

液晶対流系におけるトポロジカル欠陥

京大 理 佐々 真一 (Shin-ichi Sasa)

1. Introduction

化学反応系や流体系を代表的な例とする非平衡系では、リズムやパターンの形成にみられるように、時間や空間の対称性が破れる「非平衡秩序」があらわれる。これは相転移に伴う内部対称性の破れとして理解される平衡系の秩序と大きな相違をなす。平衡系では高温相から低温相へ急冷した時、対称性の破れ方が空間的に非一様になり、その結果トポロジカル欠陥というどの秩序状態にも属さない特異領域が生まれる。例えば、Ising Spin 系のように Z_2 対称性を持つ系では秩序相ではスピンの上向き状態と下向き状態があるが、空間のある領域ではスピンが上向きである領域ではスピンが下向きになるとき、「界面」と呼ばれる境界が存在する。これがトポロジカル欠陥である。あるいは、 S_1 対称性を持つ系では「渦 (Vortex)」とよばれるトポロジカル欠陥があらわれる。高温相から低温相へ急冷した時の秩序化過程はトポロジカル欠陥の動力学に基づいて詳しく議論されている。

同じ議論が非平衡秩序に対しても適用され、対称性の破れ方が空間的に非一様であればトポロジカル欠陥が生成される。さらに、非平衡系では秩序の乱れ方として「カオスの発生」という新しい機構が登場する。対称性の破れの空間的非一様性による秩序の乱れは遷移的であるが、カオスによる秩序の乱れは定常的である。これはトポロジーの議論だけでは理解できないダイナミクスの問題である。

このように非平衡系ではトポロジーとダイナミクスが絡んで多様な現象をつくり出す。特に、時間・空間の対称性の破れは平衡系以上に多様なトポロジカル欠陥をつくり、それがさらに複雑な動力学に結び付いていくのである。この講究録では、トポロジーとダイナミクスが絡む例として、液晶対流系の実験でみられる二つの現象（欠陥カオスと位相とび線）について説明し、それを理論的にどのように扱っていくかについて紹介したい。

2. 液晶対流系

液晶は director と呼ばれる内部自由度をもち、それが流体場や電場に結合するため、液晶にある臨界電圧以上の電場をかけると対流が始まる。液晶対流系は内部自由度に由来する複雑な相互作用とオーダー 1000 もの巨大アスペクト比のために、通常の対流に見られない豊富な現象が観測されている。例えば、それぞれの現象のキーワードを並べてみると、(1) 異方的対流 (2) 格子状対流 (3) 振動対流 (4) 伝搬対流 (5) 欠陥カオス (6) (局在) 位相波 (7) 欠陥格子 (8) 時空間欠性転移 (9) 乱流子 (10) 位相乱流 (11) 位相すべり線 (12) 乱流-乱流転移等、実に多様である。

その一方で、液晶の流体现象を記述すると考えられている方程式は非常に複雑な連立

偏微分方程式のため、理論的解析は極めて困難である。[1]

外場の強さ (= 電圧) を大きくしていくと、系に流れ込むエネルギーが大きくなるので現象が複雑化していくことは容易に期待できる。このときの現象の変化は外場の振動数によって異なる。そこで、外場の電圧と振動数に対する相図がかける。[2,3] ただし、電圧と振動数だけでは系の振る舞いが決まらないということは、注意しなければならない。液晶対流系では、通常の流体でレイリー数やプラントル数に相当する普遍的な無次元パラメーターがいくつあるのかさえも明らかではないのである。

ミクロな立場から考えると液晶対流系は極めて複雑であるが、興味深い巨視的な現象を考える時、ミクロなレベルまで戻る必要はない。以下では、対流構造を巨視的に記述する立場をとる。

3. 対流構造とトポロジー

対流構造は2次元空間での周期パターンとして捉える事が出来る。例えば、ロールパターンは周期関数 f を用いて $u = f(kx + \phi)$ と表現出来るし、グリッドパターンは二重周期関数 f によって $u = f(k_1x + \phi_1, k_2y + \phi_2)$ と書ける。対流構造とトポロジーの関係を見るために周期パターンの形成を (空間) 並進対称性の破れとして捉える。即ち、

$$G = \{g: x \rightarrow x + x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}\} \longrightarrow H = \{h: x \rightarrow x + \pi n/k, \quad n \in \mathbf{Z}\} \quad (1)$$

この時、秩序のありかたを指定するパラメータ (オーダーパラメーター) はオーダーパラメーター空間

$$G/H \simeq S^1 \quad (2)$$

の要素として与えられる。物理的には周期パターンの位相がオーダーパラメーターに相当する。位相の空間的な変動を考えることにより、位相場 $\phi(x)$ が定義される。2次元系ではその位相場の特異点がトポロジカル欠陥になる。ロールパターンの位相特異点は

$$\oint d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \phi = 2\pi\kappa \quad (3)$$

によって分類される。(図1参照) ここで、 κ は topological charge と呼ばれる整数である。同様に、グリッドパターンの位相特異点は

$$\oint d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \phi_i = 2\pi\kappa_i \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

によって分類される。(図2参照) ただし、topological charge κ_i に対して、 $\kappa_1 \pm \kappa_2$ が整数にならない。

対流構造は時間とともに変化するので、そのダイナミクスを議論する必要がある。安定なロールパターンに緩和する場合でも、トポロジカル欠陥の運動となめらかな位相場の運動が結合しているので、ある極限的な場合しか理論的には解析されていない。さらに、実験では対流構造がカオス的に変化することが知られている。次の節で、この現象について考える。

4. 現象1 (Defect Chaos)

静止した液晶に電場を加えると、ある臨界電圧以上で対流が始まる。対流開始点近傍では、ローラーはディレクターに垂直な方向にまっすぐ並ぶが、さらに外場の電圧をあげていくと、トポロジカル欠陥が自発的に生成され、その個数がカオティックな変動する状態（欠陥カオス）が実現する。

実験的にこのような状態が発見されてから理論的な研究が始まるまでは長い空白期間があった。液晶の流体现象を記述すると考えられている電磁流体方程式は非常に複雑なため、直接解析するのは難しく、現在でも対流開始点を議論するのが精一杯である。一方、時空カオスという観点から、振動媒質やカオス結合写像での時空カオスとの類似点や相違点が議論されてきた。[4,5] そこで、周期パターンを形成する系でトポロジカル欠陥が定義され、欠陥の個数がカオス的に変動するモデルを構成することが対流現象における欠陥カオスの研究の第一歩になる。

液晶対流系に対して、ディレクターによる異向性があることを考慮に入れたもっとも簡単な現象論的モデルは、力学変数として速度の z 成分に相当するスカラー場 w を選んだ偏微分方程式である。[6]

$$\partial_t w = R w - w^3 - (1 + \Delta)^2 w - \eta_1 \partial_y^4 w - 2\eta_2 \partial_x^2 \partial_y^2 w \quad (5)$$

このモデルでは安定な周期パターンに緩和するので、対流開始点近傍のパターン形成の様子を議論することは出来るが、欠陥カオスについては何も説明できない。非緩和型のモデルを考えるために、横方向の速度場を考慮にいれると、

$$\begin{aligned} \partial_t w + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) w &= R w - w^3 - (1 + \Delta)^2 w - \eta_1 \partial_y^4 w - 2\eta_2 \partial_x^2 \partial_y^2 w, \\ U_i &= \sum_j h_{ij} w \partial_i \partial_j^2 w - \partial_i p, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{U} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

を得る。[7] この時、コントロールパラメータ R を大きくすると、安定な周期パターンから欠陥カオスへ転移するパラメーター (h_{ij}, η_i) が存在する。例えば欠陥カオス領域でのパターンの変化が図3に示されている。このモデルについては安定性ダイアグラムの実験との対比や、[8] 欠陥カオス領域での統計的性質などが議論されている。[9] コントロールパラメーターを大きくするにつれて、欠陥の個数は増大していく。理論的な予想では欠陥の密度が R に比例する。[9] 実験ではこの法則に従って、複雑性をどんどん増していくが、ある領域から逆に規則的なパターン（格子パターン）が形成されるようになる。それに至る道筋は複雑であり、解明されていないことが多い。さらに電圧をあげると、格子パターンは振動を始める。

5. 現象2 (Phase Jump Lines)

振動格子は近似的に

$$u = A \cos(k_1 x + \phi_1) \cos(k_2 y + \phi_2) + B \sin(k_1 x + \phi_1) \sin(k_2 y + \phi_2) \cos(\omega t + \psi) \quad (7)$$

とあらわされる。(図4参照) この振動格子では、振動の位相 ψ と格子の歪み ϕ_i が結合して、自発的にペースメーカーをつくり位相波のターゲットパターンが生成される。ある条

件ではターゲットパターンは崩壊して大量のトポロジカル欠陥を生成する。やがてそれは対消滅して再びペースメーカーをつくり、... とある種の life cycle をもった生き物のように振る舞う。[10] この現象に関する理論的な研究も始まっている。[11]

ここでは振動格子に対して外力を加える場合を考える。[12] 即ち、外場の電圧を $V = V_0 \cos \omega_e t$ のように時間変化させるとき、 $\omega_e \simeq 2\omega$ または ω では、振動の位相 ψ が外場の位相にロックされる。この時でも、系は $(\phi_1, \phi_2, B) \rightarrow (\phi_1 + \pi, \phi_2 + \pi, -B)$ という変換に対する不変性 (Z_2 -対称性) を持っているので、この対称性の破れかたが空間的な非一様になると、 (ϕ_1, ϕ_2, B) の状態と $(\phi_1 + \pi, \phi_2 + \pi, -B)$ の状態をつなぐ界面ができる。この界面を横切ると位相 ϕ_i は π だけジャンプするので、この界面は位相とび線 (phase jump line) と呼ばれる。また、位相とび線は格子構造の位相特異点で端点を持つことが許される。[13] (図5参照)

格子構造の位相特異点はある種の渦だから、端点をもった位相とび線は「渦のくっついた界面」とみることができる。このようなトポロジカル欠陥は「混合型トポロジカル欠陥 (hybrid topological defect)」と呼ばれる新しいタイプのトポロジカル欠陥である。そこで、液晶対流系以外にもこのようなトポロジカル欠陥があらわれるのか? 更に、それはどのような条件であらわれるのか? が問題になる。結論だけ紹介すると、「対称性が2段階で破れる時、(e.g. $G \rightarrow L \rightarrow H$)、 $\Pi_1(G/L) \neq I, \Pi_0(L/H) \neq I$ ならば hybrid topological defect があらわれる。」ということが証明できる。[14]

次に位相とび線のダイナミクスを考える。実験では非常に多様なダイナミクスが観測されており、現在のところ、いくつかの簡単な運動について解釈がなされているだけである。理論的には、「もし系がポテンシャル系であれば、端点は一定速度でなくなる。」ということが証明されているのみである。[14] 一般の非ポテンシャル系については将来の課題である。

位相とび線の性質を議論するための第一歩として、位相とび線があらわれるもっとも簡単なモデルを与えることが必要である。その例として、波数 k と $2k$ をもった二つのモードの相互作用を記述する振幅方程式を考える。あるパターン u が

$$u = W_1 e^{ikx} + W_2 e^{2ikx} + c.c \quad (8)$$

とあらわせる時、複素振幅 W_1 と W_2 のダイナミクスは適当な条件のもとで、

$$\begin{aligned} \partial_t W_1 &= (r_1 - g_1 |W_1|^2 - g_3 |W_2|^2) W_1 + \alpha W_2 W_1^* + d_1 \Delta W_1, \\ \partial_t W_2 &= (r_2 - g_2 |W_2|^2 - g_4 |W_1|^2) W_2 + \beta W_1^2 + d_2 \Delta W_2. \end{aligned} \quad (9)$$

と求められる。ここで、全ての係数は実数である。実際にこの方程式を数値的に解くと、ランダムな状態からの秩序形成過程で位相とび線があらわれることがわかる。[13] (図6参照) 従って、このモデルあるいはその変形バージョンを考察することにより位相とび線のもつ色々な性質が明らかにされるだろう。

6. まとめと議論

非平衡系の特徴であるリズムやパターンの形成は時間・空間の対称性の破れとして捉える事ができ、その破れかたが空間的に非一様になる時、位相の自由度が重要になる。特に、トポロジカル欠陥はパターンやダイナミクスを特徴付ける上で重要な役割を果たす。液晶対流系を例にとり、位相特異点の個数がカオティックに変化する現象や界面に渦

がくつつく現象について説明した。トポロジーとダイナミクスが絡む現象はまだまだ多岐に渡り、それらを整理していくなかで、その本質的な側面が浮かび上がってくると期待される。

参考文献

1. P.G. de Gennes, *The Physics of Liquid Crystals*, (Clarendon, Oxford, England) 1974.
2. S. Kai and K. Hirakawa, *Prog.Theor.Phys.Suppl.* 64 (1978) 212.
3. S. Nasuno, Dr. thesis, Tohoku University, (1990) (in Japanese).
4. P. Couillet, L. Gill, and J. Lega, *Phys.Rev.Lett.* 62 (1989) 1619.
5. K. Kaneko, *PhysicaD*34 (1989) 1.
6. W. Pesch and L.Kramer, *Z.Phys.B*63 (1986) 121.
7. S. Sasa, *Prog.Theor.Phys.* 83 (1990) 824.
8. S. Nasuno and S. Kai, *Europhys.Lett.*14 (1991) 779.
9. S. Sasa, in *Physics of Pattern formation*, ed. S. Kai, (World Scientific, 1992).
10. M. Sano, K. Sato and B. Jانياud, in *Physics of Pattern formation*, ed. S. Kai, (World Scientific, 1992).
11. H. Sakaguchi, *Prog.Theor.Phys.* 87 (1992) 241.
12. K. Sato and M. Sano, (private communication).
13. S. Sasa, T. Mizuguchi and M. Sano, *Europhys.Lett.*19 (1992) 593.
14. S. Sasa, 'hybrid topological defect', to appear in *Phys.Rev. A*, (1992).

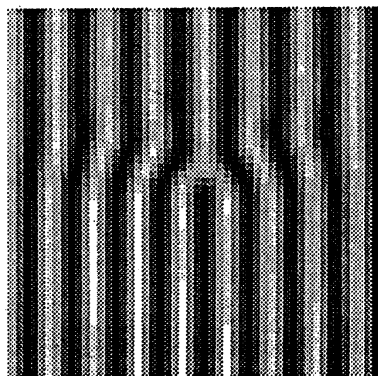


図1: ロール構造の位相特異点

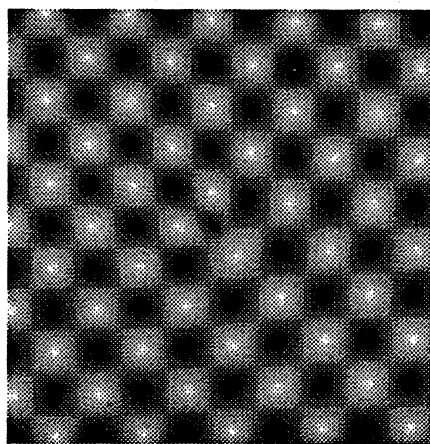


図2: グリッド構造の位相特異点

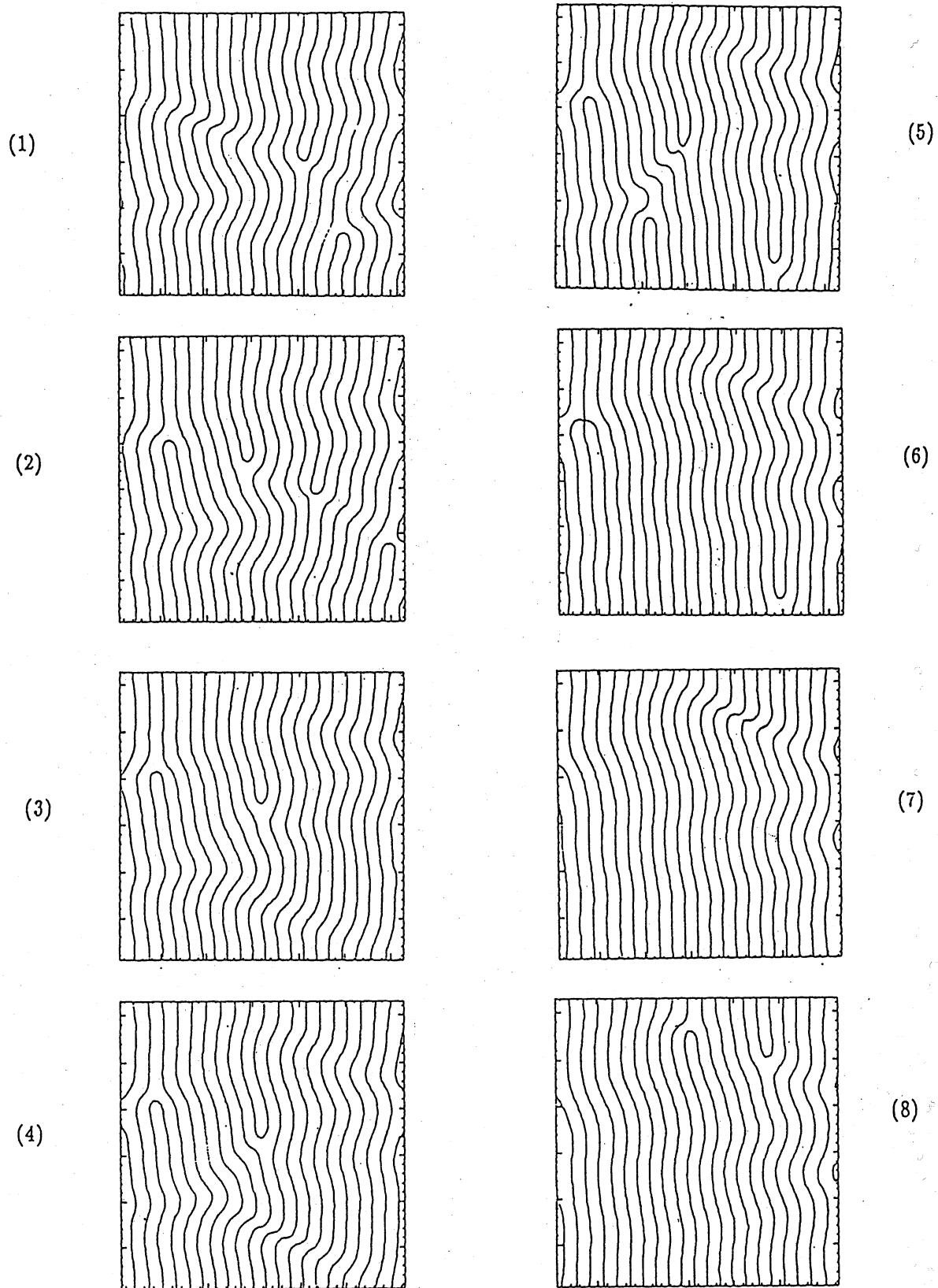


図3: 欠陥カオス状態でのパターンの時間発展 (1) → (8)

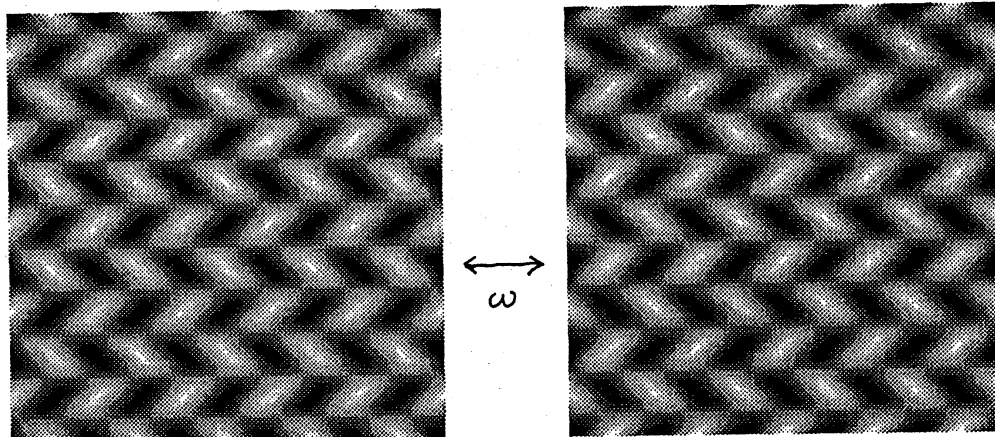


図4: 駆動格子の概念図

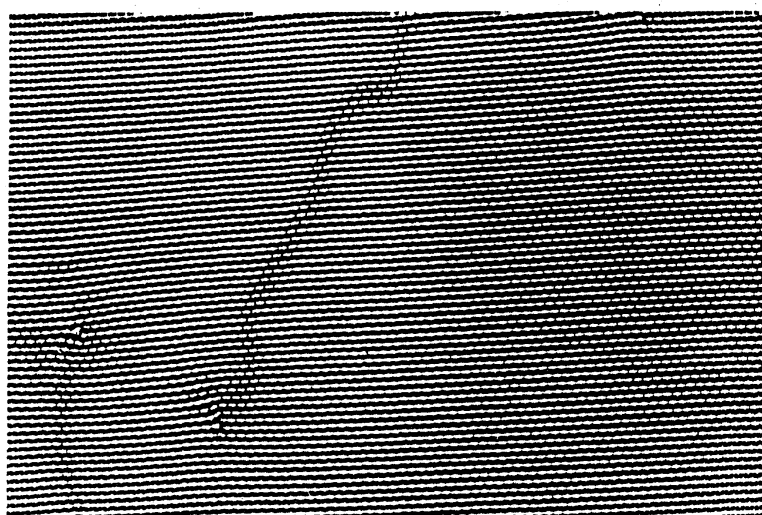


図5(a)

実際に観測される
phase jump lines.
(写真: 佐野博士)

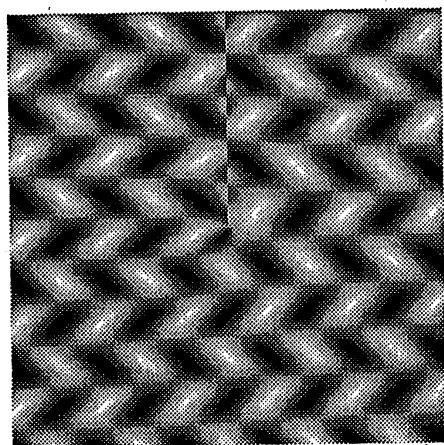


図5(b): 図5(a)の概念図

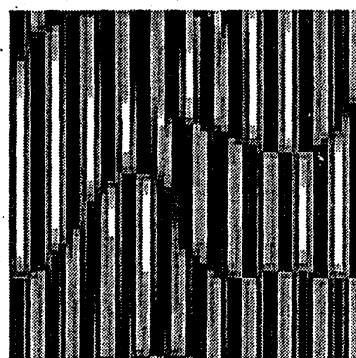


図6: 方程式(9)のsimulationで
見られる phase jump lines.