

半単純リー群上の Whittaker 関数とその応用

岡山理科大 橋爪道彦 (Michihiko HASHIZUME)

半単純リー群上の Whittaker 関数が関連する 2 つの話題；

(I) 保型関数論に登場する Whittaker 関数 --- 保型形式のフー

リエ係数

(II) 物理に登場する Whittaker 関数 --- 量子戸因格子のスペク

トル分解

について述べる。

(I) 保型関数論に登場する Whittaker 関数

1°) 保型形式の定義

よく知らぬことを述べるが 上半平面 $H = \{z = x + iy; y > 0\}$ 上の Modular 群 $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ に属する保型形式について想起しよう。 $G = SL_2(\mathbb{R})$ は上半平面 H に 1 次分数変換 $g \cdot z = (az + b)(cz + d)^{-1}$ (但し $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G, z \in H$) により推移的に作用している。

定義 1. $f \in C^\infty(H)$ が Γ -保型形式とは

- (i) f は Γ -不変 即ち $f(\gamma \cdot z) = f(z)$ ($\forall \gamma \in \Gamma, z \in H$).
- (ii) f は H 上の微分作用素 $y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ の固有函数 即ち
- $$y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})f = (y^2 - 1/4)f \quad (y \in \mathbb{C}).$$
- (iii) f は次の増大度条件を満たす. 即ち各 $p, q \geq 0$ (整数) に対し 正数 C と実数 r が存在して
- $$\left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} f(x+iy) \right| \leq C y^r.$$

G の部分群を夫々 $K = SO(2)$, $A = \{ \begin{bmatrix} y^{1/2} & \\ & y^{-1/2} \end{bmatrix} : y > 0 \}$, $N = \{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \}$ で表わすと $N \times A \times K \ni \left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^{1/2} & \\ & y^{-1/2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \right) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{1/2} & \\ & y^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \in G$ は微分同型射 (岩沢分解) である.

$K = SO(2)$ は G の極大コンパクト部分群かつ実 $i \in H$ における G の固定部分群 従って上半平面はリーマン対称空間 G/K と同一視できる. Γ -保型形式 f に対し G 上の函数 F を $F\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{1/2} & \\ & y^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}\right) = f(x+iy)$ で定めると F は左 Γ -不変, 右 K -不変な G 上の C^∞ -函数である. 又 H 上の G -不変微分作用素環は $y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ を生成元とする多項式環である事に注意する.

上に述べた例を考慮して一般の場合の保型形式の定義を述べよう. G は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された連結半単純代数群 $\mathbb{G}$ の実有理点のなす Lie 群, $\Gamma \in G$ の数論的部分群とする. 以下 $\mathbb{G} \subset GL_n(\mathbb{C})$ とする. $K \in G$ の極大コンパクト部分群

とする。 G によって K は $\mathbb{C}^n$ に線型変換として作用する。 $\mathbb{C}^n$ に K -不変内積をとる。 G の元 g を $\mathbb{C}^n$ の線型変換とみなしたときその Hilbert-Schmidt ノルムを $\|g\|$ で表わす。 $\mathcal{U}$ は G 上の左不変微分作用素環 (= G の Lie 環の複素化の enveloping algebra) を表わす。 その部分環 $\mathcal{U}^K$ は $\mathcal{U}^K = \{D \in \mathcal{U}; \text{Ad}(k)D = D \ (k \in K)\}$ で定める。

定義 2. $F \in C^\infty(G)$ が Γ -俤型形式とは

- (i) F は左 Γ -不変かつ右 K -有限
- (ii) F は $\mathcal{U}^K$ に属する同時固有関数 即ち $\chi \in \text{Hom}_{\text{alg.}}(\mathcal{U}^K, \mathbb{C})$ が存在して

$$ZF = \chi(Z)F \quad (Z \in \mathcal{U}^K)$$

- (iii) 各 $D \in \mathcal{U}$ に対し正数 C と実数 r が存在して

$$|DF(g)| \leq C \|g\|^r$$

注意 F が右 K -有限 $\Leftrightarrow \{F(gk); k \in K\}$ は各 $g \in G$ に対し有限次元空間を張る。 又 (i) に F が右 K -不変のとき条件 (ii) は F が対称空間 G/K 上の左不変微分作用素環の同時固有関数である事に他ならない。

2°) 俤型形式の Fourier 展開

最初に上半平面上の俤型形式の Fourier 展開について復習し

よう。 $f \in \Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ - 係型形式 とする。 $\Delta = \Gamma \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ とおくと f は Γ による Δ -不変関数から $f(x+m+iy) = f(x+iy)$ ($m \in \mathbb{Z}$) が成立つ。即ち y を固定すると $x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{R} (= \Delta \setminus N)$ の $\mathbb{C}^n$ -値数である。 所以 $L^2(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}) (= L^2(\Delta \setminus N)) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} e^{2\pi i n x}$ より

$$w_f(y; n) = \int_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}} f(x+iy) e^{-2\pi i n x} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とおくと

$$f(x+iy) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_f(y; n) e^{2\pi i n x}$$

と表わされる。 f から $y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)f = (v^2 - 1/4)f$ を満たす事から $w_f(y; n)$ は

$$\frac{d^2}{dy^2} w_f(y; n) + \left(-4\pi^2 n^2 + \frac{1/4 - v^2}{y^2} \right) w_f(y; n) = 0$$

の解である。この微分方程式の解の基本系として $n=0$ のとき $y^{v+1/2}$, $y^{-v+1/2}$ であり、又 $n \neq 0$ のとき 古典的な意味での Whittaker 関数

$$W_{0,v}(4\pi |n| y) = 2|n|^{1/2} y^{1/2} K_v(2\pi |n| y)$$

$$M_{0,v}(4\pi |n| y)$$

がとれる。 $W_{0,v}(4\pi |n| y) \sim e^{-2\pi |n| y}$, $M_{0,v}(4\pi |n| y) \sim e^{2\pi |n| y}$

($y \rightarrow +\infty$) と増大度条件 (iii) を考慮すると $a_0, b_0, a_n (n \neq 0) \in \mathbb{C}$ が存在し、 $w_f(y; 0) = a_0 y^{v+1/2} + b_0 y^{-v+1/2}$, $w_f(y; n) = a_n W_{0,v}(4\pi |n| y)$

と書ける事が分る。よって次を得る。

$$f(x+iy) = a_0 y^{v+1/2} + b_0 y^{-v+1/2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} a_n W_{0,v}(4\pi |n| y) e^{2\pi i n x}$$

3°) $L^2(\Delta \backslash N)$ の既約分解に応じた保型形式の Fourier 展開.

F を定義して与えられた G 上の Γ -保型形式とする. $P \in Q$ 上定義された G の放物型部分群の実有理点のなす群とし N を P の中核基とする. N は単連結中核リ-群であり $\Delta = \Gamma \backslash N$ は N の離散部分群で $\Delta \backslash N$ はコンパクトである. $g \in G$ を固定すると $F^g(n) = F(n, g)$ は N 上の Δ -不変な C^∞ -関数であり従って $L^2(\Delta \backslash N)$ の元と見える. R_Δ は N の $L^2(\Delta \backslash N)$ 上の右正則表現を表わす. ユニタリ表現 $(R_\Delta, L^2(\Delta \backslash N))$ の既約分解を行い各既約成分から自然な基底を選ぶことにより $L^2(\Delta \backslash N)$ の基底を構成し それに因して $F^g(n)$ を展開する事を考える.

$L^2(\Delta \backslash N)$ の既約分解

$\hat{N}$ は N の既約ユニタリ表現の同値類の集合を表わす. $\pi \in \hat{N}$ は N の Lie 環, π^* は π の双対空間. Ad' は N の π^* への余随伴表現 即ち $\text{Ad}'(n)\lambda = \lambda \circ \text{Ad}(n^{-1})$ ($n \in N, \lambda \in \pi^*$) とする.

$\lambda \in \pi^*$ とし f が λ に於ける実 polarization とは f が π の部分環で $\lambda([f, f]) = (0)$ を満たすもののうち最大なる事をいう. 実 polarization f に対し $H = \exp f$ (対応する N の連結部分群) とし H の 1 次元ユニタリ表現 $\psi_\lambda \in \hat{H}(\exp X) = \exp(2\pi i \lambda(X))$ ($X \in f$) で定める. このとき誘導表現

$\pi_{(\lambda, f)} = \text{Ind}_H^N(\psi_\lambda)$ は 既約ユニタリ表現で その同値類は λ を通る余随伴軌道にのみ依る. 従って N の任意の既

のユニタリ表現は ある $\pi_{(\lambda, f)}$ と同値である事が知られてい

る。そこで $\pi_{(\lambda, f)}$ の表現空間 $\mathcal{B}_{(\lambda, f)}$ は

$$\mathcal{B}_{(\lambda, f)} = \{ \phi : N \rightarrow \mathbb{C} \mid \phi(hn) = \chi_\lambda(h) \phi(n) \ (h \in H), \int_{H \backslash N} |\phi|^2 d\mu < \infty \}$$

で与えられる事を注意しておく。 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ と λ における実 polarization f の対 (λ, f) への N の作用 E

$$K \cdot (\lambda, f) = (\text{Ad}'(K)\lambda, \text{Ad}(K)f) \quad (K \in N)$$

により定まる。このとき $\pi_{(\lambda, f)}$ と $\pi_{K(\lambda, f)}$ は同値で同値

で与える写像は $\mathcal{B}_{(\lambda, f)} \ni \phi \mapsto \phi \in \mathcal{B}_{K(\lambda, f)}$ (但し $\phi(n) = \phi(K^{-1}n)$) で与えられる。対 (λ, f) が有理対で

あるとは $\Delta \cap H \backslash H$ が compact で $\chi_\lambda|_{\Delta \cap H} = 1$ が成立
すといえる。有理対 (λ, f) に対し

$$A_{(\lambda, f)}(\phi)(n) = \sum_{\Delta \cap H \backslash \Delta \ni \delta} \phi(\delta n) \quad (\phi \in \mathcal{B}_{(\lambda, f)})$$

とおけば $A_{(\lambda, f)} \in \text{Hom}_N(\mathcal{B}_{(\lambda, f)}, L^2(\Delta \backslash N))$ と言える。

実際次が成立す。

定理 (Richardson-Howe) $\hat{N} \ni \pi_{(\lambda, f)}$ の $L^2(\Delta \backslash N)$ に対する重複度は $m_\Delta(\pi_{(\lambda, f)}) (= \dim \text{Hom}_N(\mathcal{B}_{(\lambda, f)}, L^2(\Delta \backslash N)))$ と
零と異なり $m_\Delta(\pi_{(\lambda, f)}) > 0$ である必要十分条件は (λ, f) が
有理対である事である。

更に $m_\Delta(\pi_{(\lambda, f)})$ は次のようにして求えられる。先づ
 $\{ K \cdot (\lambda, f) : K \in N \}$ に同値関係 E

$$K_1(\lambda, f) \sim K_2(\lambda, f) \iff \text{Ad}(K_1)f = \text{Ad}(K_2)f \text{ かつ } \text{Ad}'(K_1)\lambda|_{\text{Ad}(K_1)f} = \text{Ad}'(K_2)\lambda|_{\text{Ad}(K_2)f}$$

で与え、その同値類を $[K(\lambda, f)]$ と表わす。 (λ, f) を有理対とし

$Q(\lambda, f) = \{ [K(\lambda, f)] : K(\lambda, f) \text{ は有理対なる集合を考へる。} \}$

(λ, f) が有理対ならば $S(\lambda, f)$ ($S \in \Delta$) も有理対である。従つて Δ は $Q(\lambda, f)$ に作用する。このとき $Q(\lambda, f)$ 中の Δ -軌道の個数を $m_\Delta(\lambda, f)$ とすると

$$m_\Delta(\pi_{(\lambda, f)}) = m_\Delta(\lambda, f)$$

が成立つ。 Δ -軌道の代表系を $\{ [K_j(\lambda, f)] : 1 \leq j \leq m_\Delta(\lambda, f) \}$ と

し $A_{(\lambda, f), j} : \mathcal{B}_{(\lambda, f)} \rightarrow L^2(\Delta \backslash N)$ を

$$A_{(\lambda, f), j}(\phi)(n) = \sum_{\Delta \cap K_j H K_j^{-1} \backslash \Delta \ni \delta} \phi(K_j^{-1} \delta n)$$

で定めると $\{ A_{(\lambda, f), j} : 1 \leq j \leq m_\Delta(\lambda, f) \}$ は $\text{Hom}_N(\mathcal{B}_{(\lambda, f)}, L^2(\Delta \backslash N))$ の基底をなす。特に λ にあつた polarization f が π に一致する
 場合 $\pi_{(\lambda, \pi)}$ は 1 次元で $\pi_{(\lambda, \pi)} = \psi_\lambda$ である。又 $m_\Delta(\psi_\lambda) > 0$
 となるのは $\psi_\lambda|_\Delta = 1$ のときでこのとき $m_\Delta(\psi_\lambda) = 1$ である。
 異なる場合は $\pi_{(\lambda, f)}$ は ∞ -dim. である。以上より

定理 $L^2(\Delta \backslash N)$ の既約分解は次で与えられる。

$$L^2(\Delta \backslash N) = \bigoplus_{\substack{\psi_\lambda \in \hat{N}_{1\text{-dim.}} \\ \psi_\lambda|_\Delta = 1}} \mathbb{C} \psi_\lambda \oplus \bigoplus_{\substack{[\pi_{(\lambda, f)}] \in \hat{N}_{\infty\text{-dim.}} \\ (\lambda, f) : \text{有理対}}} \bigoplus_{1 \leq j \leq m_\Delta(\lambda, f)} A_{(\lambda, f), j}(\mathcal{B}_{(\lambda, f)})$$

又 $\mathcal{B}_{(\lambda, f)}$ の正規直交基底 $\{ \phi_k^{(\lambda, f)} : k \geq 0 \}$ とすると

$$\{ \psi_\lambda \in \hat{N}_{1\text{-dim.}} : \psi_\lambda|_\Delta = 1 \} \cup \bigcup_{[\pi_{(\lambda, f)}] \in \hat{N}_{\infty\text{-dim.}}, (\lambda, f) : \text{有理対}} \bigcup_{1 \leq j \leq m_\Delta(\lambda, f)} \{ A_{(\lambda, f), j}(\phi_k^{(\lambda, f)}) : k \geq 0 \}$$

は $L^2(\Delta \backslash N)$ の基底となる。

F は G 上の Γ -不変型形式と表す。 $g \in G$ を固定し

$$\omega_F(g; \psi_\lambda) = \int_{\Delta W} F(n_g) \overline{\psi_\lambda(n)} dn \quad (\psi_\lambda \in \hat{N}_{1-\dim} \quad \psi_\lambda|_\Delta = 1)$$

及び $[\pi_{(\lambda, f)}] \in \hat{N}_{m-\dim}$ ((λ, f) : 有理対, $1 \leq j \leq m_\Delta(\lambda, f)$, $k \geq 0$) に対して

$$\omega_F(g; (\lambda, f), j, k) = \int_{\Delta W} F(n_g) \overline{A_{(\lambda, f), j}(\phi_k^{(\lambda, f)})(n)} dn$$

とおけば 次の展開を得る。

$$F(n_g) = \sum_{\psi_\lambda \in \hat{N}_{1-\dim} \quad \psi_\lambda|_\Delta = 1} \omega_F(g; \psi_\lambda) \psi_\lambda(n) \\ + \sum_{\substack{[\pi_{(\lambda, f)}] \in \hat{N}_{m-\dim} \\ (\lambda, f): \text{有理対}}} \sum_{j=1}^{m_\Delta(\lambda, f)} \sum_{k \geq 0} \omega_F(g; (\lambda, f), j, k) A_{(\lambda, f), j}(\phi_k^{(\lambda, f)})(n).$$

例 1. $G = SL_3(\mathbb{R})$ 又は $GL_3(\mathbb{R})$, $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z})$ $N = \{n(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ & 1 & x_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ とする。 $\Delta = \{n(m_1, m_2, m_3) : m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\}$ とある。 $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$ とおけば N の Lie 環は $\mathcal{N} = \mathbb{R}E_1 \oplus \mathbb{R}E_2 \oplus \mathbb{R}E_3$ とある。 $\mathcal{N}^* \subset \mathbb{R}^3$ は $\mathcal{N}^* \ni \lambda \mapsto (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ (但し $\lambda_i = \lambda(E_i)$ ($1 \leq i \leq 3$)) と同視する。 すると $\hat{N} = \hat{N}_{1-\dim} \cup \hat{N}_{m-\dim}$ は次のように表される。

$$\hat{N}_{1-\dim} = \{ \psi_{(\lambda_1, \lambda_2, 0)} : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}, \quad \psi_{(\lambda_1, \lambda_2, 0)}(n(x_1, x_2, x_3)) = e^{2\pi i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}$$

であり $\mathcal{F} = \mathbb{R}E_2 \oplus \mathbb{R}E_3$ である。

$$\hat{N}_{m-\dim} = \{ [\pi_{(0, 0, \lambda_3)}, \mathcal{F}] : \lambda_3 \in \mathbb{R} - \{0\} \}$$

である。 $P_{\chi(0,0,\lambda_3),f}$ は $L^2(\mathbb{R})$ と同値である $\pi_{(0,0,\lambda_3),f}$ は

$$\pi_{(0,0,\lambda_3),f}(\eta(x_1, x_2, x_3))\phi(u) = e^{2\pi i \lambda_3(x_3 + u x_2)} \phi(u + x_1) \quad \phi \in L^2(\mathbb{R})$$

である。又 $m_\Delta(\psi_{(\lambda_1, \lambda_2, 0)}) > 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2$ である。

$m_\Delta(\pi_{(0,0,\lambda_3),f}) > 0 \Leftrightarrow \lambda_3 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ が成立する。 $\lambda_3 \neq 0$ である。

$= |\lambda_3|$ である。更に $0 \leq j \leq |\lambda_3| - 1$ に対して

$$A_{(0,0,\lambda_3),f,j}(\phi)(\eta(x_1, x_2, x_3)) = e^{2\pi i \lambda_3 x_3} \sum_{m \in \mathbb{Z}, m \equiv j \pmod{|\lambda_3|}} e^{2\pi i m x_2} \phi(x_1 + m/\lambda_3)$$

(但し $\phi \in L^2(\mathbb{R})$)

である。 $L^2(\mathbb{R})$ の正規基底として $\{c_k e^{-\pi u^2} H_k(u); k \geq 0\}$ (H_k は k 次

エルミット多項式) をとれば上の被積分関数は「 τ - η -被積分関数」である。

従って $G = SL_3(\mathbb{R})$ 上の $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z})$ -保型形式は「 τ - η -被積分関数

を用いて展開される。

例 2. $G = Sp(2, \mathbb{R})$, $\Gamma = Sp(2, \mathbb{Z})$ $N = \left\{ \begin{bmatrix} I_2 & X \\ & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & \\ & U^{-1} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ & 1 \end{bmatrix} \right\}$ (N は G の極小放物部分群の中核), $\Delta = \Gamma \cap N$.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & \\ & 0 & & 1 \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & c \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば $\pi = \bigoplus_{1 \leq i \leq 4} \mathbb{R} E_i$, $\pi^* \ni \lambda \mapsto (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ と

$\lambda_i = \lambda(E_i)$ ($1 \leq i \leq 4$) とする。 $\hat{N} = \hat{N}_{1-\dim} \cup \hat{N}_{\infty-\dim}$ は

$\hat{N}_{1-\dim} = \{\psi_{(\lambda_1, \lambda_2, 0, 0)} : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$, 又 $\mathfrak{g} = \mathbb{R} E_2 \oplus \mathbb{R} E_3 \oplus \mathbb{R} E_4$ とし

$\hat{N}_{\infty-\dim} = \{\pi_{(0,0,\lambda_3,0),f} : \lambda_3 \in \mathbb{R} - \{0\}\} \cup \{\pi_{(0,\lambda_2,0,\lambda_4),f} : \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_4 \in \mathbb{R} - \{0\}\}$

とすると $m_\Delta(\psi_{(\lambda_1, \lambda_2, 0, 0)}) > 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2$; $m_\Delta(\pi_{(0,0,\lambda_3,0),f}) > 0$

$\Leftrightarrow \lambda_3 \in \mathbb{R} - \{0\}$ である。 $m_\Delta(\pi_{(0,0,\lambda_3,0),f}) = 2|\lambda_3|$; $m_\Delta(\pi_{(0,\lambda_2,0,\lambda_4),f}) > 0$

$\Leftrightarrow \lambda_2 \in \mathbb{Z}, \lambda_4 \in \mathbb{Z} - (0), \lambda_2 \text{ 及 } \lambda_4 \text{ ともに } \mu_2(\pi_{(0, \lambda_2, 0, \lambda_4)}, f) = \#\{0 \leq j \leq |\lambda_4| - 1;$

$j^2 \equiv 0 \pmod{\lambda_4}\}$ と与えられる。表現空間 $\mathcal{H}_{(0, 0, \lambda_2, 0), f}$ 及 $u^\sim$

$\mathcal{H}_{(0, 0, \lambda_2, 0, \lambda_4), f}$ は共に $L^2(\mathbb{R})$ と同一視され (intertwining) 作用素は共に

$$A_{(0, 0, \lambda_2, 0, \lambda_4), f, j}(\phi) \left(\begin{bmatrix} I_2 & X \\ & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ U^\sim \end{bmatrix} \right) = e^{2\pi i \lambda_2 X_2} \sum_{m \in \mathbb{Z}, m \equiv j \pmod{2\lambda_2}} e^{\pi i m X_2} \phi(x_1 + m/2\lambda_2)$$

$(0 \leq j < 2|\lambda_2|) \quad A u^\sim$

$$A_{(0, \lambda_2, 0, \lambda_4), f, j}(\phi) \left(\begin{bmatrix} I_2 & X \\ & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ U^\sim \end{bmatrix} \right) = \exp(2\pi i (\lambda_2 X_2 + \lambda_4 X_4)) \sum_{m \in \mathbb{Z}, m \equiv j \pmod{\lambda_4}}$$

$$\exp 2\pi i (\lambda_4^{-1} m^2 X_4 + 2m X_3) \phi(x_1 + m/\lambda_4)$$

と与えられる。

以下 $\psi_\lambda \in \hat{N}_{1-dim}$ に対しては "Fourier 係数"

$$w_F(g; \psi_\lambda) = \int_{\Delta, N} F(n g) \overline{\psi_\lambda(n)} dn$$

によって考察する。 $w_F(g; \psi_\lambda)$ は

$$\textcircled{1} \quad w_F(n g; \psi_\lambda) = \psi_\lambda(n) w_F(g; \psi_\lambda) \quad (n \in N) \text{ かつ右 } K\text{-有限}$$

$$\textcircled{2} \quad (Z w_F)(g; \psi_\lambda) = \chi(Z) w_F(g; \psi_\lambda) \quad (Z \in \mathcal{U}^K)$$

$$\textcircled{3} \quad |(D w_F)(g; \psi_\lambda)| \leq C' \|g\|^r \quad (D \in \mathcal{U})$$

を満足する事は容易である。これらの条件をみたす G 上の関数の性質を調べよというのが問題である。以下性質①, ②をみたす G 上の関数を G 上の Whittaker 関数と呼ぶ。

4°) G 上の Whittaker 関数.

以下 N は G の極小放物型部分群 P の中単基, 従って

G の最大中零半連結部分群とする。 $P = NAM \in$ Langlands 分解とすると A は G の半単純元からなる最大 vector 部分群である。 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$, A の Lie 環を $\mathfrak{a}$ とし $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関するルート全体を Σ で表す。 ルート α に対応するルート空間を $\mathfrak{g}^\alpha$ と書く。 正のルートの集合 Σ^+ へ $\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha$ とするよう定める。 対応する単純ルートの集合を Π で表す。 ルート系 Σ のワイル群を W で表す。 $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ とする。

定義 N の 1 次元ユニタリ表現 ψ_λ が非退化とは λ の各単純ルート空間 $\mathfrak{g}^\alpha$ への制限 λ_α が non-zero のときを言う。

以下非退化指標の場合に限る。 というのは一般の指標の場合はより次元の低い群に於ける非退化指標の話に帰着するからである。 K を G の極大コンパクト部分群とし右 K -不変な Whittaker 関数を扱う。 $\nu \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ ($= \mathfrak{a}$ の複素双対空間) は $\mathcal{U}^K$ から $\mathbb{C}$ への algebra 準同型 χ_ν を定める。 しかも $\chi_{s\nu} = \chi_\nu$ ($s \in W$) である事が知られてゐる。 そこで

$$C^\infty(G/K; \chi_\nu, \psi_\lambda) = \{ w \in C^\infty(G) : w(n_g k) = \psi_\lambda(n) w(g), Zw = \chi_\nu(Z) w, Z \in \mathcal{U}^K \}$$

と置き $C^\infty(G/K; \chi_\nu, \psi_\lambda)$ の元を右 K -不変 Whittaker 関数と呼ぶ。

定理 $\dim C^\infty(G/K; \chi_\nu, \psi_\lambda) = |W|$ (= ワイル群 W の位数) 更に $\dim \{ w \in C^\infty(G/K; \chi_\nu, \psi_\lambda) : \text{増大度条件 } |Dw(g)| \leq C \|g\|^r \ (D \in \mathcal{U}) \} \leq 1$.

以下右 K -不変 Whittaker 関数の構成について述べる。 岩沢分

解 $G = NAK$ を考慮すれば G 上の Whittaker 関数は A 上の値を定めればよい。 $L^+ = \{m = \sum_{i=1}^l m_i \alpha_i : m_i \in \mathbb{Z}_+\}$ とする。各 $m \in L^+$ に対し $\mathcal{O}_c^*$ 上の有理関数 $A_m(v)$ を $A_0(v) = 1$, $(\langle v, m \rangle + \langle m, m \rangle) A_m(v) = \sum_{i=1}^l A_{m-\alpha_i}(v)$, $m \in L^+ - (0)$ なる漸化式の解とする。 $A_m(v)$ は 1 変数である。 $\rho \in \mathcal{O}_c^*$ を $\rho = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha$ (但し $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}^\alpha$) とする。 $q \in \mathcal{O}$ とし A 上の関数 V

$$V(\exp q : v, \psi_\lambda) = e^{(\rho + \rho)(q)} \sum_{m \in L^+} (2\pi)^{-\sum m_i} \prod_{i=1}^l \|\lambda_{\alpha_i}\|^{2m_i} A_m(v) e^{2m(q)}$$

を定義する。これは G 上の関数に $V(nak : v, \psi_\lambda) = \psi_\lambda(n) V(a : v, \psi_\lambda)$ で延長する。 $v \in \mathcal{O}_c^*$ が一般の位置にあるとき

定理 $\{V(q, sv, \psi_\lambda) : s \in W\}$ は Whittaker 関数の空間 $C^\infty(G/K, \chi_v, \psi_\lambda)$ の基底をなす。

例 1 α -root 系 Σ が (A_2) 型の場合 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 2$ と正規化する。又 $\nu_{\alpha_i} = \langle v, \alpha_i \rangle / \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$ ($i=1, 2$) とおく。このとき $A_m(v) = A_{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2}(v)$ は具体的に次で与えられる。

$$A_m(v) = \frac{\prod_{k=1}^{m_1+m_2} (\nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2} + k)}{2^{m_1+m_2} m_1! m_2! \prod_{k=1}^{m_1} (\nu_{\alpha_1} + k) \prod_{k=1}^{m_2} (\nu_{\alpha_2} + k) \prod_{k=1}^{m_1} (\nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2} + k) \prod_{k=1}^{m_2} (\nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2} + k)}$$

例 2 G が実階数 1 のとき $\Sigma = \{\pm \alpha, \pm 2\alpha\}$, $\Pi = \{\alpha\}$, $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ と正規化する。このとき $A_{m\alpha}(v) = (2^m m! \prod_{k=1}^m (\nu_\alpha + k))$ ($m \in \mathbb{Z}_+$) によって

$$V(\exp q : v, \psi_\lambda) = \Gamma(\nu_\alpha + 1) (\pi \|\lambda\|)^{-\nu_\alpha} (e^{q(\frac{1}{2})})^{2\nu_\alpha + m_{2\alpha}} I_{\nu_\alpha}(2\pi \|\lambda\| e^{q(\frac{1}{2})}).$$

こゝに $I_\nu(z)$ は 1 種変形 Bessel 関数 である。

増大度条件 (3) を満たす Whittaker 関数は 次の積分で与えられる (= Whittaker 積分) 関数である。

$$W(g; \nu, \psi_\lambda) = \int_N 1_\nu(s_0 n g) \overline{\psi_\lambda(n)} dn$$

こゝに $s_0 \in W$ (最長元), $\lambda \in G$ の関数 1_ν は 右次分解を用

いて $1_\nu(na) = \exp(\nu + \rho)(\log a)$ で与えられる。

定理 (i) $W(g; \nu, \psi_\lambda)$ は ν に 対し 整関数で $g \in G$ の 変数
として $C^\infty(G/K; \nu, \psi_\lambda)$ に 属し $\lambda > 0$ 増大度条件 (3) を 満たす。
(ii) 各 $s \in W$ に 対し ν の 有理型関数 $M(s, \nu, \psi_\lambda)$ が 存在し
て 関数等式

$$W(g; \nu, \psi_\lambda) = M(s, \nu, \psi_\lambda) W(g; s\nu, \psi_\lambda)$$

が 成立 する。

(iii) $W(g; \nu, \psi_\lambda)$ は 基底 $\{V(g; s\nu, \psi_\lambda) : s \in W\}$ を 用いて

$$W(g; \nu, \psi_\lambda) = \sum_{s \in W} M(s, \nu, \psi_\lambda) C(s, \nu) V(g; s\nu, \psi_\lambda)$$

と 表わ せる。

こゝに $C(\nu)$ は Harish-Chandra の c -関数 と 呼ば れる。 $C(\nu)$

及び $M(s, \nu, \psi_\lambda)$ は 具体的に Γ -関数の 積 で 表わ される。

例 1. G : 実階数 1 の とき

$$W(\exp g; \nu, \psi_\lambda) = d(\nu) (e^{\alpha(g)})^{2\gamma_{M_0} + m_{2\alpha}} K_{\nu_\alpha}(2\pi \|\lambda_\alpha\| e^{\alpha(g)})$$

但し $K_\nu(z)$ は ν 変 ~~Bessel 関数~~ Bessel 関数, 又

$$d(\nu) = \frac{2^{-(\nu_\alpha + m_\alpha/2 + m_{2\alpha} - 2)} \pi^{\nu_\alpha + (m_\alpha + m_{2\alpha} + 1)/2} \|\lambda_\alpha\|^{\nu_\alpha}}{\Gamma(2^{-1}(\nu_\alpha + m_\alpha/2 + 1)) \Gamma(2^{-1}(\nu_\alpha + m_\alpha/2 + m_{2\alpha}))}$$

である。

例2. $G = GL_3(F)$ 但し $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ $d = \dim_{\mathbb{R}} F = 1, 2, 4$.

この場合

$$W(\exp q \cdot \nu, \psi_\lambda) = \frac{2^2 \pi^{2(\nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2}) + 3d/2} (\|\lambda_{\alpha_1}\| \|\lambda_{\alpha_2}\|)^{\nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2}}}{\Gamma(\nu_{\alpha_1} + d/2) \Gamma(\nu_{\alpha_2} + d/2) \Gamma(\nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2} + d/2)}$$

$$\times e^{(S_0 \nu + S + (\nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2})(\xi_1 + d_2))(\xi)} \int_0^\infty K_{\nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2}}(e^{\alpha_1(\xi)} 2\pi \|\lambda_{\alpha_1}\| (1+r)^{1/2}) K_{\nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2}}(e^{\alpha_2(\xi)} 2\pi \|\lambda_{\alpha_2}\| (1+r)^{1/2}) r^{(\nu_{\alpha_2} - \nu_{\alpha_1})/2} d^* r$$

(II) 物理に登場する Whittaker 関数 -- (量子円格子)

1 直線上 n 個の同一种子が相互作用をしながら運動してゐる量子系で相互作用を記述する Hamiltonian が

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \eta_j^2 e^{2(q_j - q_{j+1})} \quad (\text{on } L^2(\mathbb{R}^n))$$

で与えられる量子円格子とみる。ここで $q_1, \dots, q_n$ は n 個の粒子の位置座標を表す。又 $\eta_1^2, \dots, \eta_{n-1}^2 > 0$ は結合定数である。 $(n-1)$ 個の異なる結合定数の組 $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) = \eta$ を用いて $GL_n(\mathbb{R})$ の極大中間部分群 $N = \{ \begin{bmatrix} * & & \\ & * & \\ & & 1 \end{bmatrix} \}$ の

非退化指標 ψ_η かつ $\psi_\eta\left(\begin{bmatrix} x_{ij} \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \exp\left(i\sum_{j=1}^{n-1} \eta_j x_{j,j+1}\right)$ と定義する。又 $\mathbb{R}^n \ni (q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{Q} = \{\text{diag}(q_1, \dots, q_n)\}$ と同一視する。こゝに $\mathcal{Q}$ は $GL_n(\mathbb{R})$ の極大 $\mathbb{R}$ -split torus A の Lie 環である。 $W(q: \nu, \psi_\eta) \in GL_n(\mathbb{R})$ 上の (K -不変) Whittaker 関数で増大度条件 (3) を満たすものとする。 $\mathcal{Q}$ 上の関数 $K(q: \nu, \psi_\eta) \in$

$$K(q: \nu, \psi_\eta) = e^{-J(q)} W(\exp q: \nu, \psi_\eta) \quad (q \in \mathcal{Q})$$

で定義しよう

定理 (i) H は $L^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathcal{Q})$ 上の正值自己共役作用素。

$$(ii) \quad H K(q: \nu, \psi_\eta) = \frac{1}{2} \|\nu\|^2 K(q: \nu, \psi_\eta) \quad \nu \in \mathcal{Q}^*(\mathbb{R}^n).$$

$$(iii) \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ に対し}$$

$$(Kf)(\nu) = \int_{\mathbb{R}^n} f(q) \overline{K(q: \nu, \psi_\eta)} dq$$

とみると一般固有関数展開

$$f(q) = \int_{\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}_n} (Kf)(\nu) K(q: \nu, \psi_\eta) |c(\nu)|^{-2} d\nu$$

を得る。

$$(iv) \quad H \text{ のスペクトルは連続で } \sigma(H) = [0, +\infty)$$

$$(注) \quad |c(\nu)|^{-2} = \left| \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\nu_i - \nu_j) \tanh \pi(\nu_i - \nu_j)/2 \right|$$

これまで ~~述べた~~ 述べた事は一般にルート系に付随した量子戸田格子の場合にも同様に成りつか、紙数が尽きたので省略する。