

ω -stable groups and CZ-groups

神戸大学・自然 田中克己 (Katsumi Tanaka)

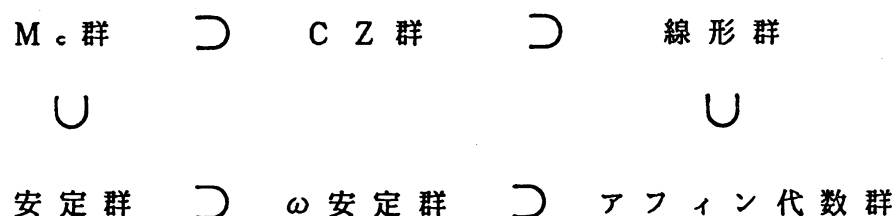
ω -stable group (ω 安定群) とは、 ω 安定な構造の中で定義可能な群のこととする。 CZ-group (CZ 群) とは閉集合についての極小条件をみたす T₁ 位相をもった群で、G の各元 a に対し、次の G からそれ自身への写像が全て連続となるものとする：

$$x \rightarrow x a, \quad x \rightarrow a x, \quad x \rightarrow x^{-1}, \quad x \rightarrow x^{-1} a x.$$

Cherlin と他の model theorist 達は ω 安定群とアフィン代数群との類似性を指摘している。 実際、Cherlin は「全ての Morley rank 有限の単純 ω 安定群は代数群である。」と予想している。 一方、CZ 群の概念は、Kaplansky により線形群の抽象化として導入されたものである。 したがって、 ω 安定群と CZ 群が似たような性質を持っていたとしても何ら不思議は無い。

安定群が M_c 群 (中心化群についての極小条件をみたす群)

であることは、Baldwin 等によって以前から知られているが、これらの関係は次のダイアグラムで表わされる。



本稿では、これらの群論的概念とモデル理論的概念の類似性に着目し、相互の応用で得られたいくつかの結果を報告する。 § 1 では、C Z 群についてのいくつかの構造定理の ω 安定群への移植を考える。 § 2 では、 ω 安定群についての Zil'ber の Indecomposability theorem を眺めることによりアフィン代数群についての irreducibility theorem の C Z 群への一般化を考える。最後に、 ω 安定群に位相を導入して、C Z 群にできるかという問題について考察する。

§ 1. C Z 群から ω 安定群へ

次の定理は安定群についての構造定理のうちで初めて得られたものの一つである。

定理 1 (Baldwin-Saxl 1976). すべての局所ベキ零安定群は可解である。

これに対比して、後から分かったことであるが、group theorist は次の強力な定理を得ていた。

定理 2 (Yen 1977) . すべての局所ベキ零 M. 群は可解である。

この流れの上に次の結果がある。

定理 3 (Felgner 1977) . G を $\aleph_0$ -categorical な安定群とする。

(i) G が局所可解ならば可解である。

(ii) G が局所ベキ零ならばベキ零である。

ここで $\aleph_0$ -categoricity は大変強い有限性条件である (注: Ryll-Nardzewski の定理) 。 Baldwin は定理 3 から $\aleph_0$ -categoricity の仮定を落とせるかという問題を提出した。これについては、今のところ次のことが知られている。

定理 4 (— 1987) . (i) 有限の Morley rank を持つ局所可解の安定群は可解である。

(ii) 有限の Morley rank を持つ局所ベキ零連結の安定群はベキ零である。

ここで、(ii) で連結性の条件は落とすことができない。以下の反例がある。

例. $A \cong \mathbb{Z} (2^\infty)$ を Prüfer 群、 $B \cong \mathbb{Z}_2 = \{1, b\}$ とする。 $G = A \rtimes B$ とし、 $A = \langle a_1, a_2, \dots \rangle$ で $a_1^2 =$

$1, a_{n+1}^2 = a_n$ としたとし、 $b^{-1} a_{n+1} b = a_n$ で定める。

G は locally dihedral 2-group とよばれ、局所有限、局所ベキ零だがベキ零でない。 G は安定で Morley rank 1, degree 2 である。

定理 4 と CZ 群の次の結果を比較すると面白い。

定理 5 (Higgins 1977). (i) G が連結閉部分群についての極小条件をみたす局所可解 CZ 群ならば、 G は可解である。

(ii) G が連結閉部分群についての極小条件をみたす局所ベキ零連結 CZ 群ならば、ベキ零である。

さらに、安定群についてはつぎのことが言える。

定理 6. G を局所ベキ零安定群とする。そのとき、 G の定義可能な特性部分群の昇鎖列で各因子が中心的であるものが存在する。特に、 G は超中心的である。

証明. 定理 1 より、局所ベキ零安定群は可解群となるので我々は derived length d についての帰納法で証明する。

明らかに $d \geq 2$ であると仮定してよい。 K を $G' =$

$[G, G]$ を含む derived length $d - 1$ の定義可能な特性群となる。帰納法の仮定から、 K の定義可能な特性群の昇鎖列 S でその因子がどれも K の中で中心的であるものが存在する。

主張: B/C を S の因子、各自然数 $i \geq 0$ にたいし $W_i = B/C \cap \zeta_i(G/C)$ とすると、 $\bigcup W_i = B/C$ となる。

各 $\zeta_i(G/C)$ は安定群 G/C の定義可能な特性群であるから、各 W_i は G の定義可能な特性群となる。だから、もし主張が成り立てば、 S の各因子の間に高々型の ω の昇鎖列を挿入することができる。そして部分群 G' をも含めたこの列は定理の結論を満足する。

この主張を証明するために、次のことを示さなければならない。「 $M = B/C$ を S の因子とし、 $a \in B$ とすれば、ある自然数 n に対し $C_n a \in \zeta_n(G/C)$ となる。」 G/C は安定群であり中心化群の極小条件をみたすので、 G のある有限部分集合 X が存在して、 $C_n(X) = C_n(G)$ となる。 G は局所ベキ零だから、群 $\langle a, X \rangle$ はベキ零。よって、ある自然数 n に対し $[a, \underbrace{\langle X \rangle, \dots, \langle X \rangle}_{n\text{回}}] = 1$ が成り立つ。いま、 M を $\mathbb{Z}[M]$ -加群とみなし、 $m = C_n a$ と書くことにすると、任意の $x_1, \dots, x_n \in X$ にたいし、

$$m(x_1 - 1) \cdots (x_n - 1) = 0$$

となる。 G/K はアーベル群だから、 G の元 g にたいする自己同形写像 $g - 1$ は互いに可換となる。ある $r < n$ にたいし、

$$m(g_1 - 1) \cdots (g_r - 1)(x_{r+1} - 1) \cdots (x_n - 1) = 1$$

が、すべての $g_1, \dots, g_r \in G$ とすべての $x_{r+1}, \dots, x_n \in X$ にたいし成り立つならば、因子 x_{r+1} を右に移して、各元

$$m(g_1 - 1) \cdots (g_r - 1)(x_{r+1} - 1) \cdots (x_n - 1)$$

が X の各元と可換となり、 G の各元と可換となる。したがって、

$$m(g_1 - 1) \cdots (g_r - 1)(x_{r+1} - 1) \cdots (x_n - 1) = 0$$

がすべての $g_1, \dots, g_{r+1} \in G$ と $x_{r+2}, \dots, x_n \in X$ について成り立つ。帰納法の仮定から、任意の $g_1, \dots, g_n \in G$ にたいし、 $[a, g_1, \dots, g_n] \in C$ となる。だから、 $Ca \in \zeta_n(G/C)$ 。よって、上の主張が示され定理の証明が終わる。

任意の群 G は極大局所ベキ零部分群を唯一つ持つことが知られている。これを G の Hirsch-Plotkin radical といい、 $\rho(G)$ と記す。

定理 7. もし G が periodic な ω 安定群ならば、 G の Hirsch-Plotkin radical $\rho(G)$ は定義可能である。

これを示すために、次の補題が必要となる。

補題 1. M -群の任意の部分群は M -群である。

補題 2 (Bryant). periodic な局所ベキ零 M -群はベキ零群の有限拡大である。

補題 3. G を ω 安定群、 M と N を G の部分群とする。こ

のとき、もし $N \triangleleft M$ でかつ $[M : N] < \omega$ ならばそれぞれの model closure について $\overline{N} \triangleleft \overline{M}$ でかつ $[\overline{M} : \overline{N}] < \omega$ となる。

(定理 7 の証明) $\rho(G)$ は G の正規部分群だから、補題 3 より、この model closure $\overline{\rho(G)}$ は G の正規部分群となり、よって $\overline{\rho(G)}^\circ \triangleleft G$ 。補題 1 より、 $\rho(G)$ はベキ零群の有限拡大。 M を G のベキ零正規部分群で $[\rho(G) : M] < \omega$ とする。補題 3 から、 $[\overline{\rho(G)} : \overline{M}]$ は有限となり $\overline{M}$ はベキ零。いま $\overline{\rho(G)}^\circ \subset \overline{M}$ だから $\overline{\rho(G)}^\circ$ はベキ零。Hirsch-Plotkin radical の一意性から、 $\overline{\rho(G)}^\circ$ は $\rho(G)$ に含まれる。したがって $[\rho(G) : \overline{\rho(G)}^\circ]$ は有限。よって、 $\rho(G)$ は定義可能部分群 $\overline{\rho(G)}^\circ$ の有限個の剰余類の和集合として表わされるから、それ自身定義可能となる。

§ 2. ω 安定群から CZ 群へ

Kaplansky は線形群の抽象化として次の概念を定義した。
 Z 空間とは、閉集合についての極小条件をみたす T_1 空間とする。
 群 G が T_1 群であるとは、逆元をとる写像と、変数をひとつ固定したとき、積の写像は連続となるものとする。
 Z 群とは、その空間が Z 空間である T_1 群のこととし、 C 群

とは、 T_1 群で固定した x にたいし写像 $a \rightarrow a^{-1} x a$ がどれも連続になるものをいう。 CZ 群とは、 C 群かつ Z 群である群とする。このとき、次のことが言える。

定理 1. G を連結閉集合についての極大条件をみたす Z 群とする。 $(X_i)_{i \in I}$ を G の連結閉集合の族とする。各 X_i が e を含むものとする、 $(X_i)_{i \in I}$ で生成される群は連結閉集合となる。さらに、 I の元のある有限列 $a = (a(1), \dots, a(n))$ が存在して、

$$\langle X_i : i \in I \rangle = X_{a(1)}^{\varepsilon_1} \cdots X_{a(n)}^{\varepsilon_n}, \quad (\varepsilon_j = \pm 1)$$

となる。

証明. I の元の任意の有限列 $a = (a(1), \dots, a(n))$ にたいし、 $X_a = X_{a(1)} \cdots X_{a(n)}$ とする。

主張 1 : X_a は連結。

A_k を $b_1 \cdots b_k$ ($b_i \in X_{a(i)}$) という形の元全体の集合とする。このとき、

$$\{e\} = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots \subset A_n = X_a$$

となる。いま各 A_k が連結であることを示す。明らかに A_0 は連結である。いま A_k が連結であると仮定する。もし $A_{k+1}(b_1, \dots, b_{k+1})$ を G の連続写像 $x \rightarrow b_1 \cdots b_k x$ による $X_{a(k)}$ の像とすると、 $A_{k+1}(b_1, \dots, b_{k+1})$ は連結。また、 $A_k = A_{k+1}(b_1, \dots, b_{k+1})$ は元 $b_1 \cdots b_k e$

を含むから空でない。いま、

$$A_k = \bigcup_{b_i \in X_{a(i)}} A_{k+1}(b_1, \dots, b_k)$$

だから、 A_{k+1} は連結。したがって、 X_k の閉包 $\bar{X}_k$ は連結閉集合となり、その中で極大な $\bar{X}_k$ を取ってこれる。

主張 2 : I の中の二つの有限列 b, c にたいし $\bar{X}_b, \bar{X}_c \subset \bar{X}_{(b, c)}$ 。ここで (b, c) は b と c の並列。

各 $x \in X_c$ にたいし、連続写像 $y \rightarrow yx$ は X_b を $X_{(b, c)}$ の中へ写す。よって、 $\bar{X}_b$ を $\bar{X}_{(b, c)}$ の中へ写す。したがって、

$$(*) \quad \bar{X}_b, X_c \subset \bar{X}_{(b, c)}.$$

一方、各 $x \in \bar{X}_c$ は X_c を $\bar{X}_{(b, c)}$ の中へ写す。したがって $\bar{X}_c$ も $\bar{X}_{(b, c)}$ の中へ写す。

主張 3 : $\bar{X}_a$ は群である。

$\bar{X}_a$ は極大で、 $e \in \bar{X}_a$ 。だから、 $(*)$ より、任意の b にたいし、

$$\bar{X}_a \subset \bar{X}_a \bar{X}_b \subset \bar{X}_{(a, b)} = \bar{X}_a.$$

$b = a$ とおくと、 $\bar{X}_a$ は積について不動となる。 b を $X_a = X_a^{-1}$ となるように取ると、 $\bar{X}_a$ は逆元をとる写像について不動となる。

$\bar{X}_a$ は G の連結閉部分群で、すべての X_i を含む。

主張 4 : $\bar{X}_a = X_a X_a = X_{(a, a)}$ 。

逆元をとる写像は準同形だから、集合 X_{α}^{-1} は $\bar{X}_{\alpha}$ の中で dense となる。したがって、任意の元 $x \in G$ にたいし、 $x X_{\alpha}^{-1}$ も $\bar{X}_{\alpha}$ で dense。よって、 $X_{\alpha} \cap x X_{\alpha}^{-1} \neq \emptyset$ となり、 $x \in X_{\alpha} X_{\alpha} = X(\dots)$ 。この列 (a, a) が定理を満足する。□

応用として次のことが言える。

系. G を連結閉集合についての極大条件をみたす CZ 群とする。 H を G の連結閉部分群、 X を G の部分集合とする。このとき、交換子群 $[X, H]$ は G の連結閉部分群である。

証明. 定理 1 より、各 $x \in X$ にたいし $[x, H] = \{[x, h] : h \in H\}$ が連結となることを示せば十分。

連続写像 $y \rightarrow y^{-1} x y$ による連結群 H の像 x'' はやはり連結。このとき、連続写像 $y \rightarrow x^{-1} y$ による x'' の像 $x^{-1} x'' = [x, H]$ も連結。

付. ω 安定群への位相の導入

ω 安定群の特徴の一つとして、定義可能部分群についての極小条件をみたすことが挙げられる。このことを使って、 ω 安定群に位相を導入する。

G を ω 安定群とする。 G の定義可能正規部分群の剰余類と空集合を閉集合として、部分基底を与える。これにより

G の上に T 位相が定義される。上の極小条件より、次の定理が導かれる。

定理. すべての ω 安定群は Z 群になる。

参考文献

- J.T.Baldwin and J.Saxl, Logical stability in groups, J Austral. Math. Soc. Ser. A 21 (1976), 267-276.
- G.Cherlin, Groups of small Morley rank, Ann. Math. Logic 17 (1979), 1-28.
- U.Felgner, Stability and $\aleph_1$ -categoricity of nonabelian groups, Logic Colloquium '76. Amsterdam, Oxford, North-Holland.
- C.A.Higgins, Some structure theorems for CZ-groups, J. London Math. Soc. 20 (1979), 53-59.
- I.Kaplansky, An introduction to Differential Algebra, Hermann, Paris, (1957).
- K.Tanaka, Some local properties of ω -stable groups, Arch. Math. Logic 27 (1988), to appear.