

Cuntz 環の表現とウェーブレット

千葉大学自然科学研究科 加藤 雅彦 (Masahiko KATO)

Graduate School of Science and Technology

Chiba University

Bratteli-Jorgensen の研究 [BJ97a, BJ97b, BJ02] によって, 直交ウェーブレットと Cuntz 環 [Cun77] の表現との関係が知られている. 講演では Palle E. T. Jorgensen の論文 Measures in wavelet decompositions [Jor05] の紹介と彼らの研究のフレームレットへの拡張について報告したが, 本稿では講演の前半部分は省略し, フレームレットへの拡張に関する部分のみを取り上げる. 直交ウェーブレットとは直交基底を生成する関数族のことであるが, フレームレットとは, これをフレームを生成する関数族へと拡張したものである. はじめに, フレームレットを構成するために必要な定理を示し, 次に Ron-Shen のフレームレット [RS97] がこの定理の条件を満たすことを示す. 最後にフレームレットと Cuntz 環の表現との関係について述べる.

1 フレームレット

関数族 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq L^2(\mathbb{R})$ がタイトフレーム [Chr03] であるとは, ある定数 $C \geq 0$ が存在して, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f_i, f \rangle|^2 = C \|f\|^2$$

となるときをいう. 特に $C = 1$ のとき正規タイトフレームといい, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i, f \rangle f_i$$

が成立することと同値になる. 直交ウェーブレットの場合と同様に, $L^2(\mathbb{R})$ の関数に対するスケール変換と平行移動を

$$(Uf)(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} f\left(\frac{x}{N}\right) \quad \text{for } f \in L^2(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$$

$$(T^k f)(x) = f(x - k) \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}, f \in L^2(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$$

と定義する. ここで N は 2 以上の自然数とする. また, r を N 以上の自然数とする. $L^2(\mathbb{R})$ の関数族 $\{\psi_i\}_{i=1, \dots, r-1}$ がフレームレットであるとは $\{U^j T^k \psi_i\}_{i=1, \dots, r-1}^{j, k \in \mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ のタイトフレームをなすときをいう. フレームレットの具体例は次節で紹介する.

定理 1.1. N を 2 以上の自然数, r を N 以上の自然数とする. 関数族 $\{m_i\}_{i=0}^{r-1} \subset L^2(\mathbb{T})$ が以下の条件を満たすと仮定する:

- (i) $m_0(1) = \sqrt{N}$,

(ii) $\hat{\varphi}(t) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{m_0(e^{-itN^{-k}})}{\sqrt{N}}$ が $\mathbb{R}$ 上の 2 乗可積分関数として定義できる,

(iii) $\lim_{t \rightarrow 0} \hat{\varphi}(t) = 1$,

(iv) $\text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)(t) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(t + 2\pi l)|^2 \in L^\infty(\mathbb{R})$,

(v) $L^2(\mathbb{T})$ 上の線形作用素として $(S_i \xi)(z) := m_i(z) \xi(z^N)$ を定義するとき, $\{S_i\}_{i=0}^{r-1}$ が

$$\sum_{i=0}^{r-1} S_i S_i^* = I$$

を満たす,

(vi) $S_0^{*l} \xrightarrow{\text{SOT}} 0 \ (l \rightarrow \infty)$.

このとき

$$\hat{\psi}_i(t) := \frac{1}{\sqrt{N}} m_i(e^{-it/N}) \hat{\varphi}\left(\frac{t}{N}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \ i = 1, \dots, r-1$$

と定義すると, $\{\psi_i\}_{i=1}^{r-1}$ は $L^2(\mathbb{R})$ のフレームレットとなる. すなわち, ある定数 C が存在して, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle U^n T^k \psi_i, f \rangle|^2 = C \|f\|^2$$

が成立する.

証明. V_0 を φ の平行移動とその線形結合によって張られる $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間とする. まず, 任意の $f \in V_0$ に対し

$$\langle U^n T^k \psi_i, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle e_k, S_i^* S_0^{*n-1} \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\hat{\varphi}|^2) \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$$

であることを示す. ここで $e_k(z) := z^k$ および, $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varphi(t-k)$ に対して $\mathcal{F}_\varphi(f)(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k z^k$ としている. また, $\text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)$ は 2π 周期関数であるから, 同じ記号で $\mathbb{T}$ 上の関数として扱うことにする.

$$\begin{aligned} \widehat{U^n T^k \psi_i}(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} U^n T^k \psi_i(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{1}{\sqrt{N}^n} \psi_i\left(\frac{x}{N^n} - k\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it(N^n(y-k))} \frac{N^n}{\sqrt{N}^n} \psi_i(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itN^n y} \sqrt{N}^n \psi_i(y) e^{-itN^n k} dy \\ &= \sqrt{N}^n \widehat{\psi_i}(tN^n) e^{-itN^n k} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \langle U^n T^k \psi_i, f \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{U^n T^k \psi_i}(t) \hat{f}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{N}^n \widehat{\psi_i}(tN^n) e^{-itN^n k} \mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it}) \hat{\varphi}(t) dt. \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
 \widehat{\psi}_i(tN^n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} m_i(e^{-itN^{n-1}}) \widehat{\varphi}(tN^{n-1}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} m_i(e^{-itN^{n-1}}) \frac{1}{\sqrt{N}} m_0(e^{-itN^{n-2}}) \widehat{\varphi}(tN^{n-2}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} m_i(e^{-itN^{n-1}}) \frac{1}{\sqrt{N}^{n-1}} \prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j}) \widehat{\varphi}(t) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}^n} m_i(e^{-itN^{n-1}}) \prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j}) \widehat{\varphi}(t)
 \end{aligned}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
 \langle U^n T^k \psi_i, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} m_i(e^{-itN^{n-1}}) \prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j}) \widehat{\varphi}(t) e^{-itN^n k} \mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it}) \widehat{\varphi}(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} m_i(e^{-itN^{n-1}}) \prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j}) e^{-itN^n k} \mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it}) |\widehat{\varphi}(t)|^2 dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m_i(e^{-itN^{n-1}}) \prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j}) e^{-itN^n k} \mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it}) \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(t + 2l\pi)|^2 dt \\
 &= \langle S_0^{n-1} S_i e_k, \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \\
 &= \langle e_k, S_i^* S_0^{*n-1} \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2) \rangle_{L^2(\mathbb{T})}
 \end{aligned}$$

となる. よって $f \in V_0$ に対して

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n=1}^l \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle U^n T^k \psi_i, f \rangle|^2 &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n=1}^l \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle e_k, S_i^* S_0^{*n-1} \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2) \rangle|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n=1}^l \|S_i^* S_0^{*n-1} \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2)\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n=1}^l \langle S_i^* S_0^{*n-1} \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2), S_i^* S_0^{*n-1} \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2) \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n=1}^l \langle \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2), S_0^{(n-1)} S_i S_i^* S_0^{*(n-1)} \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2) \rangle \\
 &= \sum_{n=1}^l \langle \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2), S_0^{(n-1)} (1 - S_0 S_0^*) S_0^{*(n-1)} \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2) \rangle \\
 &= \sum_{n=1}^l \langle \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2), (S_0^{(n-1)} S_0^{*(n-1)} - S_0^n S_0^{*n}) \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2) \rangle \\
 &= \langle \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2), (1 - S_0^l S_0^{*l}) \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2) \rangle \\
 &= \|\mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2)\|^2 - \|S_0^{*l} \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2)\|^2.
 \end{aligned}$$

条件 (vi) から

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|S_0^{*l} \mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\widehat{\varphi}|^2)\| = 0$$

であるから,

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle U^n T^k \psi_i, f \rangle|^2 = \|\mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\|^2$$

を得る. この右辺は

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= \|\mathcal{F}_\varphi(f) \text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2} \text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ &= \int_{\mathbb{T}} |\mathcal{F}_\varphi(f)|^2 |\text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}|^2 \text{PER}(|\hat{\varphi}|^2) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it}) \text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}(t)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(t + 2\pi l)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it}) \text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}(t)|^2 |\hat{\varphi}(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it}) \hat{\varphi}(t) \text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t) \text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \|\hat{f} \text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

と変形でき,

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \widehat{U^n T^k \psi_i}, \hat{f} \rangle|^2 = \|\hat{f} \text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}\|^2$$

を得る. P_j を $U^j V_0$ への直交射影とし, 上式を Schatten 形式で表せば

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\widehat{U^n T^k \psi_i} \otimes \widehat{U^n T^k \psi_i}) \hat{P}_0 = M_{\text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)} \hat{P}_0$$

となる. $P_{-j} = U^{-j} P_0 U^j$ に注意すれば

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n=-j+1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\widehat{U^n T^k \psi_i} \otimes \widehat{U^n T^k \psi_i}) \hat{P}_{-j} = M_{\text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)(\cdot N^{-j})} \hat{P}_{-j}$$

が得られる. 本稿では証明を省略するが, 条件 (ii), (iii) から $j \rightarrow \infty$ のとき $\hat{P}_{-j} \xrightarrow{\text{SOT}} I_{L^2(\mathbb{R})}$ が言える [Dau92]. また, $\text{PER}(|\hat{\varphi}|^2)(t)$ が $t = 0$ で連続であることから定理が示される. $\square$

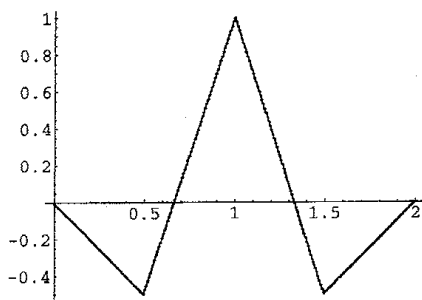
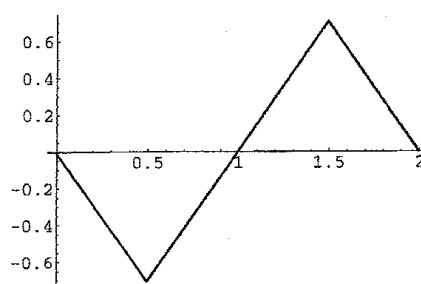
定理 1.1 の証明の多くの部分で, 文献 [BJ02] の方法を参考にした. 文献 [BJ02] は Cuntz リレーションを満たす場合の証明であるが, 具体的な計算方法の多くは彼らによるものである.

2 具体例と関連する幾つかの命題

Ron-Shen によるフレームレット [RS97, DHRS03] は次の通りである. 本節において, この例が定理 1.1 の条件をみたすことを示す.

例 2.1 (Ron-Shen). $N = 2, r = 3$ の場合:

$$m_0(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+z)^2, \quad m_1(z) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-z)^2, \quad m_2(z) = -\frac{1}{2}(1-z^2).$$

図 1: ψ_1 図 2: ψ_2

この例が定理 1.1 の条件 (i), (v) を満たすことは直接計算することで確かめられる. 条件 (ii), (iii) を満たすことは次の 2 つの命題から導かれる.

命題 2.2. $m_0(z) = \sum_{k=0}^d a_k z^k$ とする. 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$|m_0(e^{-it})| \leq \sqrt{N}$$

を満たすとする. このとき

$$g_n(t) := \prod_{k=1}^n \frac{m_0(e^{-itN^{-k}})}{\sqrt{N}}$$

とおくと $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{R}$ の任意の有界集合上で一様収束する.

証明. 平均値の定理から, ある定数 C が存在して, 任意の $t \in [0, 2\pi]$ に対して

$$m_0(e^{-it}) - m_0(1) \leq C|t|$$

となる. このことから, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} |g_{n+1}(t) - g_n(t)| &= \prod_{k=1}^n \left| \frac{m_0(e^{-itN^{-k}})}{\sqrt{N}} \right| \left| \frac{m_0(e^{-itN^{-(n+1)}})}{\sqrt{N}} - 1 \right| \\ &\leq \left| \frac{m_0(e^{-itN^{-(n+1)}})}{\sqrt{N}} - 1 \right| \\ &\leq C|tN^{-(n+1)}| \end{aligned}$$

が成立する. よって $m > n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) に対して

$$\begin{aligned} |g_m(t) - g_n(t)| &\leq \sum_{j=n}^{m-1} |g_{j+1}(t) - g_j(t)| \\ &\leq C \sum_{j=n}^{m-1} |tN^{-(j+1)}| \\ &\leq C|t| \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{N^{j+1}} \\ &\leq C|t|N^{-n} \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{R}$ の任意の有界集合上で一様収束する. □

この証明法は文献 [Fra99] による. m_0 が命題 2.2 の条件を満たすとき (Ron-Shen の例はこの条件をみたす)

$$\hat{\varphi}(t) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{m_0(e^{-itN^{-k}})}{\sqrt{N}}$$

が $\mathbb{R}$ 上の関数として定義できることと

$$\lim_{t \rightarrow 0} \hat{\varphi}(t) = 1$$

が成り立つことがわかる. これは $\hat{\varphi}(0) = 1$ であることと, $t = 0$ の近傍において $\hat{\varphi}$ が連続関数 g_n の一様収束極限であることによる. $\hat{\varphi}$ が $\mathbb{R}$ 上の 2 乗可積分関数であることは次の命題による.

命題 2.3. m_0 を $\mathbb{T}$ 上の関数とする. 任意の $z \in \mathbb{T}$ に対して

$$\frac{1}{2} \sum_{w^2=z} |m_0(w)|^2 \leq 1$$

を満たすとする. また

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}}$$

が $\mathbb{R}$ 上で殆んどいたるところ各点収束するとする. このとき極限 $\hat{\varphi}$ は $\mathbb{R}$ 上の 2 乗可積分関数であり, $\|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$.

証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_n(t) := \left(\prod_{j=1}^n \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}} \right) 1_{[-\pi, \pi]}(t2^{-n})$$

と定義する. このとき f_n は $\hat{\varphi}$ へ各点収束する. また

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f_n(t)|^2 dt &= \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} \prod_{j=1}^n \left| \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}} \right|^2 dt \\ &= \int_0^{2^{n+1}\pi} \prod_{j=1}^n \left| \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}} \right|^2 dt \\ &= \int_0^{2^n\pi} \prod_{j=1}^{n-1} \left| \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}} \right|^2 \frac{|m_0(e^{-it2^{-n}})|^2 + |m_0(e^{-i(t2^{-n}+\pi)})|^2}{2} dt \\ &\leq \int_0^{2^n\pi} \prod_{j=1}^{n-1} \left| \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}} \right|^2 dt \\ &= \|f_{n-1}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

となる. したがって

$$\|f_n\|^2 \leq \|f_{n-1}\|^2 \leq \cdots \leq \|f_0\|^2 = 1$$

となる. よって Fatou の補題から

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(t)|^2 dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(t)|^2 dt \leq 1$$

を得る. □

この命題のものの形は Mallat によるものである [Mal89]. 証明は文献 [Dau92] を参考にした. 次の命題から φ の台がコンパクトであることがわかる. このことから条件 (iv) がいえる.

命題 2.4 (Deslauriers–Dubuc [DD87]). $m_0(z) = \sum_{k=0}^d a_k z^k$ とし $\sum_{k=0}^d a_k = \sqrt{2}$ であるとする.

このとき

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}}$$

は指数型の整関数であり, 特に $[0, d]$ に台を持つ超関数の Fourier 変換である.

最後に条件 (vi) を満たすことを示す.

命題 2.5. $m_0(z) = \sum_{k=0}^2 a_k z^k$, $|a_k| < 1$ ($k = 0, 1, 2$) のとき

$$(S_0^* f)(z) := \frac{1}{2} \sum_{w^2=z} \overline{m_0(w)} f(w), \quad f \in L^2(\mathbb{T})$$

と定めると

$$S_0^{*l} \xrightarrow{\text{SOT}} 0 \quad (l \rightarrow \infty).$$

証明. Fourier 多項式に対して示せば十分である. Fourier 多項式 $f(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^k$ に対して, 適当な自然数 l が存在して

$$S_0^{*l} f \in \mathcal{K} := \text{span}\{e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2\}$$

となることがわかる. ここで $e_n(z) := z^n$ とした. また, $S_0^* \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ であるから, S_0^* の $\mathcal{K}$ への制限は

$$V_0^* := S_0^*|_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{a_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{a_2} & \overline{a_1} & \overline{a_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{a_2} & \overline{a_1} & \overline{a_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{a_2} \end{bmatrix}$$

と表せる. この行列の Jordan 標準形は, P を変換行列とするととき

$$PV_0^* P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & \overline{a_0} & & \\ & & & \overline{a_1} & \\ & & & & \overline{a_2} \end{bmatrix}$$

となり, 対角行列と冪零行列との積が冪零行列になる. 以上から命題の主張が示される. $\square$

3 Cuntz 環の表現との関係

正規タイトフレームは完全正規直交系へダイレーションできることが知られている. すなわち, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の正規タイトフレームとすると, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$ となる Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ と $\mathcal{K}$

の完全正規直交系 $\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^\infty$ が存在して, $P: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ を直交射影とすると, 各 i に対して

$$f_i = P\tilde{f}_i$$

が成り立つ. このことの類推として, 以下の結果はフレームレットは直交ウェーブレットへとダイレーション可能であることを示していると解釈できる.

定理 3.1 (Bratteli–Jorgensen–Kishimoto–Werner [BJKW00]). $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. $S_0, \dots, S_{r-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が

$$\sum_{i=0}^{r-1} S_i S_i^* = I$$

を満たすとする. このとき $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$ となる Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ と Cuntz 環 $\mathcal{O}_r$ の表現 $\pi: \mathcal{O}_r \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$ が存在して, $P: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ を直交射影とすると, 各 i に対して

$$S_i^* = \pi(s_i^*)P$$

となる.

参考文献

- [BJ97a] Ola Bratteli and Palle E. T. Jorgensen, *A connection between multiresolution wavelet theory of scale N and representations of the Cuntz algebra $\mathcal{O}_N$* , Operator algebras and quantum field theory (Rome, 1996), Internat. Press, Cambridge, MA, 1997, pp. 151–163.
- [BJ97b] Ola Bratteli and Palle E. T. Jorgensen, *Isometries, shifts, Cuntz algebras and multiresolution wavelet analysis of scale N* , Integral Equations Operator Theory **28** (1997), no. 4, 382–443.
- [BJ02] Ola Bratteli and Palle E. T. Jorgensen, *Wavelets through a looking glass*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.
- [BJKW00] O. Bratteli, P. E. T. Jorgensen, A. Kishimoto, and R. F. Werner, *Pure states on $\mathcal{O}_d$* , J. Operator Theory **43** (2000), no. 1, 97–143.
- [Chr03] Ole Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003.
- [Cun77] Joachim Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), no. 2, 173–185.
- [Dau92] Ingrid Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.
- [DD87] Gilles Deslauriers and Serge Dubuc, *Interpolation dyadique*, Fractals. Dimensions non entières et applications **1051** (1987), 44–55.

- [DHRS03] Ingrid Daubechies, Bin Han, Amos Ron, and Zuowei Shen, *Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **14** (2003), no. 1, 1–46.
- [Fra99] Michael W. Frazier, *An introduction to wavelets through linear algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [Jor05] Palle E. T. Jorgensen, *Measures in wavelet decompositions*, Adv. in Appl. Math. **34** (2005), no. 3, 561–590.
- [Mal89] Stephane G. Mallat, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$* , Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), no. 1, 69–87.
- [RS97] Amos Ron and Zuowei Shen, *Affine systems in $L_2(\mathbf{R}^d)$: the analysis of the analysis operator*, J. Funct. Anal. **148** (1997), no. 2, 408–447.