

混合体モデルに基づく圧縮性流体と移動する固体の熱連成計算手法

鳥生 大祐¹・牛島 省²

¹正会員 博(工) 京都大学学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)
E-mail: toriu.daisuke.8v@kyoto-u.ac.jp

²正会員 工博 京都大学学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)
E-mail: ushijima.satoru.3c@kyoto-u.ac.jp

本研究では、既報で提案した圧縮性流体と固体の熱連成計算手法に改良を加え、流体と移動する固体の間で密度や比熱、熱伝導率などの物性値が異なる問題にも適用可能な手法を提案した。この手法では、多相場を1つの混合体としてモデル化し、平均化された混合体の基礎方程式に部分段階的な圧縮性流体解法を適用することで、流体領域の対流と固体内部の熱伝導を統一的に計算する。固体の物性値については、多相場の流速や熱流束を計算する段階で考慮される。提案した手法は、静止した正方形固体を含むキャビティ内の自然対流に適用され、加熱面の平均ヌセルト数について既往研究結果との比較を行った。また、与える温度差を大きくして圧縮性の影響がより顕著となる条件や固体が移動する条件で数値実験を行い、提案した手法の適用性を検討した。

Key Words : mixture model, compressible fluid, moving solid, thermal fluid-solid interaction

1. 緒言

流体と固体の熱連成問題は工学上の重要な研究課題であり、数値解析的な検討がこれまでに数多く行われている。このような流体と固体の熱連成計算手法に関する既往の研究では、流体の体膨張係数 β と与える温度差 ΔT の積が $\beta \Delta T \ll 1$ となるような条件の下、流体を非圧縮性流体として扱う場合が多い。しかし、例えば大きな温度差によって高浮力流れが生じる場合や、密閉性の高い領域内部から高温・高圧ガスが流出する場合には、非圧縮性を仮定した手法で妥当な結果を得ることは難しく、流体の圧縮性を考慮する必要がある。したがって、このような問題を扱う際には、圧縮性流体と固体の熱連成を妥当にモデル化した計算手法が必要となる。流体の圧縮性を考慮した既往の研究例としては、例えば、Yamamoto ら^{1,2)} や Qi ら³⁾ などが挙げられるが、著者の知る限り、その数は非圧縮性を仮定した研究に比べると少ない。

このような背景に基づき、著者ら⁴⁾ は既報において、混合体モデル⁵⁾ に基づく圧縮性流体と固体の熱連成計算手法を提案した。提案した手法では、非圧縮性流体と固体の連成計算手法である MICS⁶⁾ を参考にして、多相場を1つの混合体としてモデル化し、平均化された混合体の基礎方程式に対して圧縮性流体解法を適用する。ただし、提案した手法では多相場のモデル化を行う際、流体は理想気体、固体は剛体とし、流体と固体

で物性値の差が十分小さいと仮定している。

このように、多相場について平均化した基礎方程式を用いるため、提案した手法では相境界に適合する計算格子の設定が必要ない。したがって、例えば複数の固体が移動して相互に衝突するような場合でも、単純な直交構造格子を用いて圧縮性流体と移動する固体の熱連成を計算することが可能である。また、圧縮性流体解法としては、低マッハ数流れにも適用可能な TCUP 法⁷⁾ に対して質量の保存性に改良を加えた解法⁴⁾ を用いている。

流体を圧縮性流体として扱う場合には密度の圧力依存性を考慮するため、圧縮性流体解法では音速に基づく CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件⁸⁾ によって計算の時間刻み幅が制限される。したがって、陽的な手法を用いて自然対流のような低マッハ数流れを計算する場合、計算の時間刻み幅が音速に基づいて制限されるため、定常解を得るまでに膨大な計算ステップ数と計算時間が必要となる場合がある。そこで、既報⁴⁾ では基礎方程式の圧力項を陰的に扱い、適切な手順で変数を更新することで音速に基づく CFL 条件を緩和する。これによって、流体の圧縮性を考慮しつつ、予測段階に陽的な手法を用いた非圧縮性流体解法と同程度の時間刻み幅で低マッハ数流れを計算することができる⁴⁾。

以上のようにして既報⁴⁾ で提案された圧縮性流体と固体の熱連成計算手法は、例えば鉛直配置された水平2円柱周りの自然対流などに適用され、実験結果⁹⁾ と

の比較を通じてその妥当性が確認された¹⁰⁾。一方で、先にも述べたように、提案した手法では流体と固体の物性値の差が十分小さいと仮定して多相場をモデル化している。しかし、実用上の問題においては、例えば気体と金属など、密度や比熱、熱伝導率などの物性値が数百から数千倍近く異なる場合もある。このような問題に対し、既報⁴⁾で提案した手法をそのまま用いることは難しい。

そこで本研究では、圧縮性流体と固体間で物性値が異なる問題にも適用可能な手法を新たに提案する。具体的には、固体の物性値を適切に考慮して多相場の流速や熱伝導項による温度変化を計算する手法を提案する。また、提案した手法の適用性を検討するために、まずは固体が静止した問題として Lee & Ha¹¹⁾ が行った正方形固体を含むキャビティ内の自然対流計算に適用し、平均化された基礎方程式を用いて妥当な結果が得られるか確認を行う。次に、固体が移動する場合の数値実験として、回転する正三角形固体周りの熱対流を計算し、固体が移動する場合でも音速に基づく CFL 条件を緩和して安定に計算可能か確認する。なお、本研究で扱う問題では、レイリー数 Ra の範囲は $Ra \leq 10^6$ とし、流体の体膨張係数 β と与える温度差 ΔT の積 $\beta\Delta T$ は最大で 0.3 程度とする。

2. 数値解析手法

(1) 数値解析手法の概要と既報からの改良点

本研究で提案する手法では、図-1 の左図に示されるような圧縮性流体 (流体 1) と固体から構成される多相場を 1 つの混合流体としてモデル化し、平均化された基礎方程式に対して圧縮性流体解法を適用する。既報⁴⁾では、この平均化された基礎方程式を導出する際に流体と固体の物性値の差が十分小さいと仮定していたため、例えば気体と金属を含むような問題を取り扱うことができなかった。そこで本研究では、この物性値に関する適用限界を改善するために、多相場の基礎方程式の導出法とそれを解くための計算手順を改良する。

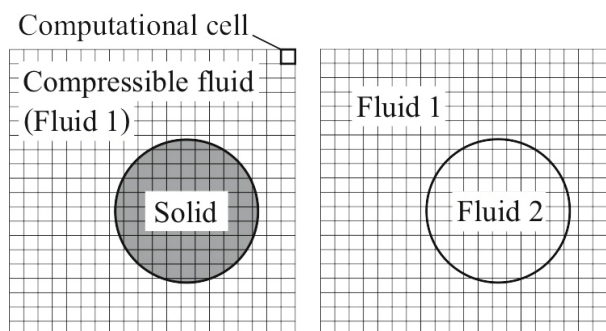


図-1 圧縮性流体と固体から構成される多相場 (左図) とそのモデル化手法の概念図 (右図)

具体的には、図-1 の右図に示されるように、まずは固体部分を流体 1 と物性値が同じで、かつ固体の速度と温度を有する仮想的な流体 2 と仮定する。この流体 1 と流体 2 について、図-1 に示されるような直交構造格子内における各相の体積割合に基づき、平均化された混合流体の基礎方程式を導出する⁴⁾。なお、流体は理想気体、固体は剛体とする。

上述のモデル化に際し、流体 1 と固体間で温度は滑らかに連続するとし、計算格子を固体に対して十分細かく設定することで、各計算格子内に含まれる流体 1 と固体の温度 T_{f1} , T_s の間に $T_{f1} \approx T_s$ の関係を仮定する。また、流体 2 は固体と同じ温度も持つため、 $T_{f2} = T_s$ である。したがって、本研究では流体 1 と流体 2 の温度について $T_{f1} \approx T_{f2}$ と仮定する。これより、以降は各相の温度を統一的に T と表す。なお、本研究では上述のように $T_{f1} \approx T_s$ と仮定するため、例えば既報¹⁰⁾のように温度一定の高温固体周りの自然対流を計算する場合、各計算格子内における流体と固体の温度差を小さくするために、初期状態では流体と固体の温度を同じとし、時間ステップの進行とともに固体の温度を徐々に上昇させていくといった操作が必要となる。

提案する手法では、上記の混合流体に対する基礎方程式の移流、拡散、圧力および外力項を分離し、部分段階的に変数を更新する⁷⁾。固体の物性値については、流体と固体の平均流速と熱伝導項による温度変化の計算段階でのみ考慮される。つまり、固体の物性値を考慮する計算段階では流体 1 と固体、それ以外の計算段階では流体 1 と流体 2 から構成される多相場について平均化された基礎方程式をそれぞれ解く。特に、圧力項の計算段階において流体と固体で物性値に大きな差があると相境界付近で非物理的な圧力の振動が生じる場合がある。そこで、本研究では 2 種類の多相場 (流体 1 と 2, 流体 1 と固体) を計算段階に応じて適切に使い分けることで計算の安定化を図る。

以上のように、本手法では平均化された基礎方程式で流体と固体を統一的に扱うため、例えば複数の固体が移動して相互に衝突する場合でも直交構造格子による熱連成計算が可能である。また、各計算段階で必要に応じて固体の物性値を考慮することで、既報⁴⁾では扱えなかった流体と固体で物性値が異なる問題を計算できる。既報⁴⁾からの改良点である固体の物性値を考慮した基礎方程式の導出法と多相場の平均流速および熱伝導の計算手法については以降にその詳細を示す。

(2) 多相場の基礎方程式

流体 1, 2 から構成される多相場 (図-1 の右図) の基礎方程式として、流体 1, 2 の混合流体に対する質量保存則、運動方程式、エネルギー式を以下に示す⁵⁾。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e u_j)}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3)$$

ここで、 t は時間、 x_i は直交座標系の座標成分、 f_i は外力加速度の x_i 方向成分であり、 ρ 、 u_i 、 σ_{ij} 、 e はそれぞれ混合流体の密度、流速、応力、内部エネルギーである。なお、式 (2)、(3) において、相間の境界面における表面張力と界面エネルギーの混合流体への寄与⁵⁾は十分小さいと仮定し、これらを無視している。また、先にも述べたように、本研究では固体の物性値を考慮して熱伝導による温度変化を計算するために、熱伝導項の計算段階では流体 1 と固体から構成される多相場を対象として計算を行う。したがって、式 (3) に示されるように、流体 1 と流体 2 から構成される多相場の基礎方程式から熱伝導項を除外している。

式 (1)、(2)、(3) の ρ と σ_{ij} は各計算格子内で体積平均された値、 u_i と e は質量平均された値である。なお、本研究では、固体に対して計算格子を十分細かく設定することで、相 k の拡散速度 $w_{k,i}$ ⁵⁾ について $w_{k,i} \approx 0$ が成り立つと仮定する。なお、 $w_{k,i}$ は相 k の流速 $u_{k,i}$ と多相場の平均流速 u_i を用いて $w_{k,i} \equiv u_{k,i} - u_i$ と定義される⁵⁾。例えば、 ρ と u_i は各相の密度、流速を用いて、それぞれ以下のように表される。

$$\rho = \phi_{f1}\rho_{f1} + \phi_{f2}\rho_{f2} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{\phi_{f1}\rho_{f1}u_{f1,i} + \phi_{f2}\rho_{f2}u_{f2,i}}{\phi_{f1}\rho_{f1} + \phi_{f2}\rho_{f2}} \\ &= \frac{1}{\rho}(\phi_{f1}\rho_{f1}u_{f1,i} + \phi_{f2}\rho_{f2}u_{f2,i}) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、下添字 $f1$ は流体 1、 $f2$ は流体 2 を表す。また、 ϕ_{f1} と ϕ_{f2} は流体 1、2 が計算格子内に占める体積割合であり、 $0 \leq \phi_{f1}, \phi_{f2} \leq 1$ かつ $\phi_{f1} + \phi_{f2} = 1$ である。

3次元の複雑形状固体を扱う場合には、例えば四面体サブセル法¹²⁾を用いることで、各計算格子に含まれる固体の体積割合を容易に計算することができる。この四面体サブセル法¹²⁾では、固体を四面体要素の集合体として表現し、計算格子をさらに細かく分割したサブセルがこの四面体要素内に含まれるかを判定して各計算格子内における固体の体積割合を計算する。

流体 1 と流体 2 の混合流体の応力 σ_{ij} については、既報⁴⁾と同様にして以下のようにモデル化する。

$$\sigma_{ij} = \phi_{f1}\sigma_{f1,ij} + \phi_{f2}\sigma_{f2,ij} \approx -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (6)$$

$$\tau_{ij} \approx \mu_f \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu_f \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \quad (7)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、 p は体積平均で表される混合流体の圧力、 τ_{ij} は混合流体の粘性応力、 μ_f は流体 1 および流体 2 の粘性係数である。

流体 1 と流体 2 の混合流体に対する内部エネルギーと温度の関係式は、 e が各相の質量平均で与えられること、各相の定積比熱が等しいことに加え、 $T_{f1} \approx T_{f2} (= T)$ と仮定することで以下のように導出される。

$$\begin{aligned} e &= \frac{\sum_k \phi_k \rho_k C_{V,k} T_k}{\sum_k \phi_k \rho_k} = C_{V,f} \frac{\sum_k \phi_k \rho_k T_k}{\sum_k \phi_k \rho_k} \\ &\approx C_{V,f} T \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、下添字 k は k 相を表し、 $k = f1, f2$ である。また、流体 1 と流体 2 の定積比熱が等しいことより、 $C_{V,f1} = C_{V,f2} = C_{V,f}$ としている。

流体 1 と流体 2 の混合流体に対する状態方程式も上記の e と T の関係式と同様の手順で導出できる。具体的には、 p が各相の体積平均で与えられること、各相の定積および定圧比熱が等しいことに加え、 $T_{f1} \approx T_{f2} (= T)$ と仮定することで以下のように導出される。

$$\begin{aligned} p &= \phi_{f1}p_{f1} + \phi_{f2}p_{f2} \\ &= \phi_{f1}\rho_{f1}(\gamma_{f1} - 1)C_{V,f1}T_{f1} \\ &\quad + \phi_{f2}\rho_{f2}(\gamma_{f2} - 1)C_{V,f2}T_{f2} \\ &\approx (\phi_{f1}\rho_{f1} + \phi_{f2}\rho_{f2})(\gamma_f - 1)C_{V,f}T \\ &= \rho(\gamma_f - 1)C_{V,f}T \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、流体 1、2 の定積および定圧比熱が等しいことより比熱比を $\gamma_{f1} = \gamma_{f2} = \gamma_f$ としている。以上が流体 1 と流体 2 の混合流体に対する基礎方程式である。

2. (1) で述べたように、本研究では固体の物性値を考慮して熱伝導計算を行うために、熱伝導項の計算段階では流体 1 と固体から構成される多相場を対象として計算を行う。したがって、本研究では以下に示される流体 1 と固体の各相に対する熱伝導方程式から多相場の熱伝導方程式を導出する。

$$\frac{\partial(\rho_{f1}C_{V,f1}T_{f1})}{\partial t} = -\frac{\partial q_{f1,j}}{\partial x_j} \quad (10)$$

$$\frac{\partial(\rho_s C_{V,s} T_s)}{\partial t} = -\frac{\partial q_{s,j}}{\partial x_j} \quad (11)$$

ここで、 $q_{f1,j}$ と $q_{s,j}$ は流体 1 と固体の熱流束である。

上記の各相に対する熱伝導方程式を混合体モデル⁵⁾の考えに基づいて平均化すると、以下に示される流体1と固体の混合体に対する熱伝導方程式が得られる。

$$\frac{\partial(\rho C_V)_m T}{\partial t} = -\frac{\partial q_{m,j}}{\partial x_j} \quad (12)$$

ここで、 $(\rho C_V)_m = \phi_{f1}\rho_{f1}C_{V,f1} + \phi_s\rho_s C_{V,s}$ である。また、混合流体の熱流束 $q_{m,j}$ は各相の体積平均で表される。各相についてフーリエの法則を用い、 $T_{f1} \approx T_{f2} (= T)$ と仮定することで、 $q_{m,j}$ と T の関係式が以下のように導出される。

$$\begin{aligned} q_{m,j} &= \phi_{f1}q_{f1,j} + \phi_s q_{s,j} \\ &= -\phi_{f1}\lambda_{f1}\frac{\partial T_{f1}}{\partial x_j} - \phi_s\lambda_s\frac{\partial T_s}{\partial x_j} \\ &\approx -(\phi_{f1}\lambda_{f1} + \phi_s\lambda_s)\frac{\partial T}{\partial x_j} \\ &= -\lambda_m\frac{\partial T}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 λ_m は流体1と固体の混合体の熱伝導率であり、 $\lambda_m = \phi_{f1}\lambda_{f1} + \phi_s\lambda_s$ である。

(3) 計算手順の概要

2. (1)で述べたように、本研究では既報⁴⁾と同様に基礎方程式の移流、拡散、圧力および外力項を分離し、部分段階的に変数を更新する。ただし、本研究では各計算段階における多相場の平均流速の計算や、拡散項の計算段階における熱伝導計算で固体の物性値を考慮する点が既報⁴⁾とは異なる。なお、各計算段階を移流、拡散、音響フェイズと呼ぶこととし⁷⁾、ある時刻の変数 Q^n について各計算段階で更新された値を Q^* 、 Q^{**} 、 Q^{n+1} と表記する。また、本研究において基礎方程式はコロケート格子上で有限体積法を用いて離散化される。以降では、各計算段階における時間進行式や離散化式を示す。

a) 移流フェイズ

移流フェイズでは流体1と2から構成される多相場を対象として計算を行う。移流フェイズにおける時間進行式は以下のように表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\text{Adv}} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} \Big|_{\text{Adv}} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} \Big|_{\text{Adv}} + \frac{\partial(\rho e u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (16)$$

移流フェイズでは、Euler 陽解法を用いて上記の移流方

程式から各変数を更新する。なお、移流項の計算には3次精度のMUSCL型TVDスキーム¹³⁾を用いた。

多相場の平均流速 u_i^* については、式(15)から得られた $(\rho u_i)^*$ より、固体の運動量を考慮して以下のように計算する。

$$u_i^* = \frac{1}{\rho_m} [\phi_{f1}(\rho u_i)^* + \phi_s(\rho u_i)_s] \quad (17)$$

ここで、 $\rho_m = \phi_{f1}\rho^* + \phi_s\rho_s$ である。このように、本研究では多相場の平均流速を計算する際に固体の運動量を用いることで、固体が流れ場に与える影響を考慮する。以降、すべての計算段階において同様の方法で多相場の平均流速が計算される。

圧力の更新については、流体1を含む計算格子では式(9)から p^* を計算する。一方で、固体(流体2)のみを含む、すなわち $\phi_s = \phi_{f2} = 1$ となる計算格子では状態方程式による更新は行わず、 $p^* = p^n$ とする。

b) 拡散フェイズ

拡散フェイズでは、まず流体1と2から構成される多相場を対象とし、式(1)、(2)、(3)の拡散項による変数の変化を計算する。温度については、前述のようにして得られた温度を拡散フェイズにおける中間的な温度 T' とし、流体1と固体の混合体の熱伝導方程式(12)を用いて拡散フェイズの最終的な温度 T^{**} を計算する。なお、具体的な時間進行式と離散化式については後述する。以上、本研究では図-2に示されるように、拡散フェイズにおいて温度は2段階で計算される。

流体1と2の混合流体の基礎方程式(1)、(2)、(3)から拡散項を分離して得られる拡散フェイズの時間進行式を以下に示す。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\text{Diff}} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} \Big|_{\text{Diff}} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (19)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} \Big|_{\text{Diff1}} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (20)$$

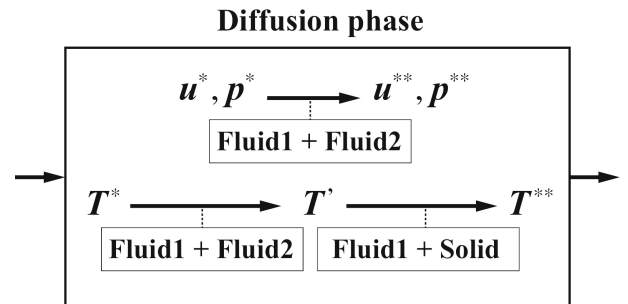


図-2 拡散フェイズにおける変数の更新手順

上記の時間進行式を Euler 陽解法に基づいて時間方向に陽的に離散化し、以下の式から u_i^{**} と T' を計算する。

$$\rho^{**} \frac{u_i^{**} - u_i^*}{\Delta t} = \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j} \quad (21)$$

$$\frac{T' - T^*}{\Delta t} = \frac{1}{\rho^* C_{V,f}} \left\{ \frac{\partial(\tau_{ij}^* u_i^*)}{\partial x_j} - \frac{\rho^* (u_i^{**2} - u_i^{*2})}{2\Delta t} \right\} \quad (22)$$

流体と固体間で物性値が異なる場合にも安定に計算を行うため、流体 1 と固体の混合体の熱伝導方程式 (12) を時間方向に陰的に離散化し、 T' から T^{**} を以下のように計算する。

$$\frac{T^{**} - T'}{\Delta t} = \frac{1}{(\rho C_V)_m^*} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_m \frac{\partial T^{**}}{\partial x_j} \right) \quad (23)$$

ここで、 $(\rho C_V)_m^*$ は以下のように計算される。

$$(\rho C_V)_m^* = \phi_{f1} \rho_{f1}^* C_{V,f1} + \phi_s \rho_s C_{V,s} \quad (24)$$

本研究において固体は剛体と仮定し、 ρ_{f2} は定数とする。これより、式 (24) の $\phi_{f1} \rho_{f1}^*$ は以下のように計算される。

$$\phi_{f1} \rho_{f1}^* = \rho^* - \phi_{f2} \rho_{f2} \quad (25)$$

計算領域内に温度一定の固体領域がある場合には、式 (23) の代わりに以下の式から T^{**} を計算する。

$$\frac{T^{**} - T'}{\Delta t} = (1 - \phi_{sc}) \Theta + \phi_{sc} T_{sc} \quad (26)$$

ここで、 Θ は式 (23) の右辺、 ϕ_{sc} は温度一定の固体が各計算格子に占める体積割合、 T_{sc} は温度一定の固体の温度である。

拡散フェイズにおける流体 1, 2 の各相の圧力変化は、各相の温度変化から以下のように計算される⁷⁾。

$$p_k^{**} - p_k^* = \frac{\gamma_k - 1}{\gamma_k} \frac{\rho_k^* C_{P,k}}{\rho_k^* C_{P,k} \mu_{J,k} + 1} (T_k^{**} - T_k^*) \quad (27)$$

ここで、 $k = f1, f2$, $C_{P,k}$ は k 相の定圧比熱、 $\mu_{J,k}$ は k 相の Joule-Thomson 係数である。本研究において、 $p = \phi_{f1} p_{f1} + \phi_{f2} p_{f2}$ であり、流体 1 と 2 で物性値が同じという仮定と理想気体で $\mu_{J,k} = 0$ を利用すると、拡散フェイズにおける混合流体の圧力変化は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} p^{**} - p^* &\approx \frac{\gamma_f - 1}{\gamma_f} (\phi_{f1} \rho_{f1}^* + \phi_{f2} \rho_{f2}^*) C_{P,f} (T^{**} - T^*) \\ &= \frac{\gamma_f - 1}{\gamma_f} \rho^* C_{P,f} (T^{**} - T^*) \end{aligned} \quad (28)$$

c) 音響フェイズ

音響フェイズでは流体 1 と 2 から構成される多相場を対象とし、式 (1), (2), (3) の圧力項と外力項を分離することで、以下のような時間進行式を得る。

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\text{Acous}} = 0 \quad (29)$$

$$\left. \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} \right|_{\text{Acous}} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} \right|_{\text{Acous}} = - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (31)$$

音響フェイズにおける計算手順は既報⁴⁾と同様であるため詳細は割愛するが、圧力の時間変化は TCUP 法⁷⁾と同様に以下の式から計算する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^{**} a^2} \frac{p^{n+1} - p^{**}}{\Delta t} = \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(- \frac{1}{\rho^{**}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \Delta t + u_i^{**} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、 a は音速であり、 $a^{**} = \sqrt{(\gamma_f p^{**})/\rho^*}$ である。式 (32) に示されるように、本研究では音響フェイズにおける圧力の時間変化を陰的に計算することで音速に基づく CFL 条件を緩和し、予測段階に陽的なスキームを用いた非圧縮性流体解法と同程度の時間刻み幅で低マッハ数流れを計算することが可能である⁴⁾。

3. 正方形固体を含むキャビティ内自然対流

提案した計算手法を Lee & Ha¹¹⁾ が行った正方形固体を含む 2 次元キャビティ内の自然対流計算に適用した。なお、この既往研究¹¹⁾では、計算格子が相境界に適合するように設定され、流体と固体の各相に対する基礎方程式が個別に計算される。また、既往研究¹¹⁾において流体は非圧縮を仮定している。そのため、本研究では、まず非圧縮性流体解法でも妥当な解が得られる程度の小さな温度差による自然対流計算を行い、この既往研究¹¹⁾との比較を行う。その後、流体の圧縮性がより顕著となるように温度差を大きくした条件で数値実験を行い、提案した手法の適用性を検討する。

図-3 に示されるように、計算領域内には流体と物性値が異なる正方形固体が配置され、計算領域の底部壁面温度を T_h 、上部壁面温度を T_c で一定、側面は断熱壁

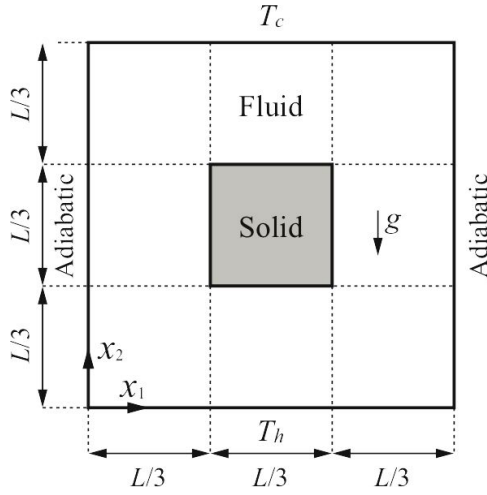


図-3 正方形固体を含む計算領域

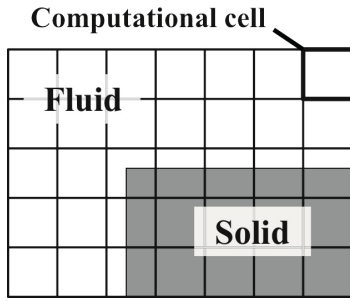


図-4 相境界付近の計算格子

とした。なお、非圧縮性流体解法を用いた既往研究¹¹⁾の結果と比較するために、まずは $\Delta T = T_h - T_c = 5$ [K] ($\beta\Delta T = 0.017$) とした。また、図-3 の g は重力加速度の x_2 方向成分である。正方形固体が各計算格子に占める割合については、固体が静止しており、形状も単純であるため、各計算格子で解析的に算出した。

固体の密度、比熱、熱伝導率はそれぞれ、 $\rho_s/\rho_{f0} = 10$, $C_s/C_{P,f} = 10$, $\lambda_s/\lambda_f = 50$ となるように設定した。ここで、 ρ_{f0} は流体の初期密度、 $C_{P,f}$ は流体の定圧比熱である。初期状態における流体と固体の温度は $(T_h + T_c)/2$ 、流体のプラントル数 Pr は 0.70 とし、計算領域の長さ L を変化させて初期状態におけるレイリー数 Ra が 10^3 , 10^4 , 10^5 , 10^6 の場合について温度分布が定常になるまで計算した。なお、初期状態におけるレイリー数 Ra は以下のように表される。

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu_{f0}\alpha_{f0}} \quad (33)$$

ここで、 ν_{f0} , α_{f0} は初期状態における流体の動粘性係数、熱拡散率である。

各方向の計算格子数は、 $Ra = 10^3$, 10^4 で 100×100 , $Ra = 10^5$, 10^6 で 152×152 とした。先にも述べたように、Lee & Ha¹¹⁾ の既往研究において計算格子は正

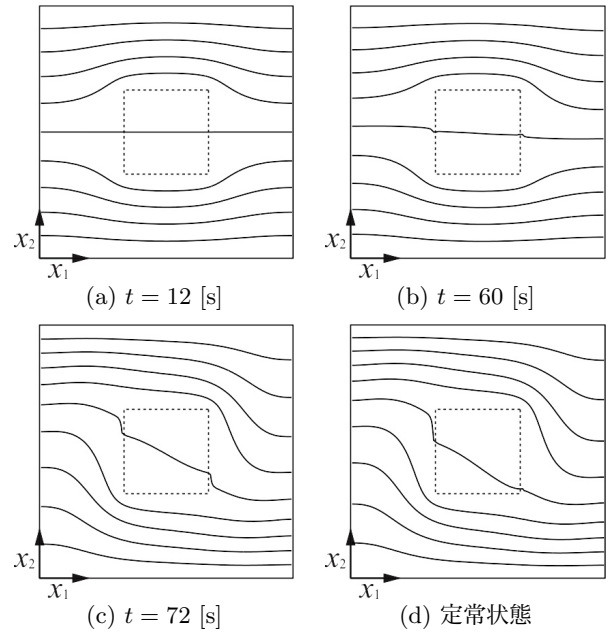


図-5 等温線の時間変化 1 ($Ra = 10^4$)

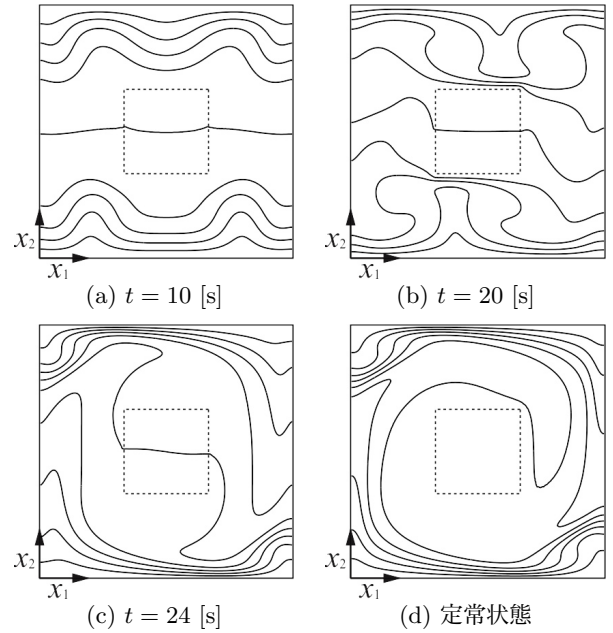


図-6 等温線の時間変化 2 ($Ra = 10^6$)

方形固体の表面に適合するように設定されている。一方で、本研究では平均化された多相場の基礎方程式を解く手法の適用性を検討するために、図-4 に示されるように計算格子の境界面が正方形固体の表面と一致しないように設定した。

図-5、図-6 に Ra が 10^4 と 10^6 の場合の各時刻における等温線を示す。なお、等温線の間隔は $\Delta T/10$ である。図-5(a)、図-6(a) に示されるように、まずは主に熱伝導によって熱が伝わり、流体領域と固体内部の温度が変化して左右対象の温度分布が得られた。その後、自然対流が発生して温度分布の左右対称性が崩れ、定

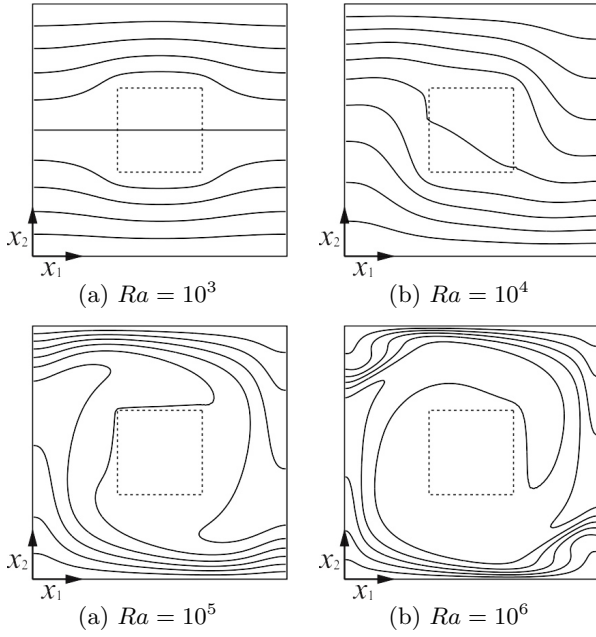


図-7 各レイリー数における定常状態の等温線
(等温線の間隔は $\Delta T/10$, $\Delta T = 5$ [K])

常状態では循環流が発達した温度分布が得られた。なお、本条件では時計回りの循環流が発生したが、 ΔT や計算格子数を変えると逆方向の循環流が発生する場合もある。以上のように、提案した手法では平均化した多相場の基礎方程式を用いて、流体領域の熱対流と固体内部の熱伝導を統一的に計算できることを確認した。

図-7に各レイリー数の条件における定常状態の等温線を示す。なお、等温線の間隔は $\Delta T/10$ である。図-7に示されるように、レイリー数が大きくなるにつれて対流が発達していく傾向が再現されている。

2. (1) および 2. (2) で述べたように、提案した手法では $T_{f1} \approx T_s$ および $u_{k,i} \approx u_i$ ($w_{k,i} = 0$) を仮定するため、計算格子を固体に対して十分細かく設定する必要がある。そこで、各レイリー数の条件において計算格子が十分細かく設定されているか確認するため、定常状態における底部加熱面の平均ヌセルト数 Nu_h と $x_1 = L/2$ における無次元流速の水平方向成分の最大値 U_1 、 $x_2 = L/2$ における無次元流速の鉛直方向成分の最大値 U_2 について、計算格子をさらに細かく設定した結果と比較した。なお、 Nu_h は以下のように計算される。

$$Nu_h = - \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial X_2} \Big|_{X_2=0} dX_1 \quad (34)$$

ここで、 θ と X_i は無次元温度と無次元座標成分であり、 $\theta = (T - T_c)/\Delta T$ 、 $X_i = x_i/L$ である。また、流速の無次元化には $\sqrt{g\beta L \Delta T}$ の値を用いた。

表-1に計算格子数についての比較結果を示す。なお、格子数は $Ra = 10^4$ で 100×100 と 152×152 、 $Ra = 10^6$

表-1 計算格子数による Nu_h , U_1 , U_2 の変化

$Ra = 10^4$			
	Nu_h	U_1	U_2
100×100	1.53	0.103	0.110
152×152	1.52	0.103	0.109

$Ra = 10^6$			
	Nu_h	U_1	U_2
152×152	6.32	0.347	0.390
200×200	6.32	0.347	0.389

表-2 既往研究¹¹⁾との Nu_h の比較

Ra	Nu_h			
	10^3	10^4	10^5	10^6
Present	1.29	1.53	4.04	6.32
Lee & Ha ¹¹⁾	1.28	1.55	3.96	6.31

で 152×152 と 200×200 として比較を行った。表-1に示されるように、格子数を変えても Nu_h , U_1 , U_2 に大きな変化が無いことから、本研究で設定した格子サイズが妥当であることを確認した。

次に、音響フェイズにおいて圧力の計算を陰的に行うことで音速に基づく CFL 条件が緩和されたかを確認するために、各計算格子にけるクーラン数 C_a を以下のように定義し¹⁴⁾、各レイリー数の定常状態における C_a の最大値 $C_{a,max}$ を確認した。

$$C_a = \max \left\{ \frac{|u_1| + a}{\Delta x_1} \Delta t, \frac{|u_2| + a}{\Delta x_2} \Delta t \right\} \quad (35)$$

ここで、 Δt は計算の時間刻み幅、 Δx_i は各方向の計算格子幅である。各レイリー数の定常状態において計算された $C_{a,max}$ は、 $Ra = 10^3$, 10^4 , 10^5 , 10^6 について、それぞれ 3.50×10^2 , 3.90×10^2 , 4.58×10^2 , 4.25×10^2 であった。以上の結果より、音速に基づく CFL 条件が緩和され、陽的な計算スキームを用いる場合に比べて Δt を大きく設定できていることを確認した。

定常状態における Nu_h について、Lee & Ha¹¹⁾ による計算結果との比較を表-2に示す。表-2に示されるように、全てのレイリー数の条件において両者の値が概ねよく一致していることが分かる。以上の結果より、提案した手法では平均化された多相場の基礎方程式を解いて妥当な結果が得られることを確認した。

続いて、 $\Delta T = 100$ [K] ($\beta \Delta T = 0.286$) とし、流体の圧縮性がより顕著となる条件で数値実験を行った結果を示す。なお、レイリー数は $Ra = 10^6$ とした。図-8に定常状態における等温線を示す。等温線の間隔は $\Delta T/10$ である。図-8に示されるように、 $\Delta T = 100$ [K] とした

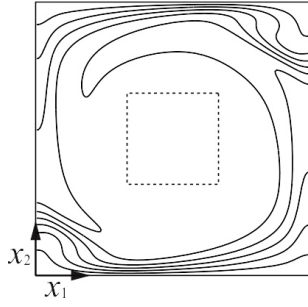


図-8 定常状態における等温線 ($\Delta T = 100$ [K])
(等温線の間隔は $\Delta T/10$)

表-3 ΔT による密度変化の比較

	$\rho/\bar{\rho}_0$	
ΔT [K]	Max	Min
5	1.008	0.992
100	1.157	0.870

場合にも安定に計算を行うことが可能であり、 $\Delta T = 5$ [K] の場合と同様、計算領域内において循環流が発生することを確認した。ただし、発生した循環流の向きは $\Delta T = 5$ [K] の場合とは逆方向であった。なお、定常状態における Nu_h の値は 6.31 であり、 $\Delta T = 5$ [K] の場合と概ね一致した。また、定常状態における $C_{a,max}$ は 2.86×10^2 であった。

温度変化によって計算領域内で生じる流体の密度変化を比較するために、 ρ を初期状態における空間平均密度 $\bar{\rho}_0$ で除した $\rho/\bar{\rho}_0$ を各計算格子で計算した。表-3 に $\rho/\bar{\rho}_0$ の最大、最小値を示す。表-3 に示されるように、 $\Delta T = 5$ [K] の場合、領域内で生じる初期状態に対する密度の変化率は 1% 以下であり、非圧縮性を仮定した解法を用いても問題ないことがわかる。一方、 $\Delta T = 100$ [K] の場合、領域内で生じる初期状態に対する密度の変化率は最大で 15.7% となっている。このように、 ΔT の値が大きくなるほど流体の密度変化も大きくなり、圧縮性の影響が顕著となっていくことを確認した。

4. 回転する正三角形固体周りの熱対流

固体が移動する問題に対する本手法の適用性を検討するために、回転する正三角形固体周りの熱対流を計算した。本数値実験の計算領域を図-9 に示す。図-9 に示されるように、計算領域内には重心点を中心として回転する正三角形固体が設置され、その中心部 (重心点を中心とした半径 r_h の円内) は温度 T_h で一定とする。また、計算領域の境界面は温度 T_c で一定とし、 $T_h = 400$ [K]、 $T_c = 300$ [K] とした。計算領域の長さ L は 5.0×10^{-2} [m] とし、正三角形固体の重心点から各頂点までの長さ

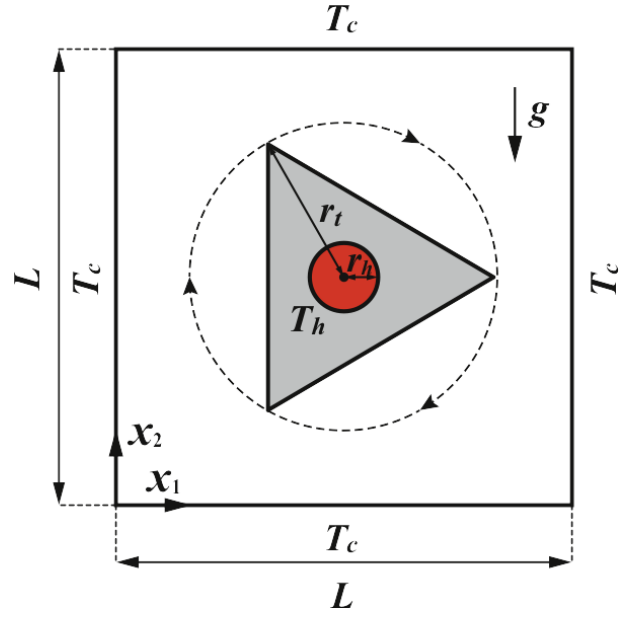


図-9 回転する正三角形固体を含む計算領域

r_t は $L/3$ 、加熱領域の半径 r_h は $3L/40$ とした。また、重力加速度 g は 9.8 [m/s²] とした。

正三角形固体は角速度 ω で時計回りに回転するものとした。初期状態において流体は静止しているため、計算開始時に固体が速度を持つと流速分布に不連続が生じ、これが原因となって固体周りの密度、温度分布が振動する場合がある。そこで、上記のような流速の不連続を緩和するために、 ω を以下のように与えた。

$$\omega = \frac{t}{t_b} \pi \quad (0 \leq t \leq t_b) \quad (36)$$

$$\omega = \pi \quad (t_b < t) \quad (37)$$

なお、本研究では $t_b = 3.0$ [s] とした。以上のように、本研究では固体の回転速度を時刻 t_b までの間に 0 から徐々に増加させていくこととした。

移動する固体が各計算格子に占める割合を計算するために、本研究では四面体サブセル法¹²⁾と同様の手法を利用した。具体的には、各計算格子をさらに細かいサブセルに分割し、そのサブセルの中心点が正三角形固体の内側に含まれるかを判定する。全てのサブセルに対して判定を行った後、固体領域に含まれるサブセルの数から各計算格子に占める固体の割合を計算した。

流体は理想気体の状態方程式を満足する空気、固体は鉄 (Fe) と仮定した。設定した流体 (初期状態)、固体の物性値を表-4 に示す。表-4 に示されるように、本計算では初期状態において固体の密度は流体の密度の 6.73×10^3 倍、固体の熱伝導率は流体の熱伝導率の 3.21×10^3 倍とした。

表-4 流体 (空気, 初期状態) と固体 (鉄) の物性値

	Fluid (air)	Solid (Fe)
ρ [kg/m ³]	1.17	7.87×10^3
λ [W/(m·K)]	2.50×10^{-2}	80.30
C_V [J/(kg·K)]	4.20×10^3	4.42×10^3

以上のような条件の下, 各方向の格子数を 150×150 , 時間刻み幅 Δt を 1.50×10^{-4} [s] とし, $t = 12.00$ [s] まで計算を行った. なお, 代表長さを正三角形固体の1辺として初期状態のレイリー数 Ra を計算したところ, $Ra = 2.51 \times 10^5$ であった. また, 同様に代表長さを正三角形固体の1辺とし, 各時刻において流速ベクトルの大きさ V ($\equiv \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$) の最大値からレイノルズ数 Re を計算したところ, $t = 12.00$ [s] までの計算で得られた Re の最大値は約 3.22×10^2 であった.

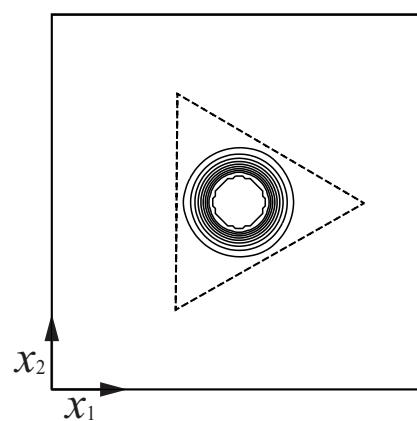
計算で得られた各時刻の等温線を図-10 に示す. なお, 図-10 において等温線の間隔は $(T_h - T_c)/10$, 図中の黒い点線は流体と固体の境界を表す. 図-10 に示されるように, 計算開始とともにまずは熱伝導によって固体内部の温度分布が等方的に変化していく. その後, 固体の表面付近まで熱が伝わり, 周辺の流体が温められて浮力流れが発生した. また, 図-10 (b), (c) から分かるように, 正三角形の固体が回転することで, 頂点付近で固体の回転方向とは逆回りの渦が発生した. なお, 固体の熱伝導率は流体の熱伝導率の 3.21×10^3 倍と大きいため, $t = 12.00$ [s] (図-10 (c)) では固体内部の温度がほぼ一様となった. また, $t = 12.00$ [s] での音速に基づくクーラン数 C_a の最大値は, 1.81×10^2 であった.

以上, 提案した手法を回転する正三角形固体周りの熱対流問題に適用することで, 移動する固体と圧縮性流体の熱連成を直交構造格子上で計算できることを確認した. また, 移動する固体の密度や熱伝導率が流体の約 3,000 ~ 7,000 倍大きな条件で安定に計算できることも併せて確認した.

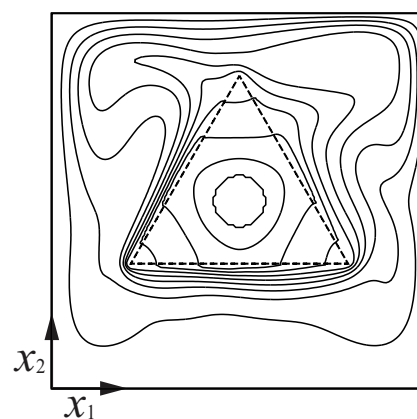
5. 結言

本研究では, 既報⁴⁾で提案した混合体モデルに基づく圧縮性流体と固体の熱連成計算手法に改良を加え, 流体と固体で物性値の異なる場合にも適用可能な手法を提案した. 具体的には, 多相場の流速を計算する際に固体の運動量を考慮し, 熱伝導項による温度変化を計算する際には固体の物性値が反映された熱伝導方程式を用いて計算を行う手法を提案した.

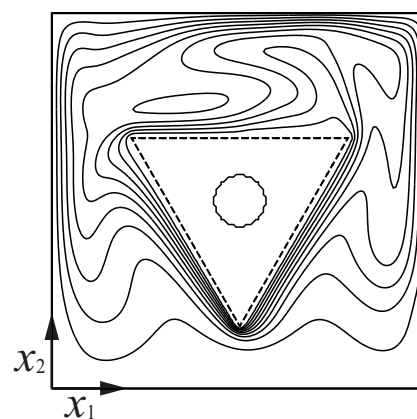
提案した手法の適用性を確認するために, まずは静



(a) $t = 0.12$ [s]



(b) $t = 3.00$ [s]



(c) $t = 12.00$ [s]

図-10 各時刻における温度分布と等温線

止した正方形固体を含むキャビティ内の自然対流計算を行った. その結果, 流体領域の対流と固体内部の熱伝導が統一的に計算され, 妥当な温度分布が得られることを確認した. また, 加熱面における平均ヌセルト数について, 流体と固体の境界面に適合する計算格子を用い, 各相の基礎方程式を個別に解く既往の計算手法による結果¹¹⁾とよく一致することを確認した. さらに, 上部と底部の壁面温度差を変えて数値実験を行い,

与える壁面温度差を $\beta\Delta T$ が約 0.3 となる程度に大きくした場合には流体の密度が最大で約 16% 変化し、圧縮性の影響が顕著となることを確認した。

次に、固体が移動する問題への適用性を確認するために、回転する正三角形固体周りの熱対流を計算した。その結果、提案した手法によって、回転する正三角形固体内部の熱伝導と固体周囲の対流による温度分布変化を直交構造格子上で統一的に計算できることを確認した。また、本数値実験では流体は空気、固体は鉄を想定し、固体の密度は流体の約 7,000 倍、固体の熱伝導率は流体の約 3,000 倍とした。以上の物性値を設定して得られた結果から、工学上の実用問題へ適用可能であることを確認した。

今後はレイリー数が 10^6 以上の問題や、複数の固体が移動して相互に衝突する問題へ適用すべく改良を加え、例えば高浮力流れによる固体粒子群の輸送現象へ適用することを検討している。

謝辞： 本研究は JSPS 科研費 JP16K17552 の助成を受けたものです。

参考文献

- 1) Yamamoto, S., Niyama, D. and Shin, B. R.: A numerical method for natural convection and heat conduction around and in a horizontal circular pipe, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 5781–5792, 2004.
- 2) Yamamoto, S.: Preconditioning method for condensate fluid and solid coupling problems in general curvilinear coordinates, *J. Comput. Phys.*, Vol. 207, pp. 240–260, 2005.
- 3) Qi, S., Furusawa, T. and Yamamoto, S.: A numerical method applied to forced and natural convection flows over arbitrary geometry, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 85, pp. 375–389, 2015.
- 4) 鳥生大祐, 牛島省：局所平均化操作を伴う部分段階圧縮性流体解法における CFL 条件の緩和手法, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 71, No.2, pp. I.213–I.222, 2015.
- 5) 日本流体力学会編：混相流体の力学, pp. 72–74, 朝倉書店, 1991.
- 6) 牛島省, 福谷彰, 牧野統師：3 次元自由水面流中の接触を伴う任意形状物体運動に対する数値解法, 土木学会論文集 B, Vol. 64, No.2, pp. 128–138, 2008.
- 7) 姫野武洋, 渡辺紀徳：低重力環境における熱流体管理に関する研究 (第 1 報, 熱流動解析に適した CCUP 法-TCUP 法-の提案), 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 69, No.678, pp. 266–273, 2003.
- 8) P. J. Roache(高橋亮一, 他訳)：コンピュータによる流体力学〈下〉, pp. 28–32, 構造計画研究所, 1978.
- 9) 栗山雅文, 李相一, 原田英二, 今野宏卓：空気中に垂直に配列した水平 2 円柱からの自然対流熱伝達, 化学工学論文集, Vol. 19, No. 6, pp. 1074–1080, 1993.
- 10) 鳥生大祐, 牛島省：鉛直配置された水平 2 円柱周りの自然対流に対する圧縮性流体と固体の熱連成計算手法の適用性, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 72, No.2, pp. I.179–I.186, 2016.
- 11) Lee, J. R. and Ha, M. Y.: Numerical simulation of natural convection in a horizontal enclosure with a heat-generating conducting body, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 49, pp. 2648–2702, 2006.
- 12) 牛島省, 牧野統師, 瀬津家久：四面体サブセル法を用いる市街地に流入する氾濫流の 3 次元数値計算, 水工学論文集, Vol. 51, pp. 787–792, 2007.
- 13) Yamamoto, S. and Daiguji, H.: Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations, *Computers & Fluids*, Vol. 22, pp. 259–270, 1993.
- 14) 赤松幹夫, 渡部勝博：任意マッハ数条件における流れの準保存形式に基づく数値計算法, 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 69, No. 682, pp. 1386–1393, 2003.

(2017.6.23 受付)

COMPUTATIONAL METHOD FOR THERMAL INTERACTIONS BETWEEN COMPRESSIBLE FLUID AND MOVING SOLID BASED ON MIXTURE MODEL

Daisuke TORIU and Satoru USHIJIMA

In this paper, a computational method was proposed for thermal interactions between compressible fluids and moving solids with different physical properties based on the mixture model. In the present method, physical properties of solids are considered in computational stages for heat conduction and velocities of multiphase fields. The present method was applied to natural convection in the cavity containing a square solid and obtained averaged Nusselt numbers on the heated wall were in good agreement with reference results. In addition, applicability of the present method was confirmed for compressible high buoyancy flows and heat transfer around a rotating triangular solid.