

2次元単体複体に対する Cartan の定理の analogy

東大理 大川哲介

定義 C_n を中味を含まない n 辺形の cone とする. C_n ($n \leq 5$) を曲率正の cone, C_6 を曲率 0 の cone, C_n ($n \geq 7$) を曲率負の cone と呼ぶ.

定理 単体複体 K が曲率正の cone を含まぬならば $\pi_n(|K|) = 0$ ($n \geq 2$) となる.

注意 C_3 を含まぬことより, 必然的に $\dim K \leq 2$ となる.

lemma 1 S^2 の単体分割は曲率正の cone を含む.

証明 $|K| = S^2$, K に於いて辺が n 個集まっている頂点の総数を a_n , 辺, 面の総数を b_n, c_n とすると

$$b = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} n a_n, \quad c = \frac{1}{3} \sum_{n=3}^{\infty} n a_n$$

となり, Euler 数を計算すると,

$$\sum a_n - \frac{1}{2} \sum n a_n + \frac{1}{3} \sum n a_n = \sum \frac{(6-n)}{6} a_n$$

/

となるが, $a_3 = a_4 = a_5 = 0$ とすると Euler 数 ≤ 0 となり矛盾である.

lemma 2 K を $\pi_2(K) \neq 0$ なる単体複体とするとき, S^2 の適当な単体分割 L に関する単体写像 $f: L \rightarrow K$ で

i) $f \neq 0$

ii) f は L の頂点を除いて immersion となる

ものが存在する.

証明 単体近似定理により S^2 の適当な単体分割 L と単体写像 $f: L \rightarrow K$ で $f \neq 0$ なるものが取れる. f が ii) を満たさぬとき, 次なる reduction を行なう.

Case 1 退化する辺がある場合.

その辺を a , a の両端点を A, B , $\text{link } a = \{C, D\}$ とする.

Case 1.1 $\{A, C, D\}$ もしくは $\{B, C, D\}$ がある 2 単体の 3 頂点となっている場合. $\{A, C, D\}$ が 2 単体 α の 3 頂点になっていたとする. さらに $\{B, C, D\}$ が 2 単体の 3 頂点になっていたとすると $f \equiv 0$ となり仮定に反するから, そうでないとする. L から A, BC, ABD, α を取り除き, 1 個の 2 単体をはめ込んで $L' (|L'| \approx S^2)$ を作り, f を $f': L' \rightarrow K$ へ reduction して, $f' \neq 0$ と出来る.

Case 1.2 $\{A, C, D\}, \{B, C, D\}$ が 2 単体の 3 頂点になっておらず, 頂点 $E \in L$ で, EA, EB が L の辺になっており,

$\{A, B, E\}$ が 2 単体の 3 頂点とならないものが存在すること、
 L から 2 面形 ABE を取り除いて 2 つに分け、各々に 2 単体
をはめ込んで L_1, L_2 ($|L_1| \approx |L_2| \approx S^2$) とする。 f を $f_1 + f_2$ とし、
 $L_i \rightarrow K$ に reduce すると $f \approx f_1 + f_2$ だから f_1, f_2 のうち少なくとも一方は $f_i \neq 0$ と出来る。

Case 1.3 case 1.2 のような頂点 E がない場合、この時退化する辺 a を単体複体として一点に縮めればやはり単体複体 L' を得るから、 f を $f' : L' \rightarrow K$ に reduce すれば $f' \neq 0$ となる。

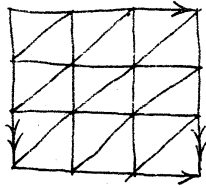
Case 2 辺 $a \in L$ で、 $f(\text{link } a) = \{\text{one pt.}\}$ となるものが存在する場合、 a の両端点を A, B , $\text{link } a = \{C, D\}$ とし、 L から ABC, ABD を取り除いて $\{C, D\}$ を一点に縮めるのであるが、縮めたものが単体複体とならぬ場合も、Case 1 と同様の reduction を行うことが出来る。以上より、 $f : L' \rightarrow K$ で、 $f \neq 0$ かつ退化する辺も $f(\text{link } a) = \{\text{one pt.}\}$ なる辺 a も含まぬものが得られたが、これが lemma の条件を満たすものであることは容易に分る。

定理の証明 定理の statement に現れる K について、 $\pi_2(K) = 0$ を示せば良い。($\tilde{K}$ について J.H.C. Whitehead の定理を使う。) もし $\pi_2(K) \neq 0$ とすると lemma 2 の条件を満たす $f : L \rightarrow K$ があるが、lemma 1 より S^2 の単体分割 L は西率正の cone C を含む。仮定により $f|_C$ は embedding であり得ぬ

が, そうすると f は C に属するある辺 a に対して $f(a) = pt.$ の $f(link\ a) = pt.$ とならざるを得ぬが, 仮定と矛盾する.

(証明終り)

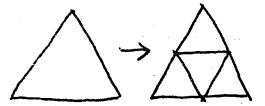
Ex.1 閉曲面 T^2 の場合, 左図の様に細分すれば cone は全



て曲率 0 となる. これに diamond 細分を施してから 2 単体をくりぬいて連結和すればやはり各 cone は曲率 ≤ 0 となる. 向付け不

能の場合も同様の考察で出来る.

注意 曲率正の cone を含まぬ単体複体は
その条件を満たしながらいくらかでも細く細
分出来る. diamond 細分 (図) を取れば良い,



Ex.2 torus knots の complement の spine.

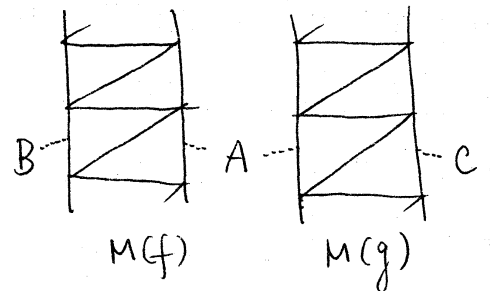
A, B, C を am, an, an 辺形 ($a \geq 3, m, n \neq 0$)

$f: A \rightarrow B, g: A \rightarrow C$ を n, m -sheeted の covering map;

$K = M(f) \cup_A M(g)$ とする. But mapping cylinders $M(f),$

$M(g)$ は次の様に分割する.

K は torus knot の complement
の spine であり, 曲率正の cone
を含まぬ. torus link の場
合も同様の考察で得られる.



Ex. 3 $G = \{x_i \mid i \in I, (x_i^{p_{ij}}, x_j^{g_{ij}}) = 1\}$ 群,

$p_{ij}, g_{ij} \geq 0$, $p_{ii} = g_{ii} = 0$ とし, さらに $p_{ij} > 0$ なら $p_{ji} = 0$ とする. ここで I を頂点集合とし $(i, j) \in I^2$ に対し,

$p_{ij}, g_{ij} > 0$ のときのみ辺で結ばれるとして, グラフ G を作る. G が 3, 4, 5 辺形を含まぬならば $K(G, 1)$ は高々 2 次元に取れる.

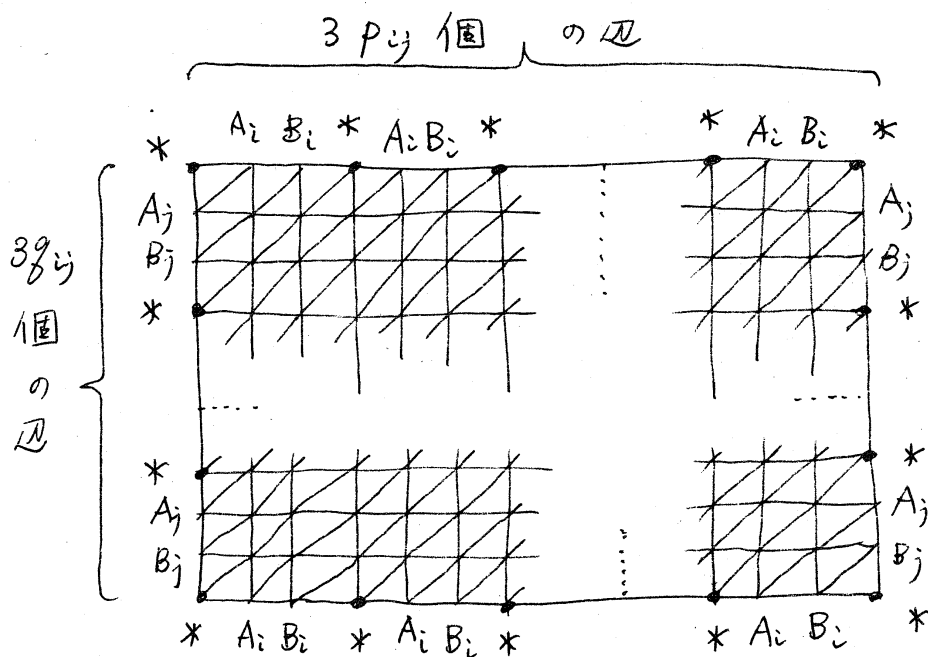
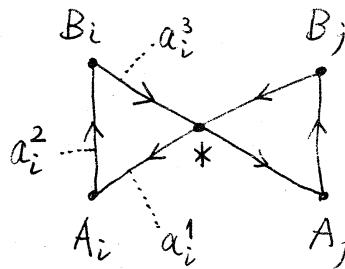
証明 complex K を,

$$K^0 = \{*\} \cup \{A_i \mid i \in I\} \cup \{B_j \mid j \in I\}$$

$$K^1 = K^0 \cup \{a_i^j \mid i \in I, j = 1, 2, 3\}$$

$$\partial a_i^1 = A_i - *, \quad \partial a_i^2 = B_i - A_i.$$

$\partial a_i^3 = * - B_i$ とし, さらに 2-cells を次の如く貼りつける.



こうして出来た complex を K とする. A_i, B_j は曲率正の

coneの中心になり得ぬから, *のlinkが3, 4, 5辺形を含まぬことを云えば良いが, $G'' = \text{link } *$ とすると, A_i と A_j , B_i と B_j ($i, j \in G'$) は (i, j) が G' の辺で結ばれている時のみ結ばれていて, A_i と B_j は (i, j) が G' の辺となる時のみ, 一つの頂点を経由して辺で結ばれており, 他に G'' の辺はない. G' に関する仮定より G'' は3, 4, 5辺形を含まぬ. 故に定理より $K = K(G, 1)$ となる. (証明終り) ここで,

$$G' = \text{[diagram of three hexagons joined in a chain]} \cdots \text{[diagram of two hexagons joined]} \quad (n \text{ 個の亀甲})$$

とすれば, $H_1(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{4n+2}$, $H_2(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{5n+1}$, $\chi(K) = n$ となり, 曲率 ≤ 0 の 2-dim complex でも, Euler 数はいくらでも大きくなることが分る.