

古法、四乗求背の術、六乗求背の元術について

国際基督教大学・教養学部・理学科
森本 光生 (Mitsuo Morimoto)
Division of Natural Sciences
College of Liberal Arts
International Christian University

『綴術算経』(1722) の第 12 章「弧数を探る」において建部賢弘は、径 d 、矢 c が与えられたとき、弧背 s を d と c の式で表すことについて論じている。現代数学によれば、弧背は次のように逆三角関数で表される。

$$s = d \arcsin(2\sqrt{cd - c^2}/d) = d \arccos(1 - 2c/d) = 2d \arcsin(\sqrt{c/d})$$

しかしながら、建部以前の和算家にとっての「式」は、多項式、或いは、多項式の比で表される有理式のみであった。これらは現代の数学の見地で言えば、近似式なのであるが、実用上は有用である。

『綴術算経』で建部は無限級数展開を用いて、弧背を径と矢によって表示する方法を述べている。この方法は、現代の数学の言葉で言うところのテイラー展開に相当し、有限項で打ち切った場合、矢が微小であればその近似は極めてよい。

しかしながら、『綴術算経』以後の著作においても、建部は有理近似式を試みていることは、近似式としてみたとき、テイラー展開が必ずしも良い一様近似を与えないことを建部は認識していたと思われる。

『綴術算経』41 丁表には、次の文章がある。

故に、往歳関氏弧率を造り改むること再次、吾亦重ねて造り改むること一次、共に精しからずして、其の術廃しぬ。

本稿では、関や建部が造ったというこれらの弧背の式（弧率）が何なのかについて考えてみたいと思う。

1 弧背の長さの数値計算

関孝和ら江戸時代初期の日本数学者は、弧背の長さ s を、内接する弦の長さの極限として、数値的に任意の精度で求めることが出来た。この近似計算は、関孝和の増約術で加速され、建部賢弘の累増約術でさらに加速され、非常に効率的になった。彼らは、数値的

に求めるだけで満足せず、弧背の長さ s 、あるいは弧背幂 s^2 を、径 d および矢 c の多項式（あるいは分数式）で表現しようとして何度も工夫を行った。しかし多項式近似も有理式近似も数値計算ほどの精度を与えることが出来ず、不満足なものであった。

『綴術算経』で、建部賢弘は弧背幂の無限級数としての表示式（第1公式、テイラー展開）を発表した。第1公式は、係数が単純な規則によって定まるなど、数学的に美しい形をしていたので、この発見で建部は嬉しくなり、先生の関孝和を凌いだと信じたほどだった。（2005年新春に横塚啓之氏は、『弧背截約集』という書物を発見した。その中には、建部賢弘が享保7年正月13日に公式を忽然と発見した様子が生き生きと描かれている。）しかし、この発見の感激が相対化される中で、彼は本当に無限級数展開（今日の言葉でいうと、逆三角関数のテイラー展開）で満足し続けられたのであろうか。

『綴術算経』には、先人たちの得た弧背幂の近似公式が、「古法」、「四乗求背の術」、「六乗求背の術」、「古法の改良版」という名前で少なくとも4つ引用されている。『綴術算経』執筆当時の読者には自明のものかもしれないが、筆者にはこれらが何を指すのか良く分らない。

また、『綴術算経』では新しい公式が三つ（第1公式、第2公式、第3公式）が提示されている。このうち第1公式が有名なテイラー展開式であるが、第2公式、第3公式は、有理式近似である。

『綴術算経』に出現順に列挙すると次のようである。

1. (42 丁裏) 「古法」
2. (45 丁表) この原術（第1公式）
3. (46 丁表) 関氏立つところの「四乗求背の術」
4. (49 丁表) 起術（第2公式）
5. (49 丁裏) 吾、往歳立つところの「六乗求背の元術」
6. (49 丁裏) 「古法」の改良版
7. (53 丁裏) この元術（第3公式）
8. (54 丁裏) 総術。くわしく、『弧率』に載す。

2 『豎亥録』：寛永6年（1639）

『明治前日本数学史』第1巻221ページの「今村知商の豎亥録と因帰算歌」に、「径矢弦の法」に関する説明が載っている。

$$s^2 = 4cd + 2c^2 \quad (1)$$

がその公式である。 $c = d/2$ （半円）としてみると、 $s^2 = (5/2)d^2$, $s = \sqrt{10}(d/2)$ となるので、『豎亥録』では円周率を $\pi = \sqrt{10}$ としていたことが分る。

『綴術算経』42 丁裏に

古法に、矢自乗し乗数 五段八六九六強 を乗じ弦幂を加えて、背幂とする。

とある。弦幂は $4(cd - c^2)$ であるので、『綴術算経』でいう古法は、

$$s^2 = 4(cd - c^2) + 5.8696c^2 = 4cd + 1.8696c^2 \quad (2)$$

という近似式である。建部賢弘の時代には円周率は $\pi = 355/166$ (密率) とするので、『豎亥録』の公式は修正して引用されているのである。

『綴術算経』40丁裏には、

古法に矢自乗し、矢幂の法を乗じ、弦幂に加えて、汎背幂とす。倍矢をもって径を減ずる余りに、矢幂を乗じ、径矢の差に除し、また折半して得るところを以て半背幂を減じ余りを定背幂とす。

と記されている。ここでいう汎背幂は (2) であるので、定背幂は

$$s^2 = 4cd + 1.8696c^2 - \frac{(d - 2c)c^2}{2(d - c)} \quad (3)$$

『綴術算経』の古法改良版である。矢がゼロの場合と半径の場合 (半円) には、修正項がゼロになっていることに注意せよ。

3 『研幾算法』：天和3年 (1683)

『研幾算法』の第1問は、円弧の面積を求めるものであるが、円弧の面積は s で表されるので、弧長 s を表す式を求めるのが問題であるといつてよい。その答には、次の関数が弧背幂 s^2 を与えるものとして使われている。

$$K_2(d, c) = \frac{5599232c^5 - 715920c^4d + 4081524c^3d^2 + 6021104c^2d^3 + 18393267cd^4 - 81d^5}{4596840d^3}$$

これは背幂の5次多項式による近似であるので、「四乗求背術」ということが出来る。また、『研幾算法』の冒頭に、「弧法 (第1問) は師伝の秘訣なり」とあるので、この近似式は、関孝和のものとするのが妥当であろう。これが「関氏立つところの四乗求背の術」なのであろうか。

この式は、 $d = 10, c = 1, c = 2, c = 3, c = 4, c = 4.5$ では、良い近似を与えているが、 $K_2(10, 0) = -45/25538$ であり、矢 c がゼロの場合弧背幂がマイナスになってしまうのは、矢を微小にしていくという発想がなかったからであろう。

4 『括要算法』：正徳2年 (1712)

関孝和の遺稿を集めて『括要算法』が出版されたのは1712年であるが、その成立は関孝和の最盛期の1685年頃ではないかと想像される。この想像が許されるのならば、『括要算法』の結果は『研幾算法』より後であろう。

$$b_1 = 5107600, b_2 = 23835413, b_3 = 43470240, b_4 = 37997429, \\ b_5 = 15047062, b_6 = 1501025, b_7 = 281290, b_8 = 1276900$$

ここにあるのは、『括要算法』第4巻にある数値である。弧背算 s^2 の近似式として、次の $Y_2(d, c)$ が提案されている。

$$Y_2(d, c) = \frac{b_1 c d^6 - b_2 c^2 d^5 + b_3 c^3 d^4 - b_4 c^4 d^3 + b_5 c^5 d^2 - b_6 c^6 d - b_7 c^7}{b_8 (d - c)^5}$$

これは、分子が c の7次式（分母は5次式）であるので、「六乗求背の術」であるが『綴術算経』にいう「吾、往歳立つところの六乗求背の元術」なのか。疑問である。

$Y_2(d, 0) = 0$ となっており、矢がゼロのときは弧背算の近似値もゼロになり、『研幾算法』の近似式より改良されている。

『括要算法』のこの近似式は、円周率を $355/113$ （密率）として、 $d = 10$ で、 $c = 1$, $c = 2$, $c = 3$, $c = 4$, $c = 4.5$, $c = 5$ で正確な値を与えるように、補間して公式を作られたものである。

5 『大成算経』：宝永7年(1710)

『大成算経』の執筆開始年は天和3年(1683)であり、12巻まで完成したのが元禄の中ごろ(1695年頃)であり、全巻の完成は1710年で28年間かかっている。弧法が書かれているのは、『大成算経』『括要算法』の内容が改良されているので、弧法に関しては、『括要算法』の若干後と考えてよいのではないかと。次の公式は『明治前日本数学史』第2巻428ページにまとめとして書かれている。『括要算法』より後である。

$$H_1 = 39020125496, H_2 = 61434714678, H_3 = 25918266069, \\ H_4 = 1828448393, H_5 = 102756994, K_1 = 9755031374, \\ K_2 = 18610356125, K_3 = 10948798854, K_4 = 1913138432$$

$$taisei2(d, c) = \frac{H_1 d^4 c - H_2 d^3 c^2 + H_3 d^2 c^3 - H_4 d c^4 - H_5 c^5}{K_1 d^3 - K_2 d^2 c + K_3 d c^2 - K_4 c^3}$$

円周率は、 $355/113$ より精度がよい。これも「四乗求背の術」であり、明らかに『綴術算経』(1722)の以前である。もしかしたら、『研幾算法』の公式ではなく、こちらが「関氏立つところの四乗求背の術」なのかもしれない。

6 『綴術算経』：享保7年(1722)

『綴術算経』にある三つの公式については、先に小川東との共著で「建部賢弘の数学、とくに逆三角関数に関する三つの公式について」(雑誌『数学』第56巻、2004)という論文の中で詳しく述べた。建部の記述を忠実に現代表記すると、以下のようになる。

第1公式、テイラー展開

$$\begin{aligned}
nsa_1(d, c) &= 4c^2/3, & n_1(d, c) &= 4cd + nsa_1(d, c), \\
nsa_2(d, c) &= nsa_1(d, c)(c/d)8/15, & n_2(d, c) &= n_1(d, c) + nsa_2(d, c), \\
nsa_3(d, c) &= nsa_2(d, c)(c/d)9/14, & n_3(d, c) &= n_2(d, c) + nsa_3(d, c), \\
nsa_4(d, c) &= nsa_3(d, c)(c/d)32/45, & n_4(d, c) &= n_3(d, c) + nsa_4(d, c), \\
nsa_5(d, c) &= nsa_4(d, c)(c/d)25/33, & n_5(d, c) &= n_4(d, c) + nsa_5(d, c), \\
nsa_6(d, c) &= nsa_5(d, c)(c/d)72/91, & n_6(d, c) &= n_5(d, c) + nsa_6(d, c),
\end{aligned}$$

第2公式

$$\begin{aligned}
f_{sa_1}(d, c) &= 4c^2/3; & f_1(d, c) &= 4cd + f_{sa_1}(d, c) \\
f_{sa_2}(d, c) &= f_{sa_1}(d, c) * c/(d - c) * 8/15; & f_2(d, c) &= f_1(d, c) + f_{sa_2}(d, c) \\
f_{sa_3}(d, c) &= f_{sa_2}(d, c) * c/(d - c) * 5/14; & f_3(d, c) &= f_2(d, c) - f_{sa_3}(d, c) \\
f_{sa_4}(d, c) &= f_{sa_3}(d, c) * c/(d - c) * 12/25; & f_4(d, c) &= f_3(d, c) + f_{sa_4}(d, c) \\
f_{sa_5}(d, c) &= f_{sa_4}(d, c) * c/(d - c) * 223/398; & f_5(d, c) &= f_4(d, c) - f_{sa_5}(d, c)
\end{aligned}$$

第3公式

$$\begin{aligned}
gsa_1(d, c) &= 4c^2/3; & g_1(d, c) &= 4cd + gsa_1(d, c) \\
gsa_2(d, c) &= gsa_1(d, c) \times \frac{c}{d-9c/14} \times \frac{8}{15}; & g_2(d, c) &= g_1(d, c) + gsa_2(d, c) \\
gsa_3(d, c) &= gsa_2(d, c) \times \frac{c^2}{d^2 - \frac{1696c}{1419} + \frac{6743008c^2}{26176293}} \times \frac{43}{980}; & g_3(d, c) &= g_2(d, c) + gsa_3(d, c)
\end{aligned}$$

今日の数式というより、コンピュータのプログラムといったほうが適切である。

7 『弧率』：年紀不詳

手元に、帝国学士院、昭和5年調、第2門コ1冊第1427号箱『弧率』建部賢弘編というラベルのある稿本のコピーがある。これを『弧率』と呼ぶことにする。この『弧率』には、次の公式がある。

$koritu2(d, c)$

$$= \frac{17243148700cd^4 - 27148244837c^2d^3 + 11453384892c^3d^2 - 807998619c^4d - 45408726c^5}{4310787175d^3 - 8223990414cd^2 + 4838317774c^2d - 845423484c^3}$$

これも「四乗求背の術」である。係数の数値が異なるが、『大成算経』の公式と類似の形をしているので、関や建部はこの形の分数式で、近似が良く、かつ係数が簡単なものをいくつかも求めていたのであろう。

『綴術算経』54丁裏にある『弧率』は、上記の『弧率』を指しているのではないであろう。

8 まとめ

この論考に現れた公式の最大相対誤差を以下にまとめる。

- 『豎亥録』(2次式) 1.7×10^{-2} , $\pi = \sqrt{10}$
- 『研幾算法』(5次式) 4×10^{-5} , $\pi = 355/113$, $s(d, 0) < 0$
- 『括要算法』(7次式/5次式) 1.5×10^{-7} , $\pi = 355/113$
- 『大成算経』(5次式/3次式) 1.5×10^{-10}
- 『綴術算経』第1公式(7次式) 4×10^{-4}
- 『綴術算経』第2公式(6次式/4次式) 2.5×10^{-3}
- 『綴術算経』第3公式(5次式/3次式) 5×10^{-4}
- 『弧率』(5次式/3次式) 5×10^{-10}

これらの誤差は、数式処理システム Mathematica を利用して求めた。『綴術算経』の公式は、いくらでも高次に出来るのであるが、ここでは有限項で打ち切って比較している。

以上の書物のほかにも、『算暦雑考』や『円理弧背術』には、弧法に関する記述があるが、その考察は今後の課題とする。