

無限階微分可能関数族における Hilbert の第 13 問題

東京理科大学大学院理工学研究科情報科学専攻 児玉賢史 (Satoshi Kodama)

東京理科大学大学院理工学研究科情報科学専攻 明石重男 (Shigeo Akashi)

Department of Information Sciences, Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

1 序論

Vituskin は、「任意の自然数 n に対して、 $[0, 1]^3$ 上で定義された n 階微分可能な 3 変数関数族を、 $[0, 1]^2$ 上で定義された n 階微分可能な 3 変数関数族を用いて重ね合わせ表現した場合に、強表現不可能性が成り立つこと」を示した。ここで、彼の用いた証明法は、Baire のカテゴリー定理に基づくものであり、そのため、「3 変数 n 階微分可能な関数の全体を実数の集合に対応させるならば、2 変数 n 階微分可能な関数を用いて、重ね合わせで表現できる 3 変数関数の集合は、有理数の集合に対応する」というような結果であった。この結果は、有限階微分可能性に関しては、重ね合わせで表現できない 3 変数関数の方が、重ね合わせで表現できる 3 変数関数の全体に比べて、圧倒的に多く存在することを示しているが、重ね合わせで表現できない 3 変数関数の具体的な例については、未だに知られていない。そこで、本稿では、「 $(0, 1)^3$ 上で定義された無限階微分可能な 3 変数関数族を、 $(0, 1)^2$ 上で定義された無限階微分可能な 3 変数関数族を用いて重ね合わせ表現した場合に、強表現不可能性が成り立つ」こと、すなわち「 $(0, 1)^3$ 上で定義された無限階微分可能な 3 変数関数で、任意有限回の重ね合わせで表現できないものが存在する」ことを示す。これは、Hilbert の第 13 問題の「連続性」を「無限階微分可能性」に置き換えることにより得られる派生問題の一つであるが、「解析性」の場合と同様に、未解決の問題とされていたものである。ここでは、強表現不可能性を保証する関数の具体例を示しているが、Vituskin が用いたような位相解析的手法を用いている訳ではない。したがって、「無限階微分可能」な場合に関して、「重ねあわせで表現できる関数の全体」と「重ね合わせで表現できない関数の全体」との比率に関しては、未知のままである。

2 Hilbert の第 13 問題の分類

Hilbert の第 13 問題は、重ね合わせ表現可能性と不可能性を問うものであるが、表現可能性の対象となっているものが、「関数」ではなく「関数族」の場合には、さらに細かく分類することが可能である。より正確に述べるならば、性質 P を満たす 3 変数関数族の要素を、同じ性質 P を満たす 2 変数関数族の複数個の要素を用いて合成表現する場合について、表現可能性と表現不可能性の 2 種類に大別される。さらに「表現可能性」と「表現不可能性」のそれぞれにつ

いて、強表現と弱表現の2種類に分類される。具体的には以下のとおりである。

1. 表現可能性

1-1. 強表現可能性

n をある自然数とする。性質 P を満たす任意の3変数関数が、 $2^{n+1} - 1$ 個の2変数関数を用いて、高々 n 回の合成で表現されるとき、その性質 P は、強表現可能性を満たすという。

1-2. 弱表現可能性

性質 P を満たす任意の3変数関数 $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ に対して、 $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ に依存して定まるある適当な自然数 n_f が存在して、 $2^{n_f+1} - 1$ 個の2変数関数を用いて、 n_f 回の合成で表現されるとき、その性質 P は、弱表現不可能性を満たすという。

2. 表現不可能性

2-1. 強表現不可能性

性質 P を満たす3変数関数 $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ が、任意有限回の合成で表現できない場合、その性質 P は、強表現不可能性を満たすという。

2-2. 弱表現不可能性

任意の自然数 n に対して、 n 回の合成で表現できないような、性質 P を満たす3変数関数 $f_n(\cdot, \cdot, \cdot)$ が存在するとき、その性質 P は、弱表現不可能性を満たすという。

上記に示された4個の定義に関して、以下のような相関関係が成立する。

「性質 P が強表現可能性を満たす」ならば、「性質 P は弱表現可能性を満たす」。また、「性質 P が強表現不可能性を満たす」ならば、「性質 P は弱表現不可能性を満たす」。さらに、「性質 P が強表現可能性を満たさない」ということは、「性質 P が弱表現不可能性を満たす」ということと同値である。また、「性質 P が強表現不可能性を満たさない」ということは、「性質 P が弱表現可能性を満たす」ということと同値である。

3 無限階微分可能性の強表現不可能性

無限階微分可能性に対しても、有限階微分可能性に関する Vituskin の定理と同様に、強表現不可能性が成立する。

定理 1.

$(0, 1)^3$ 上で定義された無限階微分可能3変数関数族の中で、 $(0, 1)^2$ 上で定義された無限階微分可能3変数関数族の要素をどのように用いても、任意有限回の重ね合わせで表現できないようなものが存在する。

証明.

ϕ を以下の式で定義される関数とする。

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} \right], & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

このとき、 ϕ が無限階微分可能であることは明らか。さらに、任意の自然数 n に対して、 p_n および q_n を、それぞれ以下の式で定義される 1 次関数とする。

$$p_n(x) = (1-x) \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) + x \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

$$q_n(x) = p_n^{-1}(x),$$

任意の自然数 n に対して、 $(0,1)^2$ 上で定義され、高々 n 回の重ね合わせで表現できない 3 変数多項式 h_n が存在することは、Taylor 展開を用いて証明できることが知られている。したがって、以下の式で定義される 3 変数関数 $g(\cdot, \cdot, \cdot)$:

$$g(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(q_n(x), q_n(y), q_n(z)) \phi(q_n(x)) \phi(q_n(y)) \phi(q_n(z)),$$

$$0 < x, y, z < 1.$$

が、任意有限回の重ね合わせで表現できないことを示せば十分である。そこで背理法を用いる。

今ある自然数 k が存在して、 g が k 回の重ね合わせで表現できたと仮定する。一方、任意の自然数 n に関して、 h_n は、以下の式で特徴づけられることに注意する：

$$h_n(x, y, z) = \frac{g(p_n(x), p_n(y), p_n(z))}{\phi(x)\phi(y)\phi(z)}, \quad 0 < x, y, z < 1.$$

しかしながら、上式は、任意の自然数 n に対して、3 変数多項式 h_n が、 $(0,1)^2$ 上で定義された無限階微分可能 2 変数関数の $k+2$ 回の重ね合わせで表現できることを意味する。よって矛盾を生じる。従って『無限階微分可能族は強表現不可能性』であることが示された。□

註 1. Hilbert の第 13 問題の微分可能性版に関して、「関数の定義域が閉区間である場合と开区間である場合」ならびに「有限階微分可能性の場合と無限階微分可能性の場合」とで、証明の方針が異なる可能性があると思われる。

例えば、閉区間 $[0,1]$ で無限階微分可能な関数は、すべて有界であるが、閉区間 $(0,1)$ で無限階微分可能な関数が、すべて有界であるとは限らない。具体例として、 $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ という関数を挙げることができる。そして、同様のことが $[0,1]^3$ と $(0,1)^3$ の場合についても成立するため、Hilbert の第 13 問題の微分可能性版に関しては、閉区間の場合と开区間の場合とで、全く別の問題として考察した方が良いかもしれない。参考までに、現在まで知られている結果をまとめると、次のようになる。

- 場合 1. 閉区間 $[0, 1]^3$ における有限階微分可能性の場合
 Vituskin により証明済みである。しかし、Vituskin の結果を保証する関数の具体例は知られていない。
- 場合 2. 開区間 $(0, 1)^3$ における有限階微分可能性の場合
 未解決
- 場合 3. 閉区間 $[0, 1]^3$ における無限階微分可能性の場合
 未解決
- 場合 4. 開区間 $(0, 1)^3$ における無限階微分可能性の場合
 Akashi-Kodama による具体例。ただし、Vituskin が示したように、重ね合わせ表現可能な関数の集合と、重ね合わせ表現不可能な関数の集合の割合を示すような結果は得られていない。

註 2. 場合 4 の証明のために、今回構成した無限階微分可能 3 変数関数を用いて、場合 3 を解決する例を構成できる可能性があるように思われる。この場合、場合 4 で示した関数の定義域を、 $(0, 1)^3$ から $[0, 1]^3$ まで、全微分可能性を保存したまま拡張しなければならない。そのような拡張が可能か否かについては、簡単に判断することができず、ここにも閉区間と開区間の相違点がもたらす困難さを見ることができる。

謝辞

本研究に関して、東京理科大学まで御来校頂き、有益なアドバイスを頂きました東京工業大学名誉教授の高橋渉先生にこの場を借りて感謝の念を申し述べます。また、本共同研究集会において、発表の場を与えて下さいました新潟大学の田中環先生に御礼申し上げます。

参考文献

- [1] S. Akashi, A version of Hilbert's 13th problem for analytic functions, The Bulletin of the London Mathematical Society, 35(2003), 8-14.
- [2] S. Akashi, A version of Hilbert's 13th problem for entire functions, Taiwanese J. Math. 12 (2008), 1335-1345.
- [3] G. G. Lorentz, Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

- [4] A. G. Vitushkin, Some properties of linear superpositions of smooth functions, Dokl., 156(1964), 1003-1006.
- [5] S. Kodama, A version of Kolmogorov-Arnold representation theorem for differentiable functions of several variables, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization, 2(2011), No. 2, 16-20.