

Malfatti の問題について

東京電機大学 (理工・情報) 一松 信 (Sin HITOTUMATU)

1. 問題と主旨

標題の問題はイタリアの Malfatti (1803) が提出した次の課題である。与えられた三角形の中に、それぞれ 2 辺に接して互いに外接する 3 個の円を作れ。これは定規とコンパスで作図可能である (Steiner: 1826)。その後計算による解が多数現れている。

Malfatti 自身は、与えられた三角形内にあり、互いに重ならない 3 個の円の合計面積を最大にする問題の解として、上記 3 円 (Malfatti の円) を考えたが、この予想は誤っていた (後述)。

ここでこの古典的問題を取上げたのは、この種の問題に、標準的な Gröbner 基底などが有用なことを例示するためである。

2. 方程式

$\triangle ABC$ の内接円の半径を 1 と標準化し、角 A, B, C 内の円 P, Q, R の半径を x^2, y^2, z^2 と置く。便宜上 $\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}B, \frac{1}{2}C$ の余接 ($\cot$) をそれぞれ l, m, n と置くと

$$(1) \quad lmn = l + m + n$$

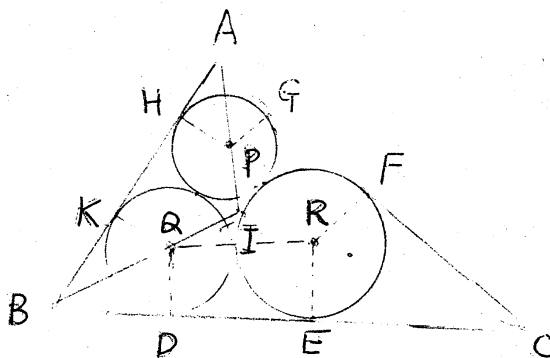


図1 Malfatti の円

であり、3辺BC, CA, ABは $m+n$, $n+l$, $l+m$ と表される。図1で例えば

$$DE = \sqrt{(y^2+z^2)^2 - (y^2-z^2)^2} = 2yz$$

により、以下の連立方程式を得る。

$$(2) \quad my^2 + nz^2 + 2yz = m+n$$

$$(3) \quad nz^2 + lx^2 + 2zx = n+l$$

$$(4) \quad lx^2 + my^2 + 2xy = l+m$$

これを(1)に注意して解けばよい。

3. 解法 a. 古典的方法

(2), (3), (4) のような2次の連立方程式に対しては、次のような解法が古典的である。

すなわちそれぞれに定数 L, M, N を掛け、右辺が0となり、左辺が1次式の積になるようにする。条件(1)を活用すると、そのための条件は $LMN=0$ となり、結局2個ずつ右辺が0になるように組合せればよい。そのような巧妙な解法が文献[2]にある。しかしこの方法では、解の組合せが厄介である。([3]に紹介)

b. 消去法 この場合にはかえって素朴な消去法がよい。以下それに従う。

まず(2)-(3)により、 $2(y-z)x = nz^2 - my^2 + m-n$ 。

これを [(2)+(3)-(4)] ÷ 2 に当る $lx^2 + (y+z)x - yz = l$ に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= l(nz^2 - my^2 + m-n)^2 + 2(nz^2 - my^2 + m-n)(y^2 - z^2) - 4(yz + l)(y-z)^2 \\ &= l(nz^2 - my^2)^2 + 2l(m-n)(nz^2 - my^2) + l(m-n)^2 + 2(y^2 - z^2)(nz^2 - my^2) \\ &\quad + 2(m-n)(y^2 - z^2) - 4yz(y-z)^2 - 4l(y-z)^2 \quad (\text{展開}) \\ &= l(my^2 + nz^2)^2 - 4lmny^2z^2 - 2l(m+n)(my^2 + nz^2) + 4lmn(y^2 + z^2) + l(m-n)^2 \\ &\quad - 2(y^2 + z^2)(my^2 + nz^2) + 4(m+n)y^2z^2 - 2(m+n)(y^2 + z^2) + 4(my^2 + nz^2) - 4yz(y^2 + z^2) \\ &\quad + 8y^2z^2 - 4l(y^2 + z^2) + 8lyz, \quad (\text{和と変形}) \end{aligned}$$

ここで(1)を使い、 $my^2 + nz^2$ に(4)を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= l(m+n-2yz)^2 + 4(-lmn + m+n+2)y^2z^2 - 2l(m+n)(m+n-2yz) + l(m-n)^2 \\ &\quad - 2(y^2 + z^2)(m+n-2yz) - 2(y^2 + z^2)(-2lmn + m+n+2l + 2yz) + 4(m+n-2yz) + 8lyz \\ &= [l(m+n)^2 - 2l(m+n)^2 + l(m-n)^2 + 4(m+n)] - 4l(m+n)yz + 4ly^2z^2 + 4(2-l)y^2z^2 \\ &\quad + 4l(m+n)yz - 2(y^2 + z^2)(m+n-2yz-m-n+2yz) + 8(l-1)yz \\ &= (-4lmn + 4m + 4n) + 8y^2z^2 + 8(l-1)yz = 4[2y^2z^2 + 2(l-1)yz - l] \quad \text{すなわち} \\ (5) \quad 2y^2z^2 + 2(l-1)yz - l &= 0 \end{aligned}$$

を得る。

c. 注意 本来ならば、 y, z に関する方程式に整理し、(4) と併せて y を消去すべきである。そうすると z に関する 8 次方程式（実は z^2 に関する 4 次方程式）を得る。それが正規の Gröbner 基底である。実際に数式処理を使って、そのような計算ができた。

しかしその 4 次方程式が、代数的に綺麗に解けるのに疑問を感じて調べた結果、 yz を一つの変数のようにみなすと、その 2 次方程式になることがわかった。これはこの問題の特殊性であるが、[2] でも yz, zx, xy について解いている。

もとの問題では、 x, y, z は 0 と 1 の間の数であり、(5) の解は

$$(6) \quad yz = \frac{1}{2} [-(l-1) + \sqrt{l^2+1}]$$

である。同様に

$$zx = \frac{1}{2} [-(m-1) + \sqrt{m^2+1}], \quad xy = \frac{1}{2} [-(n-1) + \sqrt{n^2+1}]$$

を得るので、これらから x, y, z を求めることができる。

d. 吟味 最初の連立方程式(2),(3),(4) は、全部で 8 組の解（すべて実解）を有する。そのうち 4 組は、他の 4 組の符号を全部変えた値である。

上に述べたすべてが正の解の他の 3 組は、(6) などの 3 式のうち、平方根号を 1 個正・2 個負にとり、 x, y, z のうち 2 個を正・1 個を負にした解になる。

例えば $x < 0, y > 0, z > 0$ とした解は、 y^2, z^2 が三角形内にありそれぞれ角 B, C の 2 辺に接し、互いに外接する円の半径を表し、 x^2 は角 A の 2 辺に接し三角形の外側から前の 2 円に外接する大きい円の半径を表す。(6) の右辺は $\tan \frac{1}{4} A$ に相当するが、この場合には負になる右辺の値は、三角形の内角を外側の優角にとったものに相当する。

4. Malfatti の円は最大か？

ところで Malfatti の円は、最大面積を与えるか？ 反例はすぐに見付かる。それは正三角形の場合である。

上のように内接円の半径を 1 とすると、Malfatti の円の半径は $\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$ である（これは直接に計算できる）。他方一つの角内にあり、内接円に外接する小円の半径は $\frac{1}{4}$ であり、内接円とそのような 2 個の円の面積の和は $11\pi/9$ である。 π を除いて係数を比較すると

$$11/9 > 9(4-2\sqrt{3})/4$$

である。これは移項して 2 乗すると $3^4 9 = 19683 > 19600 = 140^2$ に帰着される。

これはMalfattiの3円よりも、内接円とそれに隣接する2円の方が大きいことを意味する。この場合は、中学校3年の課題学習で扱うことの出来る問題である。

反例というだけならば、図2のような細長い三角形の中で、団子のように並んだ3個の円の方が明らかかもしれない。1967年にMalfattiの円は、いかなる三角形においても重ならない3個の円の中で、最大面積を与えないことが確認された。真の最大は完全に証明されてはいないが、内接円とそれに隣接する2円、または団子のように並んだ3円であるらしい。このような事実がはっきりしたのが、比較的近年なのが奇妙である。

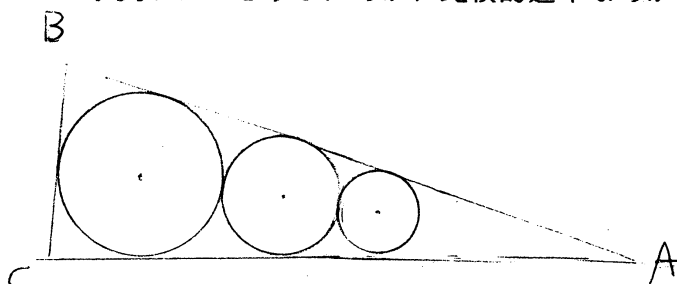


図2 別の反例

5. 次の課題

研究会の折に、3次元の4面体の場合について質問があった。もっと一般の n 次元空間での単体でも、同様の問題が考えられる。形式的には同様に出来そうだが、はるかに複雑になるらしい。これらについては全く考えたことがなかった。次の課題としたい。

参考文献

- [1] M.Gardner, Fractal Music, Hypercards and more,...;Freeman 1992, Chap.10
日本語訳, 丸善から近刊予定。
- [2] H.Lob & H.W.Richmond, On the Solution of Malfatti's Problem for a
Triangle, Proc. of the London Math. Soc.,2, 1930, pp.287-304.
- [3] 一松 信, マルファティの問題について、大学への数学、東京出版、1995年 1月号。