

12~15 次交代群の特徴づけ。

(ハ牧宏美氏の結果)

東大 教養 近 藤 武

1. 本稿は、ハ牧宏美氏の $n=12, 13, 14, 15$ 次の交代群の特徴づけに関する講演の報告である。講演の際は証明の重要な点の説明をハ牧氏特有の超スピードで話され、例えば G. Glauberman の比較的新しい重要な結果の引用なども 'G' とも云及せずに進むと云った調子であった。筆者のように内容をあらかじめ知っていた者は別にして、他の人にとってはそのスピードのみが印象に残った事と思われる。以下、ハ牧氏の結果およびその方法の要点を少し一般的立場から、 $n=12, 13$ の時を主として報告する。まず用いる記号を定めておこう。

A_{4n} を $4n$ コの文字 $\{1, 2, \dots, 4n\}$ の上の交代群で

$$\alpha_n = (1, 2)(3, 4) \cdots (4n-1, 4n)$$

とおく。 α_n は A_{4n} の 2-シロー群の中心の位数 2 の元である。

$$H(n) = C_{A_{4n}}(\alpha_n),$$

$$\pi_k = (4k-3, 4k-2)(4k-1, 4k) \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$\pi'_k = (4k-3, 4k-1)(4k-2, 4k)$$

$$S = \langle \pi_1, \pi'_1, \dots, \pi_n, \pi'_n \rangle$$

とみると, S は $H(n)$ の位数 2^{2n} の基本アーベル群である。

重要な事は, S の性質をもつ事である。

(*) $H(n)$ の位数 2^{2n} の基本アーベル群は, $H(n)$ で S と共役であり, S を含む $H(n)$ の 2-群は S を正則化する

2. $G(n)$ を次の性質をもつ有限群とする。

(2,1) $G(n)$ は指数 2 の部分群をもたない

(2,2) $G(n)$ の 2-シロー群の中心の位数 2 の元 α_n で

$$C_{G(n)}(\alpha_n) \cong H(n)$$

なるものが存在する。

以下簡単のため $C_{G(n)}(\alpha_n)$ と $H(n)$ を同一視する事にしよう。

そこで次の問題 (P_n) を考える。

(P_n) $G(n) \cong A_{4n}$ または A_{4n+1} であるか?

ハヌ化はこの問題の $n=3$ の場合に次の結果を証明された。

群 H に対して $\lambda(H) = \text{位数 2 の共役類の数}$ を表わすと,

定理 (i) $G(3) \cong A_{12}$ または A_{13} であるか或いは,
 (ii) $\lambda(G(3)) = 4$.

注意 (α) $\lambda(A_{12}) = \lambda(A_{13}) = 3$ であるから, 定理は A_{12}, A_{13} の特徴づけを与えている。

(β) (ii) を満たす群は存在する。実際 2 の元を持つ有限体上の 6 次元シンプレクティック群 $Sp_6(2)$ は条件 $(2, 1)$ $(2, 2)$ を満たし、 $\lambda(Sp_6(2)) = 4$ である。しかしながら $\lambda(G(3)) = 4$ なる群 $G(3)$ は $Sp_6(2)$ に限られると思われる。実際ハ根化は引き続きこの問題に取り組んでおられ可成りの進展をみているようである。(最近ハ根化はこの問題を真定的に解決された。)

(γ) (P_1) は K. A. Fowler によって解かれ、 (P_2) は D. Held が解決した。(J of Alg 7, (1967) 218-237) ただし (P_2) の時には、 $G(2)$ としては、 A_8, A_9 の他に $A_8 \cong GL(4, 2)$ の或る放物的部分群が出て来る。

(δ) 明らかに $4n+2$ 次又は $4n+3$ 次の交代群に対して、 (P_n) に対応する問題が考えられる。報告の都合上この問題を

(P_n^0)

で表わす事にしよう。 (P_n^0) は一般の n に対して解決されているか(原田氏の報告参照) 問題 (P_n) はハ根化の $n=3$ の場合の、最良の結果である。

3. (P_n) ((P_n^0) のも同じ) を解く際に必要な事は、次の2つである。

(I) $G(n)$ の位数 2 の元の fusion を決定する事。

(II) $G(n)$ の位数 2 の各元の中心化群を決定する事。

ハサニ氏は $n=3$ の時に、I, II を大変な計算の結果、解決した。特に II を実行する方法は 些細な工夫を加えれば、 $n \geq 3$ の時にも適用可能なもので、この事柄 (P_n^I) を解くのに大きな寄与をした事を特に強調しておきたい。事実現在では、 $n > 3$ の時に (I) を解きさえすれば (P_n^I) は直ちに解決される状態になっている。従って以下 内題 (I) を主として話を進める事にする。

4. まず最初に (I) を解く際の基本的注意としておく。

(I) を解くには 次の ($\tilde{I}$) を解けば良い。

($\tilde{I}$) 正規化群 $N_{G(n)}(S)$ を決定せよ。

実際、 $H(n)$ の構造から、 $G(n)$ の位数 2 の元は、 S の因子元と共役であり、 S の性質 (*) から、 S の 2 つの元が $G(n)$ で共役である事と $N_{G(n)}(S)$ で共役である事は同値である。この事は ($\tilde{I}$) を解けば (I) が解ける事を示している。(実際には、(I) が解ければ ($\tilde{I}$) が解ける。即ち (I) と ($\tilde{I}$) は同値な問題である。)

さて、ハサニ氏の $n=3$ の場合には、 $N_{G(3)}(S)/S$ の 2-シロ-群が位数 8 の正多面体群である事から、Gorenstein-Walter の定理 (Illinois Jour Vol 6 553-593 (1962)) および $H(3)$ の構造を用いて、 $N_{G(3)}(S)/S$ の可能な構造が非常に

制限される。一般化はこの事を手掛かりとして、 $G(3)$ の 2 シロ
一群の具体的構造を殆んど全て使って、 $G(3)$ の位数 2 の
元の fusion に 2通りの可能性のある事を証明されたのであ
る。容易に推察される様に $n=3$ の時のこの方法は、 $n>3$
の時には適用不可能である。($n=3$ の特殊性を最大限に利
用しているから。)

5. 最後に (P_n^0) に対して (I) が解け、 (P_n) に対して (I)
が解決していない事情を少し見てみよう。以下 $n \geq 3$ とする。
($n \leq 2$ では成立しない事が出て来る!)

$H(n)$ の位数が 2 を基の最大正規部分群を M とする。 M は位数
 2^{2n-1} の基本アーベル群である。

$$J = S \cdot M$$

とおく。 (P_n^0) に対しても J にあたるものを全く同様に定
義してこれを

$$J^0$$

で表わそう。

(P_n^0) に対して (I) が解けた理由は一言にして云えば、

「 J^0 が 考えている群の 2 シロ一群の Thompson 部分群
である」

と云う事を最大限に利用出来たからであると言えろ。 (P_n) の

時には, Thompson 部分群は S であって, S は J と同じ役割りを果し得ない。ところで J は 位数 2^{3n-1} , 級 2 の中零部分群であって, G の各 2-シロー群の中にこの性質をもつ部分群は一つしかない。従って J は 2-シロー群の中の特別な位置を占めている部分群である。しかしながら, これだけでは J が (P_n) に対して果した役割りを J にさせる為には不十分である。と云うのは, (P_n) の時は J が Thompson 部分群である事から「考えている群の 2-部分群 V とそれを含み 2-部分群 L が与えられたとき, V が位数 2^{2n} のアーベル群で生成されていれば V は L に含まれる」と云う事が分かるのに反して (P_n) に対してはこの様な命題が直ちに成り立たないからである。例えば, 「 G の J を含み 2-シロー群を D とする時, J は S を含み D の全ての級 2 の中零部分群で生成されている」と云う様な事が真ならば, 事は簡単であるが不幸にしてこれは真ではない。しかし J が (I) を解くのに相当大切な役割りを果す事は確からしく思われたが, 現時点では (P_n) に対して (I) を解く為には何か一つアイデアが欠けていると思われる。