(1)*B(3) + a(4)*DF(B(2),T) - 3*a(5)*B(1)*B(2) + 1/2*a(5)*DF(B(1),T) - \\
& a(6)*B(1)^2 + 1/2*a(7)*DF(B(1),T) - 7*B(1)*B(7) + DF(B(6),T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(7) := & \frac{1}{46080} a(1)^6 DF(B(1), T) + \frac{1}{120} a(1)^5 DF(B(2), T) + \frac{1}{768} a(1)^4 a(2) DF \\
& (B(1), T) + \frac{27}{128} a(1)^4 DF(B(3), T) + \frac{1}{6} a(1)^3 a(2) DF(B(2), T) + \frac{1}{96} a \\
& (1)^3 a(3) DF(B(1), T) + \frac{4}{3} a(1)^3 DF(B(4), T) + \frac{1}{64} a(1)^2 a(2)^2 DF(B(1), \\
& T) + \frac{27}{16} a(1)^2 a(2) DF(B(3), T) + \frac{1}{2} a(1)^2 a(3) DF(B(2), T) + \frac{1}{16} a(1) \\
&)^2 a(4) DF(B(1), T) + \frac{25}{8} a(1)^2 DF(B(5), T) + \frac{1}{2} a(1) a(2)^2 DF(B(2), T) \\
& + \frac{1}{8} a(1) a(2) a(3) DF(B(1), T) + 4 a(1) a(2) DF(B(4), T) + \frac{9}{4} a(1) a(\\
& 3) DF(B(3), T) + a(1) a(4) DF(B(2), T) + \frac{1}{4} a(1) a(5) DF(B(1), T) + 3 a(1) \\
&) DF(B(6), T) + \frac{1}{48} a(2)^3 DF(B(1), T) + \frac{9}{8} a(2)^2 DF(B(3), T) + a(2) a(3) \\
&) DF(B(2), T) + \frac{1}{4} a(2) a(4) DF(B(1), T) + \frac{5}{2} a(2) DF(B(5), T) + \frac{1}{8} a(3) \\
&)^2 DF(B(1), T) + 2 a(3) DF(B(4), T) + \frac{3}{2} a(4) DF(B(3), T) + a(5) DF(B(2), T) \\
&) + \frac{1}{2} a(6) DF(B(1), T) + DF(B(7), T) \\
C(8) := & \frac{1}{645120} a(1)^7 DF(B(1), T) + \frac{1}{720} a(1)^6 DF(B(2), T) + \frac{1}{7680} a(1)^5 a(2) * \\
& DF(B(1), T) + \frac{81}{1280} a(1)^5 DF(B(3), T) + \frac{1}{24} a(1)^4 a(2) DF(B(2), T) + \frac{1}{ \\
& 768} a(1)^4 a(3) DF(B(1), T) + \frac{2}{3} a(1)^4 DF(B(4), T) + \frac{1}{384} a(1)^3 a(2)^2 DF \\
& (B(1), T) + \frac{27}{32} a(1)^3 a(2) DF(B(3), T) + \frac{1}{6} a(1)^3 a(3) DF(B(2), T) + \frac{1}{ \\
& 96} a(1)^3 a(4) DF(B(1), T) + \frac{125}{48} a(1)^2 DF(B(5), T) + \frac{1}{4} a(1)^2 a(2)^2 DF \\
& (B(2), T) + \frac{1}{32} a(1)^2 a(2) a(3) DF(B(1), T) + 4 a(1)^2 a(2) DF(B(4), T) + \\
& \frac{27}{16} a(1)^2 a(3) DF(B(3), T) + \frac{1}{2} a(1)^2 a(4) DF(B(2), T) + \frac{1}{16} a(1)^2 a(\\
& 5) DF(B(1), T) + \frac{9}{2} a(1)^2 DF(B(6), T) + \frac{1}{96} a(1) a(2)^3 DF(B(1), T) + \frac{27}{ \\
& 16} a(1) a(2)^2 DF(B(3), T) + a(1) a(2) a(3) DF(B(2), T) + \frac{1}{8} a(1) a(2) a(\\
& 4) DF(B(1), T) + \frac{25}{4} a(1) a(2) DF(B(5), T) + \frac{1}{16} a(1) a(3)^2 DF(B(1), T) \\
& + 4 a(1) a(3) DF(B(4), T) + \frac{9}{4} a(1) a(4) DF(B(3), T) + a(1) a(5) DF(B(2) \\
&), T) + \frac{1}{4} a(1) a(6) DF(B(1), T) + \frac{7}{2} a(1) DF(B(7), T) + \frac{1}{6} a(2)^3 DF(B(\\
& 2), T) + \frac{1}{16} a(2)^2 a(3) DF(B(1), T) + 2 a(2)^2 DF(B(4), T) + \frac{9}{4} a(2) a(3) \\
&) DF(B(3), T) + a(2) a(4) DF(B(2), T) + \frac{1}{4} a(2) a(5) DF(B(1), T) + 3 a(2) * \\
& DF(B(6), T) + \frac{1}{2} a(3)^2 DF(B(2), T) + \frac{1}{4} a(3) a(4) DF(B(1), T) + \frac{5}{2} a(3) \\
&) DF(B(5), T) + 2 a(4) DF(B(4), T) + \frac{3}{2} a(5) DF(B(3), T) + a(6) DF(B(2), T) \\
& + \frac{1}{2} a(7) DF(B(1), T) + DF(B(8), T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(1) := & -\frac{1}{9216}a(1)^6 B(1) - \frac{1}{24}a(1)^5 B(2) - \frac{1}{768}a(1)^4 a(2) B(1) - \frac{1}{192}a(1)^4 B(1) - \frac{405}{128}a(1)^4 B(3) - \frac{1}{6}a(1)^3 a(2) B(2) + \frac{1}{96}a(1)^3 a(3) B(1) - \frac{1}{3}a(1)^3 B(2) - \frac{16}{3}a(1)^3 B(4) - \frac{1}{64}a(1)^2 a(2)^2 B(1) - \frac{81}{16}a(1)^2 a(2) B(3) + \frac{1}{2}a(1)^2 a(3) B(2) + \frac{1}{16}a(1)^2 a(4) B(1) - \frac{1}{8}a(1)^2 B(1) - \frac{27}{8}a(1)^2 B(3) - \frac{1}{2}a(1)a(2)^2 B(2) - \frac{1}{8}a(1)a(2)a(3) B(1) - 16a(1)a(2) B(4) + \frac{1}{4}a(1)a(3) B(1) + a(1)a(4) B(2) - a(1) B(2) + \frac{1}{16}a(2)^2 B(1) - \frac{1}{4}a(2)^2 B(1) + \frac{9}{8}a(2)^2 B(3) - a(2)a(3) B(2) + \frac{1}{4}a(2)a(4) B(1) + \frac{1}{2}a(2) B(1) - \frac{3}{2}a(2) B(3) - \frac{1}{4}a(3)^2 B(1) + a(3) B(2) - 2a(3) B(4) + \frac{3}{2}a(4) B(3) - B(1) \\
D(2) := & -\frac{1}{23040}a(1)^7 B(1) - \frac{7}{180}a(1)^6 B(2) - \frac{1}{960}a(1)^5 a(2) B(1) - \frac{1}{384}a(1)^5 B(1) - \frac{729}{640}a(1)^5 B(3) - \frac{1}{3}a(1)^4 a(2) B(2) + \frac{1}{384}a(1)^4 a(3) B(1) - \frac{5}{12}a(1)^4 B(2) - \frac{40}{3}a(1)^4 B(4) - \frac{1}{96}a(1)^3 a(2)^2 B(1) - \frac{1}{48}a(1)^3 a(2) B(1) - \frac{81}{16}a(1)^3 a(2) B(3) + \frac{1}{3}a(1)^3 a(3) B(2) + \frac{1}{24}a(1)^3 a(4) B(1) - \frac{1}{12}a(1)^3 B(1) - \frac{27}{8}a(1)^3 B(3) - \frac{625}{48}a(1)^3 B(5) - a(1)^2 a(2)^2 B(2) - \frac{1}{16}a(1)^2 a(2)a(3) B(1) - a(1)^2 a(2) B(2) - 24a(1)^2 a(2) B(4) + \frac{1}{8}a(1)^2 a(3) B(1) + 2a(1)^2 a(4) B(2) + \frac{1}{8}a(1)^2 a(5) B(1) - 2a(1)^2 B(2) - 8a(1)^2 B(4) - \frac{1}{8}a(1)a(2)^2 B(1) - \frac{27}{8}a(1)a(2)^2 B(3) - 2a(1)a(2)a(3) B(2) - \frac{9}{2}a(1)a(2) B(3) - \frac{125}{4}a(1)a(2) B(5) - \frac{1}{4}a(1)a(3)^2 B(1) + 2a(1)a(3) B(2) - 8a(1)a(3) B(4) + \frac{1}{2}a(1)a(4) B(1) + \frac{9}{2}a(1)a(4) B(3) + 2a(1)a(5) B(2) - a(1) B(1) - 3a(1) B(3) + \frac{1}{8}a(2)^2 a(3) B(1) - a(2)^2 B(2) - \frac{1}{2}a(2)a(3)^2 B(1) + \frac{1}{2}a(2)a(5) B(1) - 4a(2) B(4) - 2a(3)^2 B(2) - \frac{1}{2}a(3)a(4) B(1) + a(3) B(1) - 5a(3) B(5) + 2a(4) B(2) + 3a(5) B(3) - 2B(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(3) := & -3/5120*a(1)^6*B(1) - 9/40*a(1)^5*B(2) - 3/256*a(1)^4*a(2)*B(1) - 3/128* \\
& a(1)^4*B(1) - 243/64*a(1)^4*B(3) - 3/2*a(1)^3*a(2)*B(2) - 3/2*a(1)^3*B(2) \\
& - 12*a(1)^3*B(4) - 3/64*a(1)^2*a(2)*B(1) - 3/16*a(1)^2*a(2)*B(1) - 81/8*a \\
& a(1)^2*a(2)*B(3) + 3/16*a(1)^2*a(4)*B(1) - 3/8*a(1)^2*B(1) - 27/4*a(1)^2*B(\\
& 3) - 125/8*a(1)^2*B(5) - 3/2*a(1)*a(2)^2*B(2) - 3*a(1)*a(2)*B(2) - 12*a(1) \\
&)*a(2)*B(4) + 3*a(1)*a(4)*B(2) + 3/4*a(1)*a(5)*B(1) - 3*a(1)*B(2) - 6*a \\
& (1)*B(4) - 3/16*a(2)^3*B(1) + 3/8*a(2)^2*B(1) - 27/4*a(2)^2*B(3) - 3/4*a(2) \\
&)*a(4)*B(1) - 3/2*a(2)*B(1) - 15/2*a(2)*B(5) + 3/2*a(4)*B(1) + 3*a(5)*B \\
& (2) - 3*B(3) \\
D(4) := & -1/11520*a(1)^7*B(1) - 7/90*a(1)^6*B(2) - 1/320*a(1)^5*a(2)*B(1) - 1/240 \\
& *a(1)^5*B(1) - 81/32*a(1)^5*B(3) - a(1)^4*a(2)*B(2) - 1/96*a(1)^4*a(3)*B(1) \\
& - 2/3*a(1)^4*B(2) - 16*a(1)^4*B(4) - 1/48*a(1)^3*a(2)*B(1) - 1/12*a(1)^3* \\
& a(2)*B(1) - 27/2*a(1)^3*a(2)*B(3) - 4/3*a(1)^3*a(3)*B(2) - 1/12*a(1)^3*B(1) \\
&) - 27/4*a(1)^3*B(3) - 125/4*a(1)^3*B(5) - 2*a(1)^2*a(2)^2*B(2) - 4*a(1)^2*a \\
& (2)*B(2) - 32*a(1)^2*a(2)*B(4) - 1/4*a(1)^2*a(3)*B(1) - 27/4*a(1)^2*a(3)*B \\
& (3) + 1/4*a(1)^2*a(5)*B(1) - 2*a(1)^2*B(2) - 16*a(1)^2*B(4) - 27*a(1)^2*B(6) \\
&) - 1/12*a(1)*a(2)^3*B(1) - 27/2*a(1)*a(2)^2*B(3) - a(1)*a(2)*B(1) - 9*a(\\
& 1)*a(2)*B(3) - 25*a(1)*a(2)*B(5) + 1/4*a(1)*a(3)^2*B(1) - 4*a(1)*a(3)*B(\\
& 2) + 4*a(1)*a(5)*B(2) + a(1)*a(6)*B(1) - 6*a(1)*B(3) - 10*a(1)*B(5) - 4 \\
& /3*a(2)^3*B(2) - 1/2*a(2)^2*a(3)*B(1) - 16*a(2)^2*B(4) + a(2)*a(3)*B(1) - \\
& 9*a(2)*a(3)*B(3) - a(2)*a(5)*B(1) - 4*a(2)*B(2) - 12*a(2)*B(6) + 2*a(3) \\
& ^2*B(2) - 2*a(3)*B(1) + 2*a(5)*B(1) + 4*a(6)*B(2) - 4*B(4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(5) := & - \frac{5}{9216} a(1)^6 B(1) - \frac{5}{24} a(1)^5 B(2) - \frac{5}{256} a(1)^4 a(2) B(1) - \frac{5}{384} a(1)^4 a(2) B(1) - \frac{135}{32} a(1)^4 B(3) - \frac{5}{2} a(1)^3 a(2) B(2) - \frac{5}{48} a(1)^3 a(3) B(1) \\
& - \frac{5}{6} a(1)^3 B(2) - 2\theta a(1)^3 B(4) - \frac{5}{64} a(1)^2 a(2)^2 B(1) - \frac{5}{16} a(1)^2 a(2) B(1) - \frac{135}{8} a(1)^2 a(2) B(3) - 5 a(1)^2 a(3) B(2) - \frac{5}{16} a(1)^2 a(4) B(1) \\
& - \frac{45}{8} a(1)^2 B(3) - \frac{125}{4} a(1)^2 B(5) - \frac{5}{2} a(1) a(2)^2 B(2) - 5 a(1) a(2) B(2) - 2\theta a(1) a(2) B(4) - \frac{5}{4} a(1) a(3) B(1) - \frac{45}{4} a(1) a(3) B(3) \\
& - 5 a(1) a(4) B(2) - 1\theta a(1) B(4) - 15 a(1) B(6) + \frac{5}{48} a(2)^3 B(1) - \frac{5}{8} a(2)^2 B(1) + \frac{5}{4} a(2) a(4) B(1) - \frac{15}{2} a(2) B(3) + \frac{5}{8} a(3)^2 B(1) \\
& - 5 a(3) B(2) - \frac{5}{2} a(4) B(1) + \frac{5}{2} a(6) B(1) - 5 B(5) \\
D(6) := & - \frac{1}{1792\theta} a(1)^7 B(1) - \frac{1}{2\theta} a(1)^6 B(2) - \frac{1}{32\theta} a(1)^5 a(2) B(1) - \frac{1}{64\theta} a(1)^5 a(2) B(1) - \frac{243}{128} a(1)^5 B(3) - a(1)^4 a(2) B(2) - \frac{3}{128} a(1)^4 a(3) B(1) \\
& - \frac{1}{4} a(1)^4 B(2) - 16 a(1)^4 B(4) - \frac{1}{32} a(1)^3 a(2)^2 B(1) - \frac{1}{16} a(1)^3 a(2) B(1) - \frac{243}{16} a(1)^3 a(2) B(3) - 3 a(1)^3 a(3) B(2) - \frac{1}{8} a(1)^3 a(4) B(1) \\
& - \frac{27}{8} a(1)^3 B(3) - \frac{375}{8} a(1)^3 B(5) - 3 a(1)^2 a(2)^2 B(2) - \frac{3}{16} a(1)^2 a(2) a(3) B(1) - 3 a(1)^2 a(2) B(2) - 48 a(1)^2 a(2) B(4) - \frac{3}{8} a(1)^2 a(3) B(1) \\
& - \frac{81}{4} a(1)^2 a(3) B(3) - 6 a(1)^2 a(4) B(2) - \frac{3}{8} a(1)^2 a(5) B(1) - 12 a(1)^2 B(4) - 54 a(1)^2 B(6) - \frac{3}{8} a(1) a(2)^2 B(1) - \frac{81}{8} a(1) a(2) B(3) \\
& - 6 a(1) a(2) a(3) B(2) - \frac{27}{2} a(1) a(2) B(3) - \frac{75}{2} a(1) a(2) B(5) - 6 a(1) a(3) B(2) - 24 a(1) a(3) B(4) - \frac{3}{2} a(1) a(4) B(1) \\
& - \frac{27}{2} a(1) a(4) B(3) - 6 a(1) a(5) B(2) - 15 a(1) B(5) - 21 a(1) B(7) + \frac{3}{8} a(2)^2 a(3) B(1) - 3 a(2)^2 B(2) - \frac{3}{2} a(2) a(3) B(1) + \frac{3}{2} a(2) a(5) B(1) \\
& - 12 a(2) B(4) + \frac{3}{2} a(3) a(4) B(1) - 9 a(3) B(3) - 6 a(4) B(2) - 3 a(5) B(1) + 3 a(7) B(1) - 6 B(6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(7) := & -7/46080 a(1)^6 B(1) - 7/120 a(1)^5 B(2) - 7/768 a(1)^4 a(2) B(1) - 189/128 a(1)^4 B(3) - 7/6 a(1)^3 a(2) B(2) - 7/96 a(1)^3 a(3) B(1) - 28/3 a(1)^3 B(4) - 7/64 a(1)^2 a(2)^2 B(1) - 189/16 a(1)^2 a(2) B(3) - 7/2 a(1)^2 a(3) B(2) - 7/16 a(1)^2 a(4) B(1) - 175/8 a(1)^2 B(5) - 7/2 a(1) a(2)^2 B(2) - 7/8 a(1) a(2) a(3) B(1) - 28 a(1) a(2) B(4) - 63/4 a(1) a(3) B(3) - 7 a(1) a(4) B(2) - 7/4 a(1) a(5) B(1) - 21 a(1) B(6) - 7/48 a(2)^2 B(1) - 63/8 a(2)^2 B(3) - 7 a(2) a(3) B(2) - 7/4 a(2) a(4) B(1) - 35/2 a(2)^2 B(5) - 7/8 a(3)^2 B(1) - 14 a(3) B(4) - 21/2 a(4) B(3) - 7 a(5) B(2) - 7/2 a(6) B(1) - 7 B(7) \\
D(8) := & -1/80640 a(1)^7 B(1) - 1/90 a(1)^6 B(2) - 1/960 a(1)^5 a(2) B(1) - 81/160 a(1)^5 B(3) - 1/3 a(1)^4 a(2) B(2) - 1/96 a(1)^4 a(3) B(1) - 16/3 a(1)^4 B(4) - 1/48 a(1)^3 a(2)^2 B(1) - 27/4 a(1)^3 a(2) B(3) - 4/3 a(1)^3 a(3) B(2) - 1/12 a(1)^2 a(4) B(1) - 125/6 a(1)^2 B(5) - 2 a(1)^2 a(2) B(2) - 1/4 a(1)^2 a(2) a(3) B(1) - 32 a(1)^2 a(2) B(4) - 27/2 a(1)^2 a(3) B(3) - 4 a(1)^2 a(4) B(2) - 1/2 a(1)^2 a(5) B(1) - 36 a(1)^2 B(6) - 1/12 a(1) a(2)^3 B(1) - 27/2 a(1) a(2)^2 B(3) - 8 a(1) a(2) a(3) B(2) - a(1) a(2) a(4) B(1) - 50 a(1) a(2) B(5) - 1/2 a(1) a(3)^2 B(1) - 32 a(1) a(3) B(4) - 18 a(1) a(4) B(3) - 8 a(1) a(5) B(2) - 2 a(1) a(6) B(1) - 28 a(1) B(7) - 4/3 a(2)^3 B(2) - 1/2 a(2)^2 a(3) B(1) - 16 a(2)^2 B(4) - 18 a(2) a(3) B(3) - 8 a(2) a(4) B(2) - 2 a(2) a(5) B(1) - 24 a(2) B(6) - 4 a(3)^2 B(2) - 2 a(3) a(4) B(1) - 20 a(3) B(5) - 16 a(4) B(4) - 12 a(5) B(3) - 8 a(6) B(2) - 4 a(7) B(1) - 8 B(8)
\end{aligned}$$

Fourth order :

$$\begin{aligned}
 a(1) &:= 1/16 * A^3 * \sin(3 * SGM * T) + 3/32 * A^3 * \sin(SGM * T) + A * \sin(SGM * T) \\
 a(2) &:= 25/192 * A^4 * \cos(2 * SGM * T) - 67/1344 * A^4 * \cos(4 * SGM * T) + 1/16 * A^4 - 1/4 * A^2 * \\
 &\quad \cos(2 * SGM * T) + 1/4 * A^2 \\
 a(3) &:= - 3/32 * A^3 * \sin(3 * SGM * T) + 9/32 * A^3 * \sin(SGM * T) \\
 a(4) &:= 2 * A1 * A^4 * \sin(2 * SGM * T) - 2 * B1 * A^4 * \cos(2 * SGM * T) - 1/6 * A^4 * \cos(2 * SGM * T) + 1/ \\
 &\quad 24 * A^4 * \cos(4 * SGM * T) + 1/8 * A^4 \\
 B(1) &:= - 5/32 * A^3 * \cos(3 * SGM * T) - A * \cos(SGM * T) \\
 B(2) &:= 1/8 * A^4 * \sin(2 * SGM * T) - 3/112 * A^4 * \sin(4 * SGM * T) \\
 B(3) &:= 0 \\
 B(4) &:= - A1 * A^4 * \cos(2 * SGM * T) - B1 * A^4 * \sin(2 * SGM * T) \\
 SGM &:= - 1/8 * A^2 + 1
 \end{aligned}$$

Fifth order :

$$\begin{aligned}
 a(1) &:= -11/5376 * A^5 * \sin(3 * SGM * T) + 163/21504 * A^5 * \sin(5 * SGM * T) - 137/3072 * A^5 * \\
 &\quad \sin(SGM * T) + 1/16 * A^3 * \sin(3 * SGM * T) + 3/32 * A^3 * \sin(SGM * T) + A * \sin(SGM * T) \\
 a(2) &:= 25/192 * A^4 * \cos(2 * SGM * T) - 67/1344 * A^4 * \cos(4 * SGM * T) + 1/16 * A^4 - 1/4 * A^2 * \\
 &\quad \cos(2 * SGM * T) + 1/4 * A^2 \\
 a(3) &:= 3/2 * A^5 * \cos(3 * SGM * T) - 3/2 * A^5 * \cos(SGM * T) + 3/2 * B_1 * A^5 * \sin(3 * SGM * T) \\
 &\quad - 3/2 * B_1 * A^5 * \sin(SGM * T) + 2195/14336 * A^5 * \sin(3 * SGM * T) - 5455/157696 * A^5 * \\
 &\quad \sin(5 * SGM * T) - 1/256 * A^5 * \sin(SGM * T) - 3/32 * A^3 * \sin(3 * SGM * T) + 9/32 * A^3 * \\
 &\quad \sin(SGM * T) \\
 a(4) &:= 2 * A^4 * \sin(2 * SGM * T) - 2 * A^5 * \cos(2 * SGM * T) - 2 * B_1 * A^4 * \cos(2 * SGM * T) + 2 * \\
 &\quad B_2 * A^5 * \sin(2 * SGM * T) - 1/6 * A^4 * \cos(2 * SGM * T) + 1/24 * A^4 * \cos(4 * SGM * T) + 1/8 * \\
 &\quad A^4 \\
 a(5) &:= -5/2 * A^5 * \cos(3 * SGM * T) + 5/2 * A^5 * \cos(SGM * T) - 5/2 * B_1 * A^5 * \sin(3 * SGM * T) \\
 &\quad + 5/2 * B_1 * A^5 * \sin(SGM * T) - 625/6144 * A^5 * \sin(3 * SGM * T) + 125/6144 * A^5 * \\
 &\quad \sin(5 * SGM * T) + 625/3072 * A^5 * \sin(SGM * T) \\
 B(1) &:= 535/7168 * A^5 * \cos(3 * SGM * T) - 283/7168 * A^5 * \cos(5 * SGM * T) - 5/32 * A^3 * \cos(3 * \\
 &\quad SGM * T) - A * \cos(SGM * T) \\
 B(2) &:= 1/8 * A^4 * \sin(2 * SGM * T) - 3/112 * A^4 * \sin(4 * SGM * T) \\
 B(3) &:= 2 * A^5 * \sin(3 * SGM * T) - 2 * A^5 * \sin(SGM * T) - 2 * B_1 * A^5 * \cos(3 * SGM * T) + 2 * \\
 &\quad B_1 * A^5 * \cos(SGM * T) - 1/64 * A^5 * \cos(3 * SGM * T) + 7/2112 * A^5 * \cos(5 * SGM * T) - 1/ \\
 &\quad 96 * A^5 * \cos(SGM * T) \\
 B(4) &:= -A^4 * \cos(2 * SGM * T) - A^5 * \sin(2 * SGM * T) - B_1 * A^4 * \sin(2 * SGM * T) - B_2 * A^5 * \\
 &\quad \cos(2 * SGM * T) \\
 B(5) &:= 0 \\
 SGM &:= -15/256 * A^4 - 1/8 * A^2 + 1
 \end{aligned}$$

Sixth order :

$$\begin{aligned}
 a(1) &:= -11/5376 A^5 \sin(3SGM^*T) + 163/21504 A^5 \sin(5SGM^*T) - 137/3072 A^5 \sin(SGM^*T) + 1/16 A^3 \sin(3SGM^*T) + 3/32 A^3 \sin(SGM^*T) + A \sin(SGM^*T) \\
 a(2) &:= 7793/43008 A^6 \cos(2SGM^*T) + 27793/827904 A^6 \cos(4SGM^*T) - 50143/5361664 A^6 \cos(6SGM^*T) - 183/4096 A^6 + 25/192 A^4 \cos(2SGM^*T) - 67/1344 A^4 \cos(4SGM^*T) + 1/16 A^2 - 1/4 A^2 \cos(2SGM^*T) + 1/4 A^2 \\
 a(3) &:= 3/2 A^2 A^6 \sin(3SGM^*T) - 3/2 A^2 A^6 \sin(SGM^*T) + 3/2 B^2 A^6 \cos(3SGM^*T) - 3/2 B^2 A^6 \cos(SGM^*T) + 2419/14336 A^5 \sin(3SGM^*T) - 5455/157696 A^5 \sin(5SGM^*T) - 5/256 A^5 \sin(SGM^*T) - 3/32 A^3 \sin(3SGM^*T) + 9/32 A^3 \sin(SGM^*T) \\
 a(4) &:= -2 A^2 A^5 \cos(2SGM^*T) + 2 A^3 A^6 \sin(2SGM^*T) + 2 B^2 A^5 \sin(2SGM^*T) - 2 B^3 A^6 \cos(2SGM^*T) + 347/2688 A^6 \cos(2SGM^*T) - 5843/36960 A^6 \cos(4SGM^*T) + 4561/197120 A^6 \cos(6SGM^*T) - 1/96 A^6 - 3/16 A^4 \cos(2SGM^*T) + 1/24 A^4 \cos(4SGM^*T) + 1/8 A^4 \\
 a(5) &:= -5/2 A^2 A^6 \sin(3SGM^*T) + 5/2 A^2 A^6 \sin(SGM^*T) - 5/2 B^2 A^6 \cos(3SGM^*T) + 5/2 B^2 A^6 \cos(SGM^*T) - 785/6144 A^5 \sin(3SGM^*T) + 125/6144 A^5 \sin(5SGM^*T) + 235/1024 A^5 \sin(SGM^*T) \\
 a(6) &:= -105/512 A^6 \cos(2SGM^*T) + 111/1280 A^6 \cos(4SGM^*T) - 27/2560 A^6 \cos(6SGM^*T) + 33/256 A^6
 \end{aligned}$$

```

B(1) := 535/7168*A5*COS(3*SGM*T) - 283/7168*A5*COS(5*SGM*T) - 5/32*A3*COS(3*
SGM*T) - A*COS(SGM*T)

B(2) := 397/5376*A6*SIN(2*SGM*T) + 2795/34496*A6*SIN(4*SGM*T) - 13765/1005312*
A6*SIN(6*SGM*T) + 1/8*A4*SIN(2*SGM*T) - 3/112*A4*SIN(4*SGM*T)

B(3) := - 2*A2*A6*COS(3*SGM*T) + 2*A2*A6*COS(SGM*T) + 2*B2*A6*SIN(3*SGM*T) -
2*B2*A6*SIN(SGM*T) - 7/192*A5*COS(3*SGM*T) + 7/2112*A5*COS(5*SGM*T) +
1/96*A5*COS(SGM*T)

B(4) := - A2*A5*SIN(2*SGM*T) - A3*A6*COS(2*SGM*T) - B2*A5*COS(2*SGM*T) - B3*A6*
SIN(2*SGM*T) - 1/96*A6*SIN(4*SGM*T) + 1/3072*A6*SIN(6*SGM*T) - 1/96*
A4*SIN(2*SGM*T)

B(5) := 0
B(6) := 0

SGM := - 15/256*A4 - 1/8*A2 + 1

```

Seventh order :

$$\begin{aligned}
 a(1) &:= 16139927/35323904 A^7 \sin(3SGM^*T) + 1371963/54591488 A^7 \sin(5SGM^*T) \\
 &\quad - 5109337/110297088 A^7 \sin(7SGM^*T) - 452111/4128768 A^7 \sin(SGM^*T) - \\
 &\quad 11/5376 A^5 \sin(3SGM^*T) + 163/21504 A^5 \sin(5SGM^*T) - 137/3072 A^5 \sin(SGM^*T) \\
 &\quad + 1/16 A^3 \sin(3SGM^*T) + 3/32 A^3 \sin(SGM^*T) + A \sin(SGM^*T) \\
 a(2) &:= 7793/43008 A^6 \cos(2SGM^*T) + 27793/827904 A^6 \cos(4SGM^*T) - 50143/ \\
 &\quad 5361664 A^6 \cos(6SGM^*T) - 183/4096 A^4 + 25/192 A^4 \cos(2SGM^*T) - 67/ \\
 &\quad 1344 A^4 \cos(4SGM^*T) + 1/16 A^2 - 1/4 A^2 \cos(2SGM^*T) + 1/4 A^2 \\
 a(3) &:= 3/2 A^7 \cos(3SGM^*T) - 3/2 A^7 \cos(SGM^*T) + 3/2 B^7 \sin(3SGM^*T) \\
 &\quad - 3/2 B^7 \sin(SGM^*T) + 87907129/529858560 A^7 \sin(3SGM^*T) + \\
 &\quad 1716238173/33027850240 A^7 \sin(5SGM^*T) - 45113153/4932730880 A^7 \sin(7SGM^*T) \\
 &\quad - 49671/229376 A^5 \sin(SGM^*T) + 2419/14336 A^5 \sin(3SGM^*T) - \\
 &\quad 5455/157696 A^5 \sin(5SGM^*T) - 5/256 A^5 \sin(SGM^*T) - 3/32 A^3 \sin(3SGM^*T) \\
 &\quad + 9/32 A^3 \sin(SGM^*T) \\
 a(4) &:= 2 A^6 \sin(2SGM^*T) + 2 A^7 \sin(2SGM^*T) - 2 B^6 \cos(2SGM^*T) - 2 \\
 &\quad B^7 \cos(2SGM^*T) + 347/2688 A^6 \cos(2SGM^*T) - 5843/36960 A^6 \cos(4SGM^*T) \\
 &\quad + 4561/197120 A^6 \cos(6SGM^*T) - 1/96 A^4 - 3/16 A^4 \cos(2SGM^*T) \\
 &\quad + 1/24 A^4 \cos(4SGM^*T) + 1/8 A^4 \\
 a(5) &:= - 5/2 A^7 \cos(3SGM^*T) + 5/2 A^7 \cos(SGM^*T) - 5/2 B^7 \sin(3SGM^*T) \\
 &\quad + 5/2 B^7 \sin(SGM^*T) + 1026561/5046272 A^7 \sin(3SGM^*T) - 6075917/ \\
 &\quad 45416448 A^7 \sin(5SGM^*T) + 173561/11354112 A^7 \sin(7SGM^*T) - 179905/ \\
 &\quad 2064384 A^5 \sin(SGM^*T) - 785/6144 A^5 \sin(3SGM^*T) + 125/6144 A^5 \sin(5SGM^*T) \\
 &\quad + 235/1024 A^5 \sin(SGM^*T) \\
 a(6) &:= - 105/512 A^6 \cos(2SGM^*T) + 111/1280 A^6 \cos(4SGM^*T) - 27/2560 A^6 \cos(6SGM^*T) \\
 &\quad + 33/256 A^6 \\
 a(7) &:= - 172529/983040 A^7 \sin(3SGM^*T) + 172529/2949120 A^7 \sin(5SGM^*T) - \\
 &\quad 16807/2949120 A^7 \sin(7SGM^*T) + 53851/196608 A^7 \sin(SGM^*T)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(1) &:= 9084083/52985856 * A^7 * \cos(3 * SGM * T) + 4046263/900759552 * A^7 * \cos(5 * SGM * T) \\
&\quad - 288815/42893312 * A^7 * \cos(7 * SGM * T) + 535/7168 * A^5 * \cos(3 * SGM * T) - 283/ \\
&\quad 7168 * A^5 * \cos(5 * SGM * T) - 5/32 * A^3 * \cos(3 * SGM * T) - A * \cos(SGM * T) \\
B(2) &:= 397/5376 * A^6 * \sin(2 * SGM * T) + 2795/34496 * A^6 * \sin(4 * SGM * T) - 13765/1005312 * \\
&\quad A^6 * \sin(6 * SGM * T) + 1/8 * A^4 * \sin(2 * SGM * T) - 3/112 * A^4 * \sin(4 * SGM * T) \\
B(3) &:= 2 * A^7 * \sin(3 * SGM * T) - 2 * A^7 * \sin(SGM * T) - 2 * B^7 * \cos(3 * SGM * T) + 2 * \\
&\quad B^7 * \cos(SGM * T) - 281/59136 * A^7 * \cos(3 * SGM * T) - 13213/371712 * A^7 * \cos(5 * \\
&\quad SGM * T) + 12231/3627008 * A^7 * \cos(7 * SGM * T) - 331/43008 * A^7 * \cos(SGM * T) - 7/ \\
&\quad 192 * A^5 * \cos(3 * SGM * T) + 7/2112 * A^5 * \cos(5 * SGM * T) + 1/96 * A^5 * \cos(SGM * T) \\
B(4) &:= - A^6 * \cos(2 * SGM * T) - A^7 * \cos(2 * SGM * T) - B^6 * \sin(2 * SGM * T) - B^6 * \\
&\quad \sin(2 * SGM * T) - 1/96 * A^6 * \sin(4 * SGM * T) + 1/3072 * A^6 * \sin(6 * SGM * T) - 1/96 * \\
&\quad A^4 * \sin(2 * SGM * T) \\
B(5) &:= - 161/30720 * A^7 * \cos(3 * SGM * T) + 13/6144 * A^7 * \cos(5 * SGM * T) - 3/112640 * A^7 * \\
&\quad \cos(7 * SGM * T) - 1/6144 * A^7 * \cos(SGM * T) \\
B(6) &:= 0 \\
B(7) &:= 0 \\
SGM &:= 2903/172032 * A^6 - 15/256 * A^4 - 1/8 * A^2 + 1
\end{aligned}$$

Eighth order :

$$a(1) := -2028239/35323904 A^7 \sin(3SGM^*T) + 4812149/1801519104 A^7 \sin(5SGM^*T) + 89333/110297088 A^7 \sin(7SGM^*T) - 452111/4128768 A^7 \sin(SGM^*T) - 11/5376 A^5 \sin(3SGM^*T) + 163/21504 A^5 \sin(5SGM^*T) - 137/3072 A^5 \sin(SGM^*T) + 1/16 A^3 \sin(3SGM^*T) + 3/32 A^3 \sin(SGM^*T) + A \sin(SGM^*T)$$

$$a(2) := -207765167/454164480 A^8 \cos(2SGM^*T) + 18727945601/231194951680 A^8 \cos(4SGM^*T) + 218254093733/116225004994560 A^8 \cos(6SGM^*T) + 8437724717/5504927662080 A^8 \cos(8SGM^*T) - 2323537/45416448 A^8 + 7793/43008 A^6 \cos(2SGM^*T) + 27793/827904 A^6 \cos(4SGM^*T) - 50143/5361664 A^6 \cos(6SGM^*T) - 183/4096 A^6 + 25/192 A^4 \cos(2SGM^*T) - 67/1344 A^4 \cos(4SGM^*T) + 1/16 A^2 - 1/4 A^2 \cos(2SGM^*T) + 1/4 A^2$$

$$a(3) := 3/2 A^8 \cos(3SGM^*T) - 3/2 A^8 \cos(SGM^*T) + 3/2 B^8 \sin(3SGM^*T) - 3/2 B^8 \sin(SGM^*T) + 111531289/529858560 A^7 \sin(3SGM^*T) + 1716238173/33027850240 A^7 \sin(5SGM^*T) - 45113153/4932730880 A^7 \sin(7SGM^*T) - 658877/2523136 A^5 \sin(SGM^*T) + 2419/14336 A^5 \sin(3SGM^*T) - 5455/157696 A^5 \sin(5SGM^*T) - 5/256 A^5 \sin(SGM^*T) - 3/32 A^3 \sin(3SGM^*T) + 9/32 A^3 \sin(SGM^*T)$$

$$a(4) := 2 A^7 \sin(2SGM^*T) + 2 A^8 \sin(2SGM^*T) - 2 B^7 \cos(2SGM^*T) - 2 B^8 \cos(2SGM^*T) + 8971967/24837120 A^8 \cos(2SGM^*T) - 2757797951/18578165760 A^8 \cos(4SGM^*T) - 109223595233/1709191249920 A^8 \cos(6SGM^*T) + 62676827/7769051136 A^8 \cos(8SGM^*T) - 409265/2483712 A^8 + 8237/118272 A^6 \cos(2SGM^*T) - 5843/36960 A^6 \cos(4SGM^*T) + 4561/197120 A^6 \cos(6SGM^*T) - 1/96 A^6 - 3/16 A^4 \cos(2SGM^*T) + 1/24 A^4 \cos(4SGM^*T) + 1/8 A^4$$

$$\begin{aligned}
 a(5) := & - \frac{5}{2} A^4 A^8 \cos(3 \text{SGM}^* T) + \frac{5}{2} A^4 A^8 \cos(\text{SGM}^* T) - \frac{5}{2} B^4 A^8 \sin(3 \text{SGM}^* T) \\
 & + \frac{5}{2} B^4 A^8 \sin(\text{SGM}^* T) + \frac{1954723}{15138816} A^7 \sin(3 \text{SGM}^* T) - \\
 & \frac{6075917}{45416448} A^7 \sin(5 \text{SGM}^* T) + \frac{173561}{11354112} A^7 \sin(7 \text{SGM}^* T) - \\
 & \frac{41645}{3244032} A^5 \sin(\text{SGM}^* T) - \frac{785}{6144} A^5 \sin(3 \text{SGM}^* T) + \frac{125}{6144} A^5 \sin(5 \text{SGM}^* T) \\
 & + \frac{235}{1024} A^5 \sin(\text{SGM}^* T)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a(6) := & \frac{489131}{9461760} A^8 \cos(2 \text{SGM}^* T) - \frac{1394853}{7884800} A^8 \cos(4 \text{SGM}^* T) + \\
 & \frac{1697067}{15769600} A^8 \cos(6 \text{SGM}^* T) - \frac{2759329}{274391040} A^8 \cos(8 \text{SGM}^* T) \\
 & + \frac{3841}{270336} A^6 - \frac{105}{512} A^6 \cos(2 \text{SGM}^* T) + \frac{111}{1280} A^6 \cos(4 \text{SGM}^* T) \\
 & - \frac{27}{2560} A^6 \cos(6 \text{SGM}^* T) + \frac{33}{256} A^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a(7) := & - \frac{172529}{983040} A^7 \sin(3 \text{SGM}^* T) + \frac{172529}{2949120} A^7 \sin(5 \text{SGM}^* T) - \\
 & \frac{16807}{2949120} A^7 \sin(7 \text{SGM}^* T) + \frac{53851}{1966080} A^7 \sin(\text{SGM}^* T)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a(8) := & - \frac{11}{40} A^8 \cos(2 \text{SGM}^* T) + \frac{1669}{11520} A^8 \cos(4 \text{SGM}^* T) - \frac{11}{280} A^8 \cos(6 \text{SGM}^* T) \\
 & + \frac{1}{315} A^8 \cos(8 \text{SGM}^* T) + \frac{385}{2304} A^8
 \end{aligned}$$

$$B(1) := 9084083/52985856 * A^7 \cos(3 * SGM * T) + 4046263/900759552 * A^7 \cos(5 * SGM * T) \\ - 288815/42893312 * A^7 \cos(7 * SGM * T) + 535/7168 * A^5 \cos(3 * SGM * T) - 283/ \\ 7168 * A^5 \cos(5 * SGM * T) - 5/32 * A^3 \cos(3 * SGM * T) - A \cos(SGM * T)$$

$$B(2) := - 43362113/105971712 * A^8 \sin(2 * SGM * T) + 751065925/4334905344 * A^8 \sin(4 * \\ SGM * T) + 205780932641/7748333666304 * A^8 \sin(6 * SGM * T) - 1941571271/ \\ 366995177472 * A^8 \sin(8 * SGM * T) + 397/5376 * A^6 \sin(2 * SGM * T) + 2795/34496 * A^6 \\ \sin(4 * SGM * T) - 13765/1005312 * A^6 \sin(6 * SGM * T) + 1/8 * A^4 \sin(2 * SGM * T) \\ - 3/112 * A^4 \sin(4 * SGM * T)$$

$$B(3) := 2 * A^8 \sin(3 * SGM * T) - 2 * A^8 \sin(SGM * T) - 2 * B_4 * A^8 \cos(3 * SGM * T) + 2 * \\ B_4 * A^8 \cos(SGM * T) - 2531/39424 * A^7 \cos(3 * SGM * T) - 13213/371712 * A^7 \cos(5 * \\ SGM * T) + 12231/3627008 * A^7 \cos(7 * SGM * T) + 8161/157696 * A^7 \cos(SGM * T) - 7 \\ /192 * A^5 \cos(3 * SGM * T) + 7/2112 * A^5 \cos(5 * SGM * T) + 1/96 * A^5 \cos(SGM * T)$$

$$B(4) := - A^7 \cos(2 * SGM * T) - A^8 \cos(2 * SGM * T) - B_4 * A^7 \sin(2 * SGM * T) - B_5 * A^8 \\ \sin(2 * SGM * T) - 55739/7096320 * A^8 \sin(4 * SGM * T) - 512783/37847040 * A^8 \sin(6 * SGM * T) \\ + 9223/14192640 * A^8 \sin(8 * SGM * T) - 7031/236544 * A^6 \sin(2 * SGM * T) - 1/96 * A^6 \sin(4 * SGM * T) \\ + 1/3072 * A^6 \sin(6 * SGM * T) - 1/96 * A^4 \sin(2 * SGM * T) \\ * SGM * T)$$

$$B(5) := - 161/30720 * A^7 \cos(3 * SGM * T) + 13/6144 * A^7 \cos(5 * SGM * T) - 3/112640 * A^7 \\ \cos(7 * SGM * T) - 1/6144 * A^7 \cos(SGM * T)$$

$$B(6) := - 11/9216 * A^8 \sin(2 * SGM * T) - 77/76800 * A^8 \sin(4 * SGM * T) + 73/230400 * A^8 \\ \sin(6 * SGM * T) - 1/534528 * A^8 \sin(8 * SGM * T)$$

$$B(7) := 0$$

$$B(8) := 0$$

$$SGM := 2903/172032 * A^6 - 15/256 * A^4 - 1/8 * A^2 + 1$$