

日月食の頻度について

東北帝國大學助教授 理學士

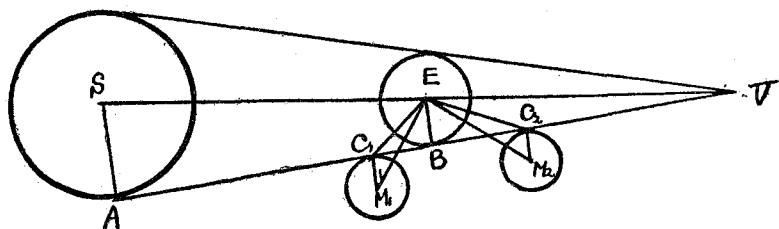
松隈健彦

日月食の限界 日月食がおよそ十八年を週期としてくりかへすことは遠くカルデヤの昔しより知られて居ることでその週期を Saros と名づける。今日精密なる測定により一サロスは 18年10日7時42分=658 5,日34 とされて居る。一さろすの間には凡そ 41 回の日食と 29 回の月食とがあらわれる。今確率の考へを應用してこの一さろす間に日月食のおこる頻度を理論的に考へこれを實際と比較して見ようと思ふ。

今 太陽の視半径= $H_{\odot}$ 太陽の視差= $\pi_{\odot}$

月の視半径= $H_{\lrcorner}$ 月の視差= $\pi_{\lrcorner}$

さし圖に於て S を太陽 E を地球とし、 M_1 は將に日食の始まん（又は終らん）とする時の月の位置、 M_2 は將に月食の初らん（又は終らん）とする時の月の位置とする。



しからば $\widehat{SEA} = H_{\odot}$

$\widehat{BAE} = \pi_{\odot}$

$C_1\widehat{EM}_1 = C_2\widehat{EM}_2 = H_{\lrcorner}$

$BC_1E = BC_2E = \pi_{\lrcorner}$

となるのである。

次に $M_1ES = D_{\odot}$, $M_2EV = D_{\lrcorner}$ として $D_{\odot}$, $D_{\lrcorner}$ の値を求める。

$\triangle AVE$ において $\widehat{AVE} = \widehat{AES} - \widehat{BAE} = H_{\odot} - \pi_{\odot}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle C_1EV \text{ において } C_1\hat{E}S = \widehat{BC_1E} + C_1\hat{V}E = \pi_l + (H_\odot - \pi_\odot) \\ \therefore D_\odot = \widehat{M_1ES} = C_1\hat{E}S + C_1\hat{E}M_1 = (\pi_l + H_\odot - \pi_\odot) + H_l \end{array} \right.$$

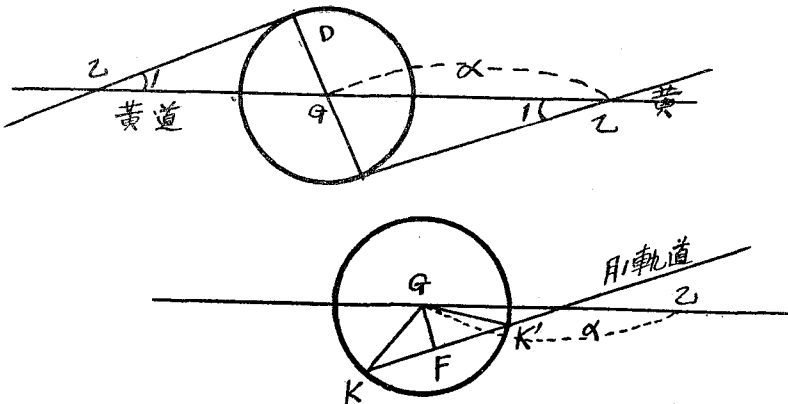
$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle C_2EV \text{ において } C_2\hat{E}V = \widehat{BC_2E} - C_2\hat{V}E = \pi_l - (H_\odot - \pi_\odot) \\ \therefore D_l = \widehat{M_2EV} = C_1\hat{E}V + C_1\hat{E}M_1 = (\pi_l - H_\odot + \pi_\odot) + H_l \end{array} \right.$$

$$\text{即ち } D_\odot = (\pi_l + H_\odot - \pi_\odot) + H_l = (\pi_l + H_l) + (H_\odot - \pi_\odot)$$

$$D_l = (\pi_l - H_\odot + \pi_\odot) + H_l = (\pi_l + H_l) - (H_\odot - \pi_\odot)$$

月の中心と太陽の中心との角距離が $D_\odot$ より小なる時は日食を生じその角距離の補角 (即ち地球の影の中心と月の中心との角距離) が D_l より小なる時は月食を生ずる。

さて日食の場合には ES を延長し月食の場合には EV を延長して各天球と交はる點を G とす、しからば G は言ふまでもなく黄道の上にある、今圖に示すように G を中心とし $D_\odot$ 又は D_l (以後日月食を區別する必要なき時は簡単に D を用ふる) を半径として小圓を考へる、この小圓に接し且つ黄道と I なる角 (I は月の軌道の黄道に對する傾角とす) をなす大



圓が黄道をきる點を L, L' とするしからば月の軌道の昇交點又は降交點が LL' の間にある事は食なる現象の起るための必要條件である。

今 $GL = \alpha$ とすれば球面三角の公式

$$\sin \alpha = \sin D \cos I$$

によつて α を計算することができる。

月の運動と常數 月の運動は非常にこみいつて居る、その地球からの距離その軌道の傾角なきたへずかわつて居る、従つて今まで計算に出て來た π , H , D , I , α なきは決して常數ではなく食の起る毎にちがつた値をもつて居る。しかし私は今こゝで問題を簡單にするために、月は地球のまわりに等速圓運動をするものとし、その軌道の傾角も一定であるを考へる。現在の研究即ち日月食を統計的に研究するさいふ場合に於ては、月の運動を上のように假定する事は決して誤りではない事と思はれる。

月の運動を上のように假定するさいふ事は π , H , I にその平均値をこるさいふ事である、吾等は尙その上に、太陽も亦地球のまわりに圓運動をするものゝ假定する、即ち $\pi_{\odot}$, $H_{\odot}$ も亦その平均値をこることにする、しかるこきは

$$\left. \begin{array}{l} \pi = 57' 3'' \\ H = 15 \quad 33 \\ \pi_{\odot} = 9 \\ H_{\odot} = 16 \quad 1 \end{array} \right\} \text{(平均値)} \quad \begin{array}{cc} \text{日 食} & \text{月 食} \\ D = 88' 28'' & 56' 44'' \\ \alpha = 16^{\circ} 40'.3 & 10^{\circ} 3'.2 \end{array}$$

確率 P 今月がその軌道を運行する間に食の起る確率 P を考へる、月の軌道の昇交點又は降交點が G より θ

こ $\theta + d\theta$ の間にある確率は

$\frac{d\theta}{2\pi}$ である、次に上の條件が満

足せられたる時に實際食が起る

Probability は $\frac{KK'}{2\pi}$ である、故に今圖に示すように

$GF = r$, $KK' = 2\beta$ とすれば

$$dP = \frac{d\theta}{2\pi} \frac{2\beta}{2\pi}$$

従つて P を求めるには是を積分すべきであるがその際昇交點と降交點に於て同じ事情が起る事を考へに入れる時は

$$P = 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2\beta}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\alpha} \beta d\theta$$

こゝに β は θ の 函 数 に し て 次 の 如 き 関 係 に よ つ て 與 へ ら る べ き も の で あ る。

$$\frac{\sin \gamma}{\sin D} = \frac{\sin I \sin \theta}{\sin I \sin \alpha} \qquad \cos \beta = \frac{\cos D}{\cos \gamma}$$

上の式が示すように P は D と α のみの函数である、その値を求めるには D と α が小なる事を利用してその無限級数に展開すればよいのである、讀者の煩累を慮つてその結果を最初にあぐれば

$$P = \frac{\sin D \sin \alpha}{2\pi} K$$

$$K = K_0 + K_1 \sin^2 D + K_2 \sin^4 D + \dots$$

$$K_0 = 1 + \frac{1}{8} \sin^2 \alpha + \frac{3}{64} \sin^4 \alpha + \frac{25}{32 \times 32} \sin^6 \alpha + \dots$$

$$K_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{24} \sin^2 \alpha + \dots$$

この計算の要點だけをかゝける、

$$\cos \beta \cos \gamma = \cos D \qquad \text{を自乗すれば}$$

$$(1 - \sin^2 \beta)(1 - \sin^2 \gamma) = 1 - \sin^2 D$$

是より $\sin^2 \beta = \frac{\sin^2 D - \sin^2 I \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 I \sin^2 \theta}$ $\sin \beta = \frac{\sin D \sqrt{1 - \frac{\sin^2 D}{1 - \sin^2 \alpha}}}{\sqrt{1 - \sin^2 I \sin^2 \theta}}$ ヲ得

こゝに $\sin \theta = \sin \alpha \sin \phi$ において變數を θ より ϕ に變ずれば

$$\sin \beta = \sin D \cos \phi \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sin^2 D \sin^2 \phi + \frac{1.3}{2.4} \sin^4 D \sin^4 \phi + \dots \right\}$$

今 $\beta = \sin \beta + \frac{1}{2} \sin^2 \beta + \frac{1.3}{2.4} \sin^4 \beta + \dots$

なる公式の右邊に上の $\sin \beta$ を代入すれば

$$\begin{aligned} \beta &= \sin D \cos \phi \left\{ 1 + \frac{2}{1} \sin^2 D \sin^2 \phi + \frac{1.3}{2.4} \sin^4 D \sin^4 \phi + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin^2 D \cos^2 \phi \left\{ 1 + \frac{3}{2} \sin^2 D \sin^2 \phi + \dots \right\} \\ &\quad + \dots \\ &= R \sin D \cos \phi \end{aligned}$$

$$\text{但し} \quad R = \left(1 + \frac{1}{6} \sin^2 D + \dots\right) + \sin^2 \phi \left(\frac{1}{3} \sin D + \dots\right) + \dots$$

$$\text{又} \quad \sin \theta = \sin \alpha \sin \phi \quad \exists \quad d\theta = \frac{\sin \alpha \cos \phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi}} d\phi$$

是等の値を P に代入する時は

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\alpha \beta d\theta = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \sin D \cos \phi \frac{\sin \alpha \sin \phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi}} d\phi \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sin D \cos \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \cos^2 \phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi}} d\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{さて} \quad \frac{\cos^2 \phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi}} &= (1 - \sin^2 \phi) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \sin^2 \phi + \frac{1.3}{2.4} \sin^4 \alpha \sin^4 \phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1.3.5}{2.4.6} \sin^6 \alpha \sin^6 \phi + \dots \right\} \end{aligned}$$

R の値は上に與へた通り

$$R = \left(1 + \frac{1}{6} \sin^2 D\right) + \frac{1}{3} \sin^2 D \sin^2 \phi$$

實際計算をやつて見れば $\sin^4 D$ 以下は全く無視してよろしい事がわかるのである。

この二つをかけ合はして

$$\frac{R \cos^2 \phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi}} = a_0 - a_2 \sin^2 \phi - a_4 \sin^4 \phi - a_6 \sin^6 \phi - \dots$$

$$\begin{aligned} a_8 &= 1 & + \frac{1}{6} \sin^2 D \\ a_2 &= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha\right) & - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha\right) \sin^2 D \\ a_4 &= \left(\frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1.3}{2.4} \sin^4 \alpha\right) & + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \sin^2 \alpha\right) \sin^2 D \\ a_6 &= \left(\frac{1.3}{2.4} \sin^4 \alpha - \frac{1.3.5}{2.4.6} \sin^6 \alpha\right) & + \frac{1}{6} \sin^2 \alpha \sin^2 D \end{aligned}$$

故にこれを積分すれば Wallis の公式によつて

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\pi^2} \sin D \cos \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ a_0 - a_2 \sin^2 \phi - a_4 \sin^4 \phi - a_6 \sin^6 \phi - \dots \right\} d\phi \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sin D \cos \alpha \times \frac{\pi}{2} \frac{K}{2} \end{aligned}$$

$$\text{但し} \quad \frac{K}{2} = a_0 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1.3}{2.4}a_4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}a_6 - \dots$$

この $\frac{1}{2}K$ を實際計算すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}K &= \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\sin^2\alpha + \frac{3}{2.64}\sin^4\alpha + \frac{25}{2.32.32}\sin^6\alpha + \dots \\ &+ \left(-\frac{3}{24} + \frac{1}{2.24}\sin^2\alpha + \dots \right) \sin^2D \end{aligned}$$

$$\text{故に} \quad P = \frac{\sin D \sin \alpha}{2\pi} K$$

$$\begin{aligned} K &= 1 + \frac{1}{8}\sin^2\alpha + \frac{3}{64}\sin^4\alpha + \frac{25}{32.32}\sin^6\alpha + \dots \\ &+ \left(-\frac{3}{12} + \frac{1}{24}\sin^2\alpha + \dots \right) \sin_1 D \end{aligned}$$

是れ前にあけた結果である。

P の意味 かようにして求められたる P はいかなる意味を有して居るかを考へて見る。今 t なる時間に n 回の食があつたとする、その各食の繼續時間を T_i とすれば

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{t}$$

となるべき筈である、實際にしらべる場合に於ては t を ∞ にする事はできないが幸ひに前にのべた通り Saros と云ふ週期があるから

$$P = \frac{T_s (\text{さろす間に起る凡ての食の繼續時間の總和})}{t_s (\text{さろすの長さ})}$$

$$\text{又は} \quad T_s = P \times t_s$$

とおいてよいのである。

日月食の頻度 前にのべた通りさろすの間におよそ 41 回の日食と 29 回の月食とがあるがこの數を同じような考へて出して見よう、今

N_s = 求める數即ちさろすの間における日月食の數

β_0 = 前に與へた β の平均値

T_0 = 日月食の繼續時間の平均値

n = 月の平均角速度

とすれば

$$\beta_0 = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \beta d\theta}{2\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \beta d\theta.$$

$$T_0 = \frac{2\beta_0}{n} = \frac{2}{n\alpha} \int_0^{\alpha} \beta d\theta$$

なる関係がある、次に前に同じく t_s をさろすの長さ T_s をさろすの間における食の繼續時間の總和とすれば

$$T_s = N_s T_0$$

$$\text{であり又} \quad T_s = P t_s$$

であらねばならぬ。

$$\text{故に} \quad N_s T_0 = P t_s$$

$$N_s \times \frac{2}{n\alpha} \int_0^{\alpha} \beta d\theta = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\alpha} \beta d\theta \times t_s$$

$$\text{即ち} \quad N_s = \frac{n\alpha t_s}{\pi^2} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{n t_s}{\pi}$$

月は29.5306日の間に地球を一周し又 $t_s = 6585.34$ 日 であるから

$$N_s = \frac{\alpha}{\pi} \times \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{29.5306} \times 6585.34 = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{2 \times 6585.34}{29.5306}$$

次に α を角の度の数であらせば

$$N_s = \alpha^\circ \times \frac{2 \times 6585.34}{180 \times 29.5306} = [0.09408] \alpha^\circ$$

となる、是れ求める日月食の数である。この結果を見れば N_s は α のみに比例することが知られる。

理論の値と實際の値 今計算と實際の値とを比較するにかなりよく合つて居るのである。

[計算]

	日 食	月 食
D	88'28''	56'44''
α	16°40'.3	10°36'.2
$\sin \alpha$	0.08231	0.03385
$\sin D$	66	27
K	1.01079	1.00436

$\log \sin D$	8.4105	8.2175
$\log \sin \alpha$	9.4577	9.2648
$\log K$	0.0047	0.0019
$\log 2\pi$	0.7682	0.7982
$\log P$	7.0747	6.6860
P	0.001188	0.000485
α	$16^{\circ}67'$	$10^{\circ}60'$
$\log \alpha$	1.2219	1.0253
$\log N_s$	1.6160	1.4194
N_s	4.130	26.27

【實際の値】 1884年3月26日の日食と1902年4月8日の日食とが互に相對應するものとしその間に含まれたる凡ての日月食の繼續時間をいぎりすの Nautical Almanac より取り出だしその總和を求めて T_s/t_s を得る事次の通りである。

	日 食	月 食
T_s	193.時36	79.時20
t_s	157929 時	157928 時
$\frac{T_s}{t_s}$	0.001224	0.000501

上の計算により實際と計算との値を比較すれば次の通りである。

	日 食		月 食	
	實	際 計 算	實	際 計 算
P	0.001224	0.001188	0.00501	0.00085
{ 差の百分比	3.0%		3.2%	
{ N_s	41回	41.3	29回	26.3

古い日月食の統計 上の結果を見れば P 計算の値が實際の値よりも凡そ3%だ小さく又 N_s は日食においてはよく一致するが月食にては計算の値がかなり實際の値よりも小さい、しかしかような種類の問題としてはこの両者はまづ大體に於て一致して居るべきであらう。

この兩者の値の不一致は何より來るかといへば一つには理論の不完全より來り一つには材料の不足より來るのである。

理論の不完全さいふのは前にのべた通り月の運動は非常にこみいつて居り太陽も亦橢圓運動をなして居るにかゝらずこの兩者はどちらも圓運動をなせるものと假定したゝめである、このこみいつた運動の不整の中その一部分は P を求める現在の計算に取り入れるこゝかできるけれども（その計算は餘りに専門的になるから省く）その凡ての不整をこりいれるこゝは恐らく不可能であらうと思ふ。

材料の不足と言ふのは前に與へた T_0 の値は 1884 年より 1902 年までのさろすについてゝある、しかしながらサロスの異なるによつて T_0 、その他の値が多少異なるは言ふまでもなく現在吾々のえらんだサロスは或はこの問題のためには非常にわるい材料を提供して居るかも知れぬのである、是をさける爲めには非常に長い期間に亘つて調査しそれから材料を得る事が必要である、是を研究するには Oppolzer の Canon der Finsternisse (1897 年) の右に出づるものはない、この書物は オツボルツァが畢生の精力を盡し紀元前年 1202 頃から紀元後 2150 年頃まで 3400 年間に亘つて凡ての日月食についてその「食の要素」を計算して表にしたものである、その中には日食が 8000 回月食が 5150 回含まれて居る、月食に依てはその繼續時間がそのまゝ要素としてあけられて居るから單にそれを加へ合すればよろしいが日食に於ては繼續時間は直接あけられて居ないゝ他の要表から計算する必要がある、勿論個々の日食について繼續時間を出すこゝは大した努力ではないが 8000 回に亘つて計算を行ふには相當の時間と忍耐を要する、私には只今その時間もなく忍耐も持合せがないのでこのまゝこゝに掲げた次第である。

この問題は私がまだ學生時代につゝいたまゝ十年間机の中にしまつてあつたが最近ある機會を得て理論の不完全なる處をなほし又新しき研究を加へてこゝにかゝぐる次第である

（東京物理學校雜誌第 384 號より）