

3D モデル教材の開発とその効果

長野高専・一般科 濱口 直樹 (Naoki Hamaguchi)

Faculty of General Education,
National Institute of Technology, Nagano College

東邦大学・理学部 高遠 節夫 (Setsuo Takato)

Faculty of Science,
Toho University

1 はじめに

高専および大学初年級における数学では、関数のグラフや図形の理解が必要不可欠であるが、特に学生が戸惑うことの多い2変数関数のグラフや一般の空間図形については、教員でも黒板に正確に表現することは難しい。現在、このような問題に対処するため、様々な形で数学教材が作成されている。通常の黒板での教材の提示以外に、以下のようなものがあげられる。

- (1) 紙媒体の配付教材
- (2) スクリーンへの提示教材
- (3) タブレット上で扱える教材
- (4) 立体モデル教材

上記の教材のうち、紙媒体の配付教材は、多くの場合、 $\text{\LaTeX}$ を用いて作成されるが、我々の開発した教材作成のための総合支援ツールである $\text{K}\epsilon\text{Tpic}$ により、図1のように単純な線画でありながら正確さも兼ね備えた挿図が可能となった。

さらに現在では、上記にも含まれる Meshlab 等のソフトを用いた「タブレットで扱える教材」や3D プリンターによる「立体モデル教材」についても、 $\text{K}\epsilon\text{Tpic}$ によって作成が可能となっている ([1])。

ただし、どの教材も単独での提示では教材として不十分な点が多く、実際の教育現場において効果的な併用方法を検討する必要がある。

本稿では、このような視点から、教材の併用効果について、いくつかの例を取り上げて考察する。

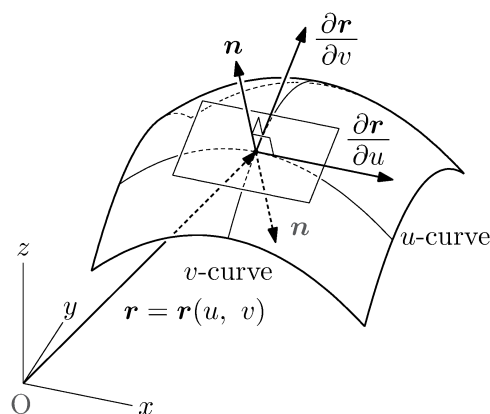


図1 $\text{K}\epsilon\text{Tpic}$ による挿図

2 教材例

まず、教材例として次の2変数関数についての問題を考える。

問題 極限值 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ は存在しないことを示せ。

解答 関数 $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ を考える。

xy 平面上の点 (x, y) を x 軸に沿って点 $(0, 0)$ に近づけると、 $y = 0$ より

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

一方、 y 軸に沿って近づけるときは、 $x = 0$ より

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

したがって、 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき、 z は一定の値に近づかない。

すなわち、極限值 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ は存在しない。

//

上記は、2変数関数が連続であることの定義をした後に、原点において連続ではない例としてよく取り上げられる関数である。しかしながら、連続でないということの後にそのグラフの形状を考えることはそれほど多くはない。

この曲面を、 $\text{KE}T\text{pic}$ を用いて線画で描くと図2のようになる。この図を見るだけで、曲面の形を正確に捉えることは困難かもしれない。実際に学生に提示したところ、この曲面を関数 $z = x^2 - y^2$ のグラフ（図3）と混同する様子も見受けられた。

関数 $z = x^2 - y^2$ のグラフは、図2の曲面に比べ頻出度が大きく、学生にとっては親しみがある。混同の原因の1つは、教材として扱う具体的な曲面が少ないことであり、多くの新しい関数のグラフの形を理解する力をつける、あるいは理解しようと試行錯誤する力をつけるためには、教員の側にも様々な方策が必要である。

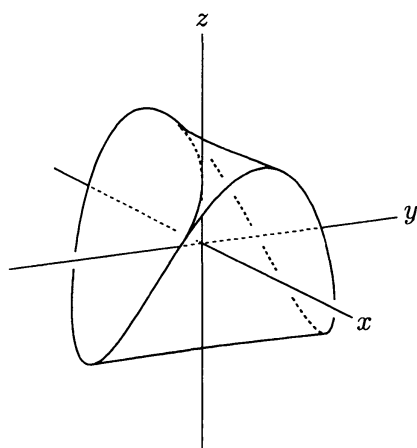


図2 関数 $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ のグラフ

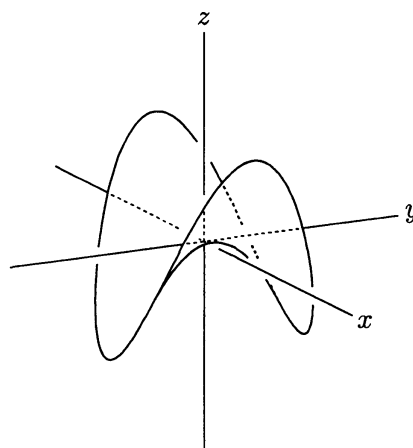


図3 関数 $z = x^2 - y^2$ のグラフ

まず、この曲面の形状を理解するために、Meshlab等のソフトを用いてタブレットでも扱える教材（図4）や3Dプリンターによって作られる立体モデル（図5）が利用できる。

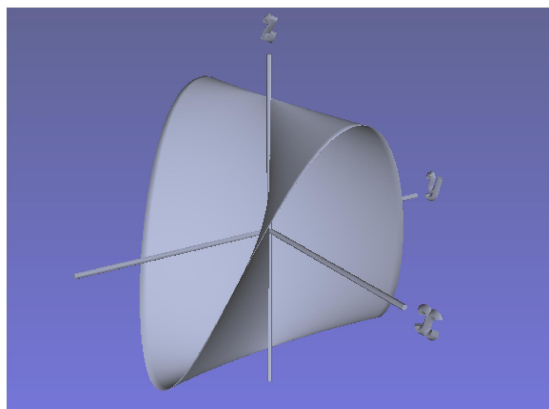


図4 Meshlab のスクリーンショット



図5 立体モデル

これらはobj形式、あるいは、stl形式のファイルによって作成されるが、そのファイルは $\text{K}\epsilon\text{Tpic}$ により、前述の線画のための図データを用いて生成される。

これらの教材を見た後に、再度、図2の線画を見るとその「見え方」も変わり、まずはこの曲面のおおまかな形状を理解できると考えられる。

次に、先ほどの解答をこの図形上で理解するために、連立方程式 $y=0, z=1$ で表される直線、および、連立方程式 $x=0, z=-1$ で表される直線をかき入れると、図6のようになる。

このような手作業を紙媒体の配付教材で学生自らが行うことは、授業内容の理解のためには大変効果的である。

ただし、実際には学生の理解は、この段階ではまだ十分ではなく、

点 (x, y) を x 軸に沿って点 $(0, 0)$ に近づけると、 $y=0$ より $z=1$

ということが、

連立方程式 $y=0, z=1$ の表す直線にはつながりにくい。まずは段階的に

z 軸上で1はどこか

などの問いかけが有効であると考えられる。

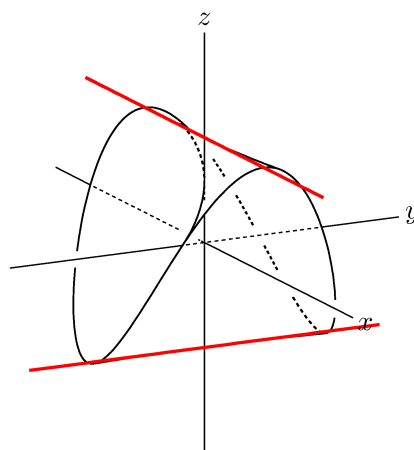


図6 配付教材での作業

次の教材例も 2 変数関数についてのものである。グラフの概形もとらえやすく、具体的な曲面を数多く扱うという観点からも、取り上げられるべきものである。

問題 関数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$ は $(x, y) = (0, 0)$ で連続ではないことを示せ。

解答 関数 $z = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ を考える。

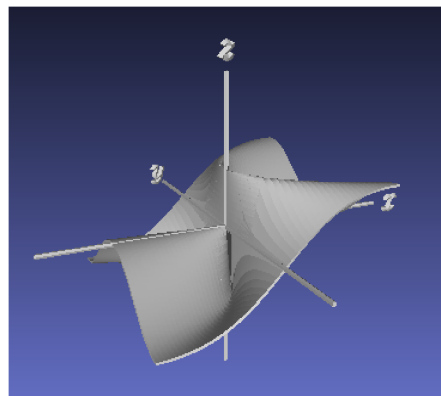
xy 平面上の点 (x, y) を曲線 $x = y^2$ に沿って点 $(0, 0)$ に近づけると

$$z = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

曲線 $x = -y^2$ に沿って近づくと

$$z = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \frac{-y^4}{2y^4} = -\frac{1}{2}$$

よって $(x, y) = (0, 0)$ で連続ではない。 // 図 7 関数 $z = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ のグラフ



一般に、関数 $f(x, y)$ について、任意の実数 a, b に対して $f(at, bt)$ が $t = 0$ で連続であっても、 $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ で連続とは限らない。上記の関数はその例となっている。

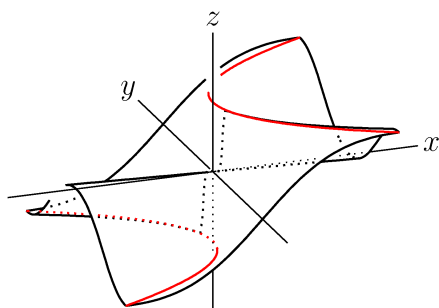


図 8 平面 $z = \pm \frac{1}{2}$ との交線

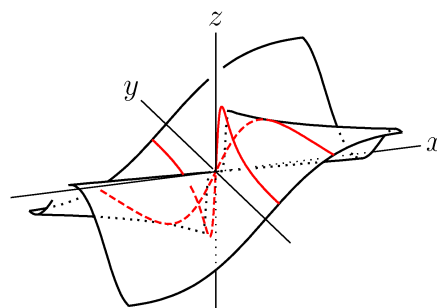


図 9 平面 $y = -2x, y = -10x$ との交線

次の教材例として、2 変数関数の偏微分係数の図形的意味を取り上げる。グラフとなる曲面の形も基本的である 2 変数関数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ の偏微分係数 $f_x(1, 2)$ の図形的意味は、通常は次のように説明される。

曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $y = 2$ の交線は

$$C : z = x^2 + 4$$

偏微分係数 $f_x(1, 2) = 2$ はこの曲線 C の点 $P(1, 2, 5)$ における接線 ℓ の傾きであり, $\vec{v} = (1, 0, f_x(1, 2))$ は ℓ の方向ベクトルの1つである.

図 10 は自然な角度に視点を置いたものであり, まず最初に x についての偏微分係数 $f_x(1, 2)$ の図形的意味を考えることになる. しかしながら, 接線 ℓ は傾きが正の値 2 であるが右に下がっていることで, 座標平面上での 1 変数関数のグラフの知識につながるかどうか懸念される.

この場合, Meshlab による図 11 のような教材を用いると, 1 変数関数を扱う場合の x 軸と y 軸の関係が, x 軸と z 軸によって保たれていると理解できる.

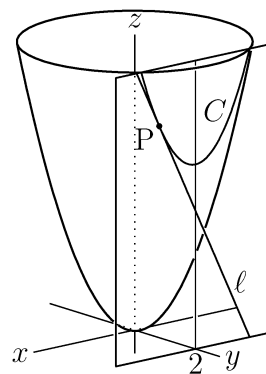


図 10 偏微分係数の図形的意味

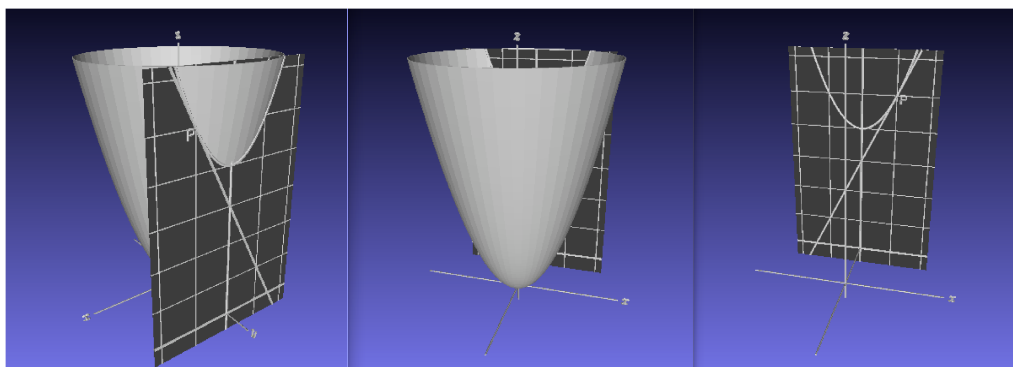


図 7 Meshlab のスクリーンショット

3 まとめと今後の課題

教材作成の総合支援ツール KETpic によって, 教員は次のような様々な形で作りたい図形教材を同じ感覚で作れるようになった:

- 紙媒体の配付教材
- スクリーンへの提示教材
- タブレット上で扱える教材
- 3Dプリンタによる立体モデル教材

さらに, これらを併用することで, 学生の理解を深めることが可能である. ただし, 教育的な効果を考えた場合, 学生自身が書き込むことのできる紙媒体の配付教材は, それらの中でも中心的な存在である.

また, 併用教材の開発にあたっては, 以下のような課題がある:

- 立体モデルについて、不連続点の処理、厚みや強度など教材に応じた問題点の調査や工夫
- 学生が手にとって扱うために、教材となるタブレットや立体モデルのための3Dプリンタの普及
- 学生が内容を整理するためのプリント教材の整備
- 併用による教育効果の検証

教材例にあげた曲面の問題を Meshlab での曲面も参考にしながら実際に解いた学生の中には、「関数の式を見ただけでこのようなグラフがイメージできるようになりたい」という感想を述べたものがある。このような教材の最も重要な役割の1つは、2変数関数のグラフがどのような曲面なのか明らかにしたいという気持ちを育てることであると考えられる。

4 謝辞

本研究は JSPS 科研費 15K00944 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Takato, S., Hamaguchi, N., Sarafian, H., Generating data of mathematical figures for 3D printers with KETpic and the educational impact of the printed models, LNCS 8592, pp.629–634, 2014