

ある種の C^* -algebra の automorphism group について

東工大 理 生 西 明 夫

§ 1 序

ここでは次の論文を紹介します。

Smith, M. B., On automorphism groups of C^* -algebras,
Trans. Amer. Math. Soc 152 (1970), 623-648.

C^* -algebra $C(X) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (X は compact space) の automorphism は Kadison, Ringrose [1, IV. Example d] によって, Hilbert space $\mathcal{H}$ が有限次元の場合が研究されている。
Smith のこの論文は, $\mathcal{H}$ が無限次元の場合を扱ったものである。また, Lance [2] が同じ結果を独立に得ています。

主要な結果は次の二つです。

定理 1 $\text{loc-Inn}(C(X; \mathcal{L}(\mathcal{H}))) \cong C(X; \text{Aut}(\mathcal{L}(\mathcal{H})))$

ここで, $\text{Aut}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の $*$ -automorphism の全体で,
 $\text{loc-Inn}(C(X; \mathcal{L}(\mathcal{H})))$ は次節で定義します。

定理 2 $\mathcal{H}$ が無限次元ならば,

$$\text{loc-Inn}(A)/\text{Inn}(A) = \check{H}^2(X; \mathbb{Z})$$

ここで, $A = C(X; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $\text{Inn}(A)$ は A の inner*-automorphism 全体, $\check{H}^2(X; \mathbb{Z})$ は整数環 $\mathbb{Z}$ に係数をもつ X の 2nd Čech cohomology group である。

定理 2 によって, $\mathcal{H}$ の次元が有限と無限の場合では本質的な違いがあることがわかる。

§ 2. Locally inner automorphisms.

以後, $\mathcal{B}$ は $\mathcal{H}$ 上の単位元をもつ C^* -algebra, X は compact space, $A = C(X) \otimes \mathcal{B} = C(X; \mathcal{B})$ とする。

$CF(A)$ は A の center-fixing *-automorphisms の group とする (i.e., $\alpha(x) = x$ ($x \in \mathcal{Z}(A)$))。

また, $e: X \times C(X; \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ と $e_t: C(X; \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ を次のように定義する. $e(t, f) = f(t)$, $e_t(f) = f(t)$.

e_t について次の有用な補題を得る。

補題 1. $\alpha \in CF(A)$ ならば, $\alpha(\ker e_t) \subset \ker e_t$.

S を X の closed set とする. このとき, Tietze の拡張定理によって $*\text{-homo } C(X; \mathcal{B}) \ni f \rightarrow f|_S \in C(S; \mathcal{B})$ は onto である. このようにして次の定義は well-defined である.

定義. $\alpha \in CF(X; \mathcal{B})$ と X の closed set S に対して,

$$\alpha|_S(f) = \alpha(F)|_S \quad (f \in S; \mathcal{B})$$

ここで, $f \subset F \in C(X; \mathcal{B})$. 明らかに, $\alpha|_S \in CF(C(S; \mathcal{B}))$.

定義. X の open covering $\{S_1, \dots, S_n\}$ があ, て, 各 $\alpha|_{S_i}$ が inner であるとき, $\alpha \in CF(\mathcal{U})$ は locally inner であると言いい. このような α の全体を $\text{loc-Inn}(\mathcal{U})$ とする.

容易に, $\text{loc-Inn}(\mathcal{U})$ は group であ, て, $\text{Inn}(\mathcal{U})$ はその normal subgroup であることがわかる.

定義. $\alpha \in CF(\mathcal{U})$ と $t \in X$ に対して, $\tilde{\alpha}_t: B \rightarrow B$ を $\tilde{\alpha}_t(B) = \alpha(\tilde{B})(t)$. ここで, $\tilde{B}$ は B を値にとる定値関数, すなわち, $1 \otimes B$. また $\tilde{\alpha}: t \mapsto \tilde{\alpha}_t$ とする.

$\alpha, \beta \in CF(\mathcal{U})$, $t \in X$ のとき, 補題 1 によ, て, $\tilde{\alpha}\beta_t = \tilde{\alpha}_t\tilde{\beta}_t$ であるので $\tilde{\alpha}_t$ は B の $*$ -automorphism である.

定理 3. X を compact space, $\mathcal{H}$ を Hilbert space, $B = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{U} = C(X; B)$ とする. このとき, $\alpha \in \text{loc-Inn}(\mathcal{U})$ であるための必要十分条件は $\tilde{\alpha}: X \rightarrow \text{Aut}(B)$ が連続であることである.

定理 3 を証明するためには, 次の二つの補題と, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の unitary group $\mathcal{U}$ が canonical hom. $p: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/S^1$ に関して $\mathcal{U}/S^1$ 上の fibre bundle であることも必要とする. ただし, S^1 は $\mathcal{U}$ の center で circle group である.

補題 2. B が von Neumann algebra, $\mathcal{U}$ を B の unitary group, $Z(\mathcal{U})$ を $\mathcal{U}$ の center とする. このとき, canonical isomorphism $\mathcal{U}/Z(\mathcal{U}) \cong \text{Inn}(B)$ は topological group と

しても isomorphism である。

補題 3. X を compact space, $\mathcal{H}$ を Hilbert space, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{H}$ 上の単位元をもつ C^* -algebra, $\mathcal{U}$ を $\mathcal{B}$ の unitary group とする。このとき, $\alpha \in \text{Inn}(\mathcal{A})$ であるための必要十分条件は, $p\alpha = \tilde{\alpha}$ なる continuous map $\tilde{\alpha}: X \rightarrow \mathcal{U}$ が存在することである。ただし, $p: \mathcal{U} \rightarrow \text{Inn}(\mathcal{B})$ は canonical hom. である。

定理 3 の証明. $\alpha|_{\bar{S}}$ が inner ならば, 補題 3 によ, て, $\widehat{\alpha|_{\bar{S}}}: \bar{S} \rightarrow \mathcal{U}$ が存在して, $p \widehat{\alpha|_{\bar{S}}} = \widetilde{\alpha|_{\bar{S}}}$. $\widetilde{\alpha|_{\bar{S}}} = \tilde{\alpha}|_{\bar{S}}$ であるので, $\tilde{\alpha}|_{\bar{S}}$ は continuous である。このようにして, 条件は必要である。逆に, $\tilde{\alpha}$ が continuous としよう。補題 2 によ, て $\mathcal{U}/S^1$ と $\text{Aut}(\mathcal{B})$ は identify とする。このとき, $\mathcal{U}$ は $\text{Aut}(\mathcal{B})$ 上の fibre bundle であるから local cross section をもつ。すなわち, $\text{Aut}(\mathcal{B})$ の open covering $\{O_\alpha\}$ と連続関数 $S_\alpha: O_\alpha \rightarrow \mathcal{U}$ があ, て $pS_\alpha = \text{id.}: O_\alpha \rightarrow O_\alpha$.

$\{\tilde{\alpha}^{-1}(O_\alpha)\}$ は X の open covering であるから X の finite open covering $\{S_1, \dots, S_N\}$ で $\bar{S}_i \subset \tilde{\alpha}^{-1}(O_\alpha)$ なるものがある。 $\tilde{\alpha}_i = S_{\alpha i} \tilde{\alpha}|_{\bar{S}_i}$ とおけば, $\widetilde{\alpha|_{\bar{S}_i}} = p\tilde{\alpha}_i$ である。したが, て, 補題 3 によ, て, $\alpha|_{\bar{S}_i}$ は inner である。ゆえに, α は locally inner である。□

定理 1 の証明. ' 定理 3 によ, て,

$$\text{loc-Inn}(\mathcal{A}) \ni \alpha \mapsto \tilde{\alpha} \in C(X; \text{Aut}(\mathcal{B}))$$

は homomorphism である。これは連続である。

$\varphi \in C(X; \text{Aut}(B))$ に対して, $\hat{\varphi}(f)(t) = (\varphi(t))(f(t))$
 $(f \in C(X; B), t \in X)$ とおくと, $\hat{\varphi} \in \text{Aut}(\mathcal{U})$ であって,
 $\tilde{\varphi} = \varphi$ であるから定理 3 によつて, $\hat{\varphi} \in \text{loc-Inn}(\mathcal{U})$ である。
 また, $\tilde{\alpha} = \alpha$ であるので, $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$ は onto isomorphism である。
 $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ は連続である。□

注 1. X が separable で, B が von Neumann algebra の
 ときには, $CF(\mathcal{U}) = \text{loc-Inn}(\mathcal{U})$ である。[3, Theorem 3.1]

注 2. 高橋氏[4]は, $C(X; B)$ より一般的な locally compact
 space X 上の C^* -algebra の continuous field $B = (C(B(t))_{t \in X}, \otimes)$
 の場合へ, 自然な形で $\alpha|_S$, $\tilde{\alpha}$, locally inner の定義などを
 拡張している。また, 定理 1 と定理 3 を X が locally compact
 space の場合に証明している。ただし, $C(X; \text{Aut}(B))$ のかわ
 りに $C_0(X; \text{Aut}(B))$ と置く。

注 3. 定理 1 は, B の weak closure が factor である場
 合には同じ証明によつて成り立つことがわかる。また代数的
 な同型だけならば, $K(B) = CI$ なる任意の C^* -algebra に対
 して成り立つ。

§ 3.

この節では定理 2 を証明する。

まず algebraic topology からいくつかの事を引用する。

定理 (Kuiper) [3, Theorem G]. $\mathcal{H}$ が無限次元の Hilbert space ならば, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の unitary group $\mathcal{U}$ は uniform topology に関して contractible である。

弧状連結位相空間 $K(\pi, n)$ の homotopy group がある abelian group π に対して,

$$\begin{aligned}\pi_i(K(\pi, n)) &= \pi, \quad i=n \\ &= 0, \quad i \neq n\end{aligned}$$

なるとき (このとき, $K(\pi, n)$ を Eilenberg-MacLane space と言う), 任意の compact space X に対して,

$$[X, K(\pi, n)] = \check{H}^n(X; \pi),$$

ここで, $[X, K(\pi, n)]$ は $\text{map } f: X \rightarrow K(\pi, n)$ の homotopy class の set, $\check{H}^n(X; \pi)$ は Čech cohomology である。

特に, circle group S^1 は $K(\mathbb{Z}, 1)$ -space である。

~~fiber~~ bundle (E, B, F, p) の homotopy sequence

$$\rightarrow \pi_i(F) \xrightarrow{i_*} \pi_i(E) \xrightarrow{p_*} \pi_i(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(F) \rightarrow \cdots \xrightarrow{p_*} \pi_0(B)$$

は exact である。

したがって, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の unitary group $\mathcal{U}$ は contractible であるから, $\pi_i(\mathcal{U}/S^1) = \pi_{i-1}(S^1)$ ($i > 0$)。よって, $\mathcal{U}/S^1$ は $K(\mathbb{Z}, 2)$ -space である。ゆえに,

$$[X, \mathcal{U}/S^1] = \check{H}^2(X; \mathbb{Z}).$$

Covering homotopy theorem:

(E, B, F, p) を *fibre bundle*, X を *compact space* とする。homotopy $f_t: X \rightarrow B$ と map $\tilde{f}_0: X \rightarrow E$ で $p\tilde{f}_0 = f_0$ なるものが与えられているとする。このとき, homotopy $\tilde{f}_t: X \rightarrow E$ で $p\tilde{f}_t = f_t$ なるものがある。

定理 2 の証明. 定理 1 より, $\text{loc-Inn}(\mathcal{O}) = C(X; \mathcal{U}/S')$. 補題 3 より, $\text{Inn}(\mathcal{O}) = p_* C(X; \mathcal{U}) = \{pf \mid f \in C(X; \mathcal{U})\}$ である。 $C_0(X; \mathcal{U}/S')$ を null-homotopic map $f: X \rightarrow \mathcal{U}/S'$ の全体とする。このとき, *Covering homotopy theorem* により, $C_0(X; \mathcal{U}/S') \subset p_* C(X; \mathcal{U})$ である。また, $\mathcal{U}$ は *contractible* であるから, $p_* C(X; \mathcal{U}) \subset C_0(X; \mathcal{U}/S')$ である。ゆえに,

$$\begin{aligned} \text{loc-Inn}(\mathcal{O}) / \text{Inn}(\mathcal{O}) &= C(X; \mathcal{U}/S') / C_0(X; \mathcal{U}/S') = [X; \mathcal{U}/S'] \\ &= \check{H}^2(X; \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

E. C. Lance [2] は別の方法で定理 2 を証明している。また, X が *separable* の場合に $\pi(\mathcal{O}) = \text{loc-Inn}(\mathcal{O})$ であることを示している。したがって, $\text{Inn}(\mathcal{O}) = C_0(X; \mathcal{U}/S')$ が $C(X; \mathcal{U}/S')$ の *connected component* であること, *identity component* $\text{Aut}_0(\mathcal{O})$ が $\pi(\mathcal{O})$ に含まれることから次の定理を得る。

定理 4. X が *separable component space*, $\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ は無限次元, $\mathcal{O} = C(X; \mathcal{B})$ とする。このとき,

$$\text{Aut}_0(\mathcal{O}) = \text{Inn}(\mathcal{O}).$$

それゆえ, $\mathcal{O}$ の *derivation* はすべて *inner* である。

$\mathcal{H}$ の次元が有限である場合と無限である場合を比較すると次のようになる。 $\mathcal{H}_n$ を n 次元 Hilbert space, S^m を m -sphere とする。 $\mathcal{A}_{mn} = C(S^m) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ とおく。 $1 < n < \infty$ のときは、 $\text{loc-Inn}(\mathcal{A}_{2n}) / \text{Inn}(\mathcal{A}_{2n}) = 0$, $\text{loc-Inn}(\mathcal{A}_{2\infty}) / \text{Inn}(\mathcal{A}_{2\infty}) = \check{H}^2(S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ である。 $m=1, 3$ の場合にも $1 < n < \infty$ のときは定理 2 は成り立たない。このように、 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の unitary group が contractible であることは本質的な条件である。

unitary group が contractible であることは, type I_∞ factor 以外にはある種の type II_∞ factor に対して知られている。[5]。また, finite type の factor の unitary group は contractible ではない [6]。

文 献

- [1] R. Kadison and J. R. Ringrose, Derivations and automorphisms of operator algebras, *Comm. Math. Phys.* 4 (1967), 32-63.
- [2] E. C. Lance, Automorphisms of certain operator algebras, *Amer. J. Math.* 91 (1967), 160-174.
- [3] M. B. Smith, On automorphism groups of C^* -algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 152 (1970), 623-648.
- [4] S. Takahasi, A note on automorphisms of C^* -algebras.
- [5] M. Brenner, A generalization of Kuper's theorem to factor of type II_∞ , *J. Math. Mech.* 16 (1967), 917-925.
- [6] H. Araki, M. B. Smith and L. Smith, On the homotopical significance of the type of von Neumann algebra factors, *Comm. Math. Phys.* 22 (1971) 71-88.