

Noether 環は いつ 忠実加群に埋蔵されるか

東京理科大学大学院 山岸規久道

§1. 序.

可換環 A と A 上の有限生成忠実加群 M を考える。
自然数 r に対して, M の r 重直和を M^r で表わす。 M の
生成系 $\{x_i\}_{i=1}^m$ をとり, 写像 $f: A \rightarrow M^m$ を $f(a) =$
 $(ax_1, \dots, ax_m)$ と定めると, M の忠実性から f は単射な A -
線型写像である。従って, n 以上のすべての自然数 r に
対して, 環 A は r 重直和 M^r に部分加群として含まれるこ
とがわかる。 A が整域であるならば, 特に $r=1$ と置き,
 A は M 自身に含まれる。

しかし, 一般には環 A がいつも M 自身に含まれるとは
限らない。これについての反例は (3.1), (3.2) で述べる。
すなわち環 A がいつも有限生成忠実 A -加群に含まれる
のはどのようなときであろうか。この問題を Noether 環に
ついて議論するのが本稿の目的である。

定理を簡潔に述べるために新しく2つ記号を用意する。

M は A -加群とし, $\mathfrak{f}$ は A の素イデアルとする。このとき,

$$\epsilon M = \{ x \in M \mid [0 :_A x] \neq (0) \},$$

$$M[\mathfrak{f}] = [0 :_{M_{\mathfrak{f}}} [0 :_{A_{\mathfrak{f}}} A_{\mathfrak{f}}]] \cap M$$

と定める。

定理. A は Noether 環とする。次の条件は同値

である。

$$(1) \dim_{A_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{f}A_{\mathfrak{f}}} [0 :_{A_{\mathfrak{f}}} \mathfrak{f}A_{\mathfrak{f}}] = 1 \quad (\forall \mathfrak{f} \in \text{Ass } A).$$

(2) すべての有限生成忠実 A -加群が A の部分加群として含む。

(3) すべての A -加群 M に対し,

$$\epsilon M = \bigcup_{\mathfrak{f} \in \text{Ass } A} M[\mathfrak{f}].$$

A の素因子が極小なものばかりであるとき, 条件 (1) と (2) は同値であることが [3, Theorem] で述べられている。この場合条件 (1) は A の全商環が Gorenstein であるということに他ならない。

以後 A は可換な Noether 環とする。

§2. 定理の証明。

補題. (2.1). 全ての有限生成忠実 A -加群が A を部分加群として含むものとせよ。 S は A の積閉集合とする。 このとき, 全ての有限生成忠実 $S^{-1}A$ -加群が環 $S^{-1}A$ を部分加群として含む。

命題. (2.2). $(A, \mathfrak{m})$ は局所環とし,
 $\dim_{A/\mathfrak{m}} [0 :_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}] \geq 2$ とする。 このとき, 環 A を部分加群として絶対に含まないような有限生成忠実 A -加群が存在する。

次の補題は [1, Hilfssatz 1] を改良したものである。
 そして, その証明は同様に行なわれる。

補題. (2.3). M は A -加群とし, $\{N_1, \dots, N_s\}$ は真に小さい M の部分加群の族とする。 さらに, 次の条件を満たす素イデアルの族 $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s\}$ が存在する。

- (i) $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ は互いに異なる。
- (ii) $\mathfrak{p}_i M \subseteq N_i \quad (1 \leq i \leq s)$ 。
- (iii) $N_i A_{\mathfrak{p}_i} \cap M = N_i \quad (1 \leq i \leq s)$ 。

このとき, $M \neq N_1 \cup \dots \cup N_s$.

系. (2.4). M は有限生成忠実 A -加群とする。

このとき, $M \neq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass } A} M[\mathfrak{p}]$.

定理の証明.

(1) $\Rightarrow$ (3) M は A -加群とする。 $x \in {}_t M$ とする。 $[0 \underset{A}{:} x] A_{\mathfrak{p}} \neq (0)$ となる $\mathfrak{p} \in \text{Ass } A$ が存在する。このような $\mathfrak{p}$ の中で height が一番小さいものをあつためて $\mathfrak{p}$ とする。 $\mathfrak{p}$ に真に含まれるすべての $\mathfrak{q} \in \text{Ass } A$ に対して, $[0 \underset{A}{:} x] A_{\mathfrak{q}} = (0)$ となるから, $\ell_{A_{\mathfrak{p}}}([0 \underset{A}{:} x] A_{\mathfrak{p}}) < \infty$. よって,

$$[0 \underset{A}{:} x] A_{\mathfrak{p}} \cap [0 \underset{A_{\mathfrak{p}}}{:} \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}] \neq (0).$$

(1) から $\dim_{A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}} [0 \underset{A_{\mathfrak{p}}}{:} \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}] = 1$ なので,

$$[0 \underset{A}{:} x] A_{\mathfrak{p}} \supset [0 \underset{A_{\mathfrak{p}}}{:} \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}].$$

故に $x \in M[\mathfrak{p}]$. 即ち

$${}_t M \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass } A} M[\mathfrak{p}].$$

逆の包含関係は明らかであるから (3) を得る。

(3) $\Rightarrow$ (2) M は有限生成忠実 A -加群とする。

(3) と系 (2.4) から, $M \neq tM$. 元 $x \in M \setminus tM$ をとると, $A \cong Ax \subset M$.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\exists \mathfrak{p} \in \text{Ass } A$ とする。補題 (2.1) から局所環 $A_{\mathfrak{p}}$ も定理の条件 (2) をみたす。命題 (2.2) により, $\dim_{A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}} [0 \underset{A_{\mathfrak{p}}}{:} \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}] = 1$ でなければならぬ。

例 3. 例 3.

(3.1) ([2], Theorem 2). $s \geq 4$ とする。

このとき $\dim_{A/\mathfrak{m}} [0 \underset{A}{:} \mathfrak{m}] = s$ でありかつ $\ell_A(M) < \ell_A(A)$ であるような Artin 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と有限生成忠実 A -加群 M が存在する。もちろん, この M は環 A を含まない。

(3.2). $(A, \mathfrak{m})$ は Artin 局所環とし, $E_A(A/\mathfrak{m})$ は $A/\mathfrak{m}$ の injective envelope とする。 $E_A(A/\mathfrak{m})$ は有限生成忠実 A -加群である。 $E_A(A/\mathfrak{m})$ が A を含むための必要十分条件は $\dim_{A/\mathfrak{m}} [0 \underset{A}{:} \mathfrak{m}] = 1$, 即ち A は Gorenstein ということである。

(3.3) ([後藤 四郎]). $k[x_1, \dots, x_n]$ は体 k

上の形式的中級数環とする。

$$A = k[[X_1, \dots, X_m]] \otimes k$$

はイデアル化とする。このとき A はすべての有限生成忠実 A -加群に部分加群として含まれる。

(3.4). $d > m \geq 0$. $k[[X_0, X_1, \dots, X_d]]$ は k 上の形式的な中級数環とする。各 $0 \leq s \leq d-m$ に対して,

$$I_s = (X_0^2, \dots, X_{s-1}^2) + (X_s)$$

$$P_s = (X_0, \dots, X_s)$$

とおく。 $I = \bigcap_{s=0}^{d-m} I_s$, $A = k[[X_0, X_1, \dots, X_d]]/I$ と定めれば次の事柄が成立する。

- (i) $\dim A = d$, $\text{depth } A = m$.
- (ii) $\text{Ass } A = \{P_s/I \mid 0 \leq s \leq d-m\}$.
- (iii) $\dim_{A_{\mathfrak{p}}/A_{\mathfrak{p}}} [0 :_{A_{\mathfrak{p}}} \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}] = 1$ ($\mathfrak{p} \in \text{Ass } A$).

(iii) より, A はすべての有限生成忠実 A -加群に含まれる。

後記. 以上の結果をもとに論文 [4] を作成中です。またこの研究をつぎの子にあたっては、後藤田郎氏と彼のセー

の方々から有益な助言を数多くたまわりました。ここに深く感謝の意を表明したいと思います。

References

- [1] O. Forster, Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring, Math. Z., 84 (1964), 80--87.
- [2] T. H. Gulliksen, On the length of faithful modules over Artinian local rings, Math. Scand., 31 (1972), 78--82.
- [3] K. Yamagishi, A note on a faithful module, TRU Mathematics, 17-1 (1981), 153--157.
- [4] -----, Embedding of Noetherian rings into faithful modules, in preparation.