

p 進 L 関数と、正規整数環についての或る問題

横浜市大・理 市村 文男 (Humio Ichimura)

§ 1. 序文

K, G, L をそれぞれ有限次代数体, 有限群, K の G -拡大とします。Galois 理論で良く知られている様に、拡大 L/K は正規環を持ちます。つまり、 L を自然に群環 $K[G]$ 上の加群とみると、 L は自由で階数 1 となります。では、話を K, L の整数環 $\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_L$ に置き変えたらどうなるかという問題は、古典的な問題です:

L/K は正規整数環 (NIB) を持つか, i.e., $\mathcal{O}_L \simeq \mathcal{O}_K[G]$?

これについて、基礎体 K が有理数体 $\mathbb{Q}$ の場合、Fröhlich, Taylor によって満足すべき結果があります (Fröhlich [3] 参照)。

しかし、それ以外の場合には、余り良くは分っていない様です。

L/K が NIB を持つための明らかな必要条件は、

(*) K の素ideal $\mathfrak{p}$ で、 $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p[G]$

となる事です。ここで、 $\mathbb{Z}_p$ は、 K の $\mathfrak{p}$ での完備化の整数環で

す。Noetherにより、(*)が成り立つための必要十分条件は、 L/K ですべての $\mathfrak{p}$ が高々 tamely に分岐する事です。特に、 L/K が不分岐なら、(*)は成り立ちます。

この小文で扱うのは、次の問題(の特別な場合)です。

問題 K, G を与えられた有限次代数体, 有限 ab 群とする。 $H = H(K, G)$ を K の不分岐な G -拡大全体とし、 $N = N(K, G)$ をそのなかで NIB を持つもの全体とする。この時、 H と N の gap, つまり, 整数環の構造についての local-global gap は何か?

この問題について、 G が素数 p 次巡回群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, p: \text{素数}, a \geq 1)$ の場合が基本的です。 $a=1$ の時、次の補題が知られています。

補題 (Chalko [2]) K を代数体で 1 の原始 p 乗根を含むものとし、 $\lambda = \zeta - 1$ とおく。 p 次巡回拡大 L/K が、不分岐でかつ NIB を持つためには、 L が $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\lambda^p}$ なる K の単数 ε の p 乗根を追加して得られる事が、必要十分である。

この補題は、環の Galois 拡大の理論を用いて証明されましたが、関口とし、諏訪としの Kummer-Artin-Schreier の統一理論

の簡単な系としても得られる事を諏訪士んに教えて頂きました。

この補題と岩澤理論を用いて、 K がある虚abel体の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の名中間体を走る時、 $H(K, \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z})$ と $N(K, \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z})$ のgapとそのふるまいを、 p 進L関数(に付随する巾級数)を用いて記述するのが講演の内容です。これは、論文[4], [5]に基づくものです。

§2. 設定/記号

以下、 p を奇素数、 k を次の条件を満たす虚abel体とします：

(C1) k は1の原始 p 乗根を含む。

(C2) $\Delta = \text{Gal}(k/\mathbb{Q})$ のexponent = $p-1$ 。

(C3) p 上の k の素idealは、唯一つ。

k_∞/k を円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大、 k_m をその m 番目の中間体とします($m \geq 0$)。

$$\mathcal{E}_m := \{[\alpha] \in k_m^\times / k_m^{\times p} \mid k_m(\alpha^{1/p})/k_m \text{ は不分岐} \}$$

$$N_m := \{[\alpha] \in \mathcal{E}_m \mid k_m(\alpha^{1/p})/k_m \text{ はNIBを持つ} \}$$

とします。補題により、 N_m は $\mathcal{E}_m$ の部分群です。目標は、商群 $\mathcal{E}_m/N_m$ の構造を調べる事です。

補題により、 $\mathcal{E}_m/N_m = ?$ という問は、 k_m の単数群 E_m の p -adicなふるまいに関するものです。 E_m 自身は難かしい群ですが、

(Hasse の意味の) 円単数のなすその部分群 C_n は比較的よく分ります。一方、 k^+, k_n^+ を k, k_n の最大実部分体とすると、解析的類数公式により、 $h(k_n^+) = [E_n : C_n] \times \text{補正項 } \delta_n$ で、(C2) がまいて $p \nmid \delta_n$ です。そこで、 $h(\cdot)$ は類数のこととします。更に、(C2), (C3) がまいて、 $p \nmid h(k^+) \Leftrightarrow p \nmid h(k_n^+) \quad (\forall n \geq 0)$ です。

従って、我々の問題は、 $p \nmid h(k^+)$ が否かで、様子がかなり異なります。§3 で $p \nmid h(k^+)$ の場合、§4 で一般の場合を扱います。

Galois 群 $\Delta = \text{Gal}(k/\mathbb{Q})$, $\Gamma = \text{Gal}(k_\infty/k)$ は、 $k_n, N_n, k_n/N_n$ に自然に作用します。特に複素共役 ρ の作用で k_n 等は固有空間に分解されます。この時、 $N_n^- = \{1\}$ が知られている (Brinkhuis [1]) ので、考えるべきは、even part k_n^+/N_n^+ です。これを Δ の作用で更に細く分解して、各固有空間の Γ 加群としての構造を調べます。

ψ を Δ の ($\mathbb{Q}_p$ -値) の 1 次指標とし、 $e_\psi \in \mathbb{Q}_p[\Delta]$ をその巾等元とします。(C2) により、 ψ は $\mathbb{Q}_p$ -値で、 $e_\psi \in \mathbb{Z}_p[\Delta]$ です。(以下、 ψ を Δ の $\mathbb{Q}_p$ -指標とよびます。) $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ 加群 M (e.g., $M = k_n/N_n$) に対して、 $M(\psi)$ でその ψ -成分 $e_\psi M (M^{e_\psi})$ を表わします。

以下、 χ を固定した、偶なる Δ の $\mathbb{Q}_p$ -指標とします。 δ を χ の導手と p の最小公倍数とします。 Γ と $\text{Gal}(k(\mu_{p^\infty})/k(\mu_p))$ を自然に同一視し、 Γ の位相的生成元 γ を $\gamma^\delta = \gamma^{1+\delta}$, $\forall \gamma \in \mu_{p^\infty}$

となる様にとります。通常の様、完備群環 $\mathbb{Z}_p[[T]]$ と巾級数環 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ を $\gamma = 1+T$ で同一視します。従って、例えば、 $(\mathbb{Z}_n/\Lambda_n)(\chi)$ は Λ 上の加群とみなせます。

§3. p 外 $k(k^+)$ の場合

χ を固定した偶な $\mathbb{Q}_p$ -指標で、 $\chi \neq \chi_0$ (=自明な指標) なるものとする。 χ を自然に原始的 Dirichlet 指標とみなせば、 p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ が定まります。岩澤 [6] により、次の様な $\mathbb{Z}_p$ 係数の巾級数 $g_\chi(T)$ が構成されています:

$$g_\chi((1+T)^{1-\Delta} - 1) = L_p(s, \chi).$$

Λ の ideal $X_n (n \geq 0)$ を

$$X_n := \{g \in \Lambda \mid pg \in (g_\chi, \omega_n)\}$$

で定めます。ここで、 $\omega_n = (1+T)^{p^n} - 1$ 。更に、 $\Lambda_m (m \geq 1)$ を $p^m, p^{m-1}\gamma, p^j (0 \leq j \leq m-1)$ で生成された Λ の ideal とし、 $\Lambda_0 = \Lambda$ とします。 Λ 加群 $Y_n (n \geq 0)$ を

$$Y_n := X_n / (X_n \cap \Lambda_m, g_\chi, \omega_n)$$

で定めます。この時、

定理 1 k を (C1) ~ (C3) を満たす虚 algebra 体で、 p 外 $k(k^+)$ なるものとする。 χ を Λ の偶な $\mathbb{Q}_p$ -指標で、 $\neq \chi_0$ なるものとする。この時、次の二つの事が成り立つ:

(I) Λ 加群としての同型 $L_m: (\mathcal{K}_m/\mathcal{N}_m)(X) \cong Y_m$ が存在して、

(II) 次の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccccc}
 \{\alpha\}_{m+1} \in (\mathcal{K}_{m+1}/\mathcal{N}_{m+1})(X) & \xrightarrow{L_{m+1}} & Y_{m+1} & \rightarrow & \left[g \cdot \sum_{j=0}^{p-1} (1+T)^{p \cdot j} \right] \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \{\alpha\}_m \in (\mathcal{K}_m/\mathcal{N}_m)(X) & \xrightarrow{L_m} & Y_m & \rightarrow & [g]_m
 \end{array}$$

ここで、 $\{\alpha\}_m$ は、 $\mathcal{K}_m$ の元 α の代表する $\mathcal{K}_m/\mathcal{N}_m$ の元、 $[g]_m$ は $g(\in X_m)$ の代表する Y_m の元である。

系 上の設定で、 $\text{map } Y_m \rightarrow Y_{m+1}$ は 0 -map である。従って、(下の注より、) $\forall m \geq 0, \forall p$ -次不分岐巡回拡大 L/K_m に対して、 L/K_{m+1} は NIB を持つ。

注 (1) 自明な指標 χ_0 に対しては、 $\mathcal{K}_m(\chi_0) = \mathcal{N}_m(\chi_0) = \{1\}$ である。これは、 p 中分体の Stickelberger の定理から従う。

(2) 条件 $p \nmid h(k^+)$ があって、 $\mathcal{K}_m^- = \{1\}$ である。

$\mathcal{K}_m$ の $\mathbb{F}_p$ 上の次元は、 $m \rightarrow \infty$ の時、有界 (Ferrero-Washington) なので、上の事から、

定理 2 $k: (C1) \sim (C3)$ をみたすとする。この時、

$$p \nmid h(k^+) \Rightarrow \mathcal{K}_m(X) = \mathcal{N}_m(X), \forall m \gg 0, \forall \text{ 偶数 } \mathbb{Q}_p \text{ 指標 } \chi$$

§4. 一般の場合

先ず、我々の問題と“Greenberg予想”との関連を述べます。
 A_m を k_m の ideal 類群の p -part, $A_\infty = \varprojlim A_m$ を m norm に関する射影極限とします。 $A_\infty(\psi)$ ($\psi: \Delta$ の $\mathbb{Q}_p$ -指標) は、§2 で述べた仕方で、 Λ 加群とみなせます。岩澤により、 $A_\infty(\psi)$ は有限生成 torsion Λ 加群です。一般に有限生成 torsion Λ 加群 M に対して、kernel, cokernel 有限の Λ -hom

$$M \rightarrow \bigoplus_i \Lambda/(p^{\mu_i}) \oplus \bigoplus_j \Lambda/(f_j)$$

が存在します。ここで、 $\mu_i \geq 0$, f_j : distinguished な多項式。
 M の岩澤不変量 $\lambda(M), \mu(M)$ は、

$$\lambda(M) = \sum_j \deg f_j, \quad \mu(M) = \sum_i \mu_i$$

で定めます。 $\lambda(A_\infty(\psi)), \mu(A_\infty(\psi))$ を λ_ψ, μ_ψ と略記します。

Ferrero-Washington より、 $\mu_\psi = 0$ です。

χ を §3 で固定した偶な $\mathbb{Q}_p$ -指標とします。巾級数 $g_\chi(T)$ の λ -不変量を λ_χ^* とおきます。定義から、 λ_χ^* は、 g_χ の係数が p と素な最初の項の次数です。 χ に対応する奇指標 $\omega\chi^{-1}$ を χ^+ とおきます。ここで、 $\omega: (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ は Teichmüller 指標です。

岩澤主予想により、 $\lambda_{\chi^+} = \lambda_\chi^*$ がわかっています。 λ_χ については、あまり良く分かっていないのですが、 $\lambda_\chi = 0$ と予想(期待)されています (Greenberg 予想)。

定理 3 $\ell_m(X) = N_m(X), \forall m \geq 0 \Rightarrow \lambda_X = 0$

$\rho(\mathcal{L}^+)$ から $\lambda_X = 0$ とある事が知られているので、定理 3 は定理 2 の弱い形の逆になっています。

次に、 $\ell_m(X) = N_m(X), \forall m \geq 0$ とあるための必要十分条件を調べます。Kummer duality より、

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \ell_m(X) = \dim_{\mathbb{F}_p} A_m(X^*) / A_m(X^*)^p, \forall m \geq 0.$$

一方、 λ_X^* の定義と、 $\lambda_X^* = \lambda_X^*$ を主な根拠として、

$$(*) \dim_{\mathbb{F}_p} A_m(X^*) / A_m(X^*)^p \leq \lambda_X^*, \forall m \geq 0, \text{ 更に } \forall m \geq 0 \text{ で等号成立.}$$

従って、 $\lambda_X^* = 1$ の場合が考えるべき最初の場合です。この時、

$$(**) \text{ に於て } \forall m \geq 0 \text{ で等号が成立します。} \therefore \dim_{\mathbb{F}_p} \ell_m(X) = 1, \forall m \geq 0.$$

定理 4 $\mathcal{L}: (C1) \sim (C3)$ をみたし、 $\lambda_X^* = 1$ とする。この時、

$$\ell_m(X) = N_m(X), \forall m \geq 0 \Leftrightarrow \ell_0(X) = N_0(X)$$

最後に、 $\ell_0(X) = N_0(X)$ とある条件を述べます。

定理 5 $\mathcal{L}: (C1) \sim (C3)$ をみたす。 $(\lambda_X^* = 1 \text{ は仮定しない})$

$$\dim_{\mathbb{F}_p} N_0(X) \leq 1 \text{ で、等号成立} \Leftrightarrow L_p(1, X) / {}^*A_0(X) \equiv 0 \pmod{p}.$$

注) $\mathcal{L} = \textcircled{1}(4_p)$ の時、これは Taylor [9] において得られている。

定理3, 4, 5 から、

系 $k: (C1) \sim (C3)$ をみたし、 $\lambda_X^* = 1$ とする。この時、

$$L_p(1, X) / \#A_0(X) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow \lambda_X = 0.$$

注) この主張は、Krafft [7], 尾崎・田谷 [8] により、全く別の視点から、すでに得られている。

[1] J. Brinkhuis : On the Galois module structure over CM-fields, Manuscr. Math., 75 (1992), 333-347

[2] L.N. Childs : The group of unramified Kummer extensions of prime degree, Proc. London Math. Soc., 35 (1977), 407-422

[3] A. Fröhlich : Galois module structure of algebraic integers, Springer-Verlag, 1983

[4] H. Ichimura : On p -adic L -functions and normal basis of rings of integers, J. reine angew. Math., 462 (1995), 169-184

[5] H. Ichimura : On a normal integral basis problem over cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -extensions, to appear in J. Math. Soc. Japan

[6] K. Iwasawa : Lectures on p -adic L -functions, Princeton Univ. Press, 1972

- [17] J.S. Kraft : Iwasawa invariants of CM fields, J. Number Theory, 32 (1989), 65-77
- [18] M. Ozaki and H. Taya : A note on Greenberg's conjecture for real abelian number fields, Manuscr. Math., 88 (1995), 311-320
- [19] M.J. Taylor : The Galois module structure of certain arithmetic principal homogeneous spaces, J. Alg., 153 (1992), 203-214