

BASIC FORCING NOTIONS IN $P_\kappa\lambda$

YOSHIHIRO ABE

(阿部 吉 弘) (神奈川大工)

ABSTRACT. この講演では $P_\kappa\lambda$ に non-reflecting stationary set を force する可能性を探る. 金森による weakly normal イデアルの [1] よりも自然だと思われる $P_\kappa\lambda$ への一般化についても触れる.

1. 用語と基本的な事項

全体を通して κ は正則な非可算基数で λ は κ 以上の基数とする. このような (κ, λ) の組みに対して, $P_\kappa\lambda$ で集合 $\{x \subset \lambda : |x| < \kappa\}$ を表す. 各 $x \in P_\kappa\lambda$ について, $\kappa_x = |x \cap \kappa|$, $P_{\kappa_x}x = \{s \subset x : |s| < \kappa_x\}$ とする.

また, $\hat{x}$ で $\{y \in P_\kappa\lambda : x \subset y\}$ を表す. $P_\kappa\lambda$ の部分集合 X が全ての $x \in P_\kappa\lambda$ に対して $X \cap \hat{x} \neq \emptyset$ を満たすとき, X は *unbounded* であると言ひ, $I_{\kappa,\lambda} = \{X \subset P_\kappa\lambda : X \text{ は unbounded でない}\}$ と定義する.

$P_\kappa\lambda$ 上のイデアルはすべて *fine*, つまり, $I_{\kappa,\lambda}$ の拡大であると仮定する. $P_\kappa\lambda$ 上のフィルター F とイデアル I は $I = \{P_\kappa\lambda - X : X \in F\}$ のとき, 互いに *dual* であると言う. I と dual なフィルターを I^* で表し, I^+ で集合 $\{X \subset P_\kappa\lambda : X \notin I\}$ を表す.

時々, $y \in P_{\kappa_x}z$ であることを $y \prec z$ と略記することがある.

ここまで $P_\kappa\lambda$ について定義されてきた概念は全て, κ_x が正則で非可算ならば $P_{\kappa_x}x$ にも自然に定められる. 例えば, $X \subset P_{\kappa_x}x$ が *unbounded* とは任意の $y \in P_{\kappa_x}x$ に対し $z \in X$ で $y \subset z$ なものが存在することであり, $I_{\kappa_x,x}$ は集合 $\{X \subset P_{\kappa_x}x : X \text{ は } P_{\kappa_x}x \text{ で unbounded でない}\}$ を表し, これは $P_{\kappa_x}x$ 上の κ_x -complete なイデアルである.

2. FORCING A NONREFLECTING STATIONARY SET

Nonreflecting stationary set を正則な非可算基数に付け加えるのは, 基本的かつ容易なテクニックでありながら, supercompactness を壊すなどの重要な応用がある. 例えば [2] を見て下さい. このテクニックを $P_\kappa\lambda$ に一般化しようとする, *shooting club forcing* に見られるように, 完全な一般化を得るには, ある種の困難は避けられない. ここでは [4] での Gitik のアイデアを使う.

Date: November 26, 1998.

YOSHIHIRO ABE

定理 2.1. $V \subset W$ を同じ順序数を持つ 2 つの ZFC のモデルとし, $(\kappa^+)^V = (\kappa^+)^W$, $C \in W$ は V -inaccessibles からなる κ の club set で, κ は W で inaccessible, $T = \{x \in P_\kappa \kappa^+ : V \models "x \text{ は inaccessible でない}"\}$ とする. このとき, 基数を保存する forcing notion $\mathbb{P} \in W$ で $\Vdash_{\mathbb{P}}$ stationary な $S \subset \kappa$ で $x \in T$ ならば $S \cap P_{\kappa_x} x$ は stationary でない" が成り立つようなものが存在する.

証明. W において forcing notion $\mathbb{P}$ を次のように定義する;

$\mathbb{P} = \{p \subset P_\kappa \kappa^+ : |p| < \kappa \text{ で, どんな } x \in T \text{ に対しても } p \cap P_{\kappa_x} x \text{ は stationary ではない}\}.$

$p \leq_{\mathbb{P}} q$ は

$p \supset q$ で, $x \in p - q$ かつ $y \in q$ ならば $x \not\subset y$

であることとする.

$\mathbb{P}$ は κ^+ -c.c. を満たし $< \kappa$ -distributive であり, したがって cardinal を保存することを示していく.

最初に $\mathcal{A}$ は κ^+ 濃度の anti chain として矛盾を導く. 全ての $p \in \mathcal{A}$ に対し $|\cup p| < \kappa$ で κ は inaccessible だから, $\{\cup p : p \in \mathcal{A}\}$ は r を root とする Δ -system であるとしてよい. $|P(r)| < \kappa$ だから, $p, q \in \mathcal{A}$ で $p \cap P(r) = q \cap P(r)$ であるものが見つかる. $s = p \cup q$ と置く. $t \in s - p, u \in p$ で $t \subsetneq u$ と仮定すると, $t \in q$ かつ $t \subset u \subset \cup p$ である. 従って $t \subset \cup p \cap \cup q = r$ であるが, これは $t \notin p$ に矛盾する. そこで, このような t と u は存在しないことになる. $x \in T$ を選ぶ. $p \cap P_{\kappa_x} x$ と $q \cap P_{\kappa_x} x$ は両方とも stationary でないから, $s \cap P_{\kappa_x} x = (p \cap P_{\kappa_x} x) \cup (q \cap P_{\kappa_x} x)$ も stationary ではない. 従って, s は $\mathbb{P}$ の p と q より強い condition である. これは $\mathcal{A}$ が anti chain であることに反するから, $\mathbb{P}$ は κ^+ -c.c. を満たすことが示された.

次に $\delta < \kappa$ で, 各 $\alpha < \delta$ に対し D_α は $\mathbb{P}$ の open dense な部分集合だとする. 任意の condition p をとる. $q \in \bigcap_{\alpha < \delta} D_\alpha$ で p より強いものを見つければ $< \kappa$ -distributive であることが言える.

十分大きな λ を選び

$$\mathcal{B} = \langle H(\lambda), \in, \kappa, \kappa^+, P_\kappa \kappa^+, C, \delta, \mathbb{P}, \Vdash, \langle D_\alpha | \alpha < \delta \rangle, p \rangle$$

とする. $\mathcal{M} \prec \mathcal{B}$ で $|\mathcal{M}| = \kappa$, $\mathcal{M} \cap \kappa^+ \in \kappa^+$, ${}^{<\kappa}(\mathcal{M} \cap \kappa^+) \subset \mathcal{M}$ であるものが存在する. κ から $\mathcal{M} \cap \kappa^+$ への全単射 $g \in V$ を固定する. $\mathcal{M}$ の elementary submodel 達の increasing continuous chain $\langle \mathcal{M}_\xi | \xi < \kappa \rangle$ で $\alpha + 1 \subset \mathcal{M}_0$ かつ, 全ての $\xi < \kappa$ について $|\mathcal{M}_\xi| < \kappa$, ${}^\xi \mathcal{M}_\xi \subset \mathcal{M}_{\xi+1}$, $g'' \xi \subset \mathcal{M}_\xi$ が成り立つようなものを構成できる.

C の closed unbounded な部分集合 E で, 各 $\xi \in E$ に対し $g'' \xi = \mathcal{M}_\xi \cap \kappa^+$, $|\xi| = \xi$, $g'' \xi \cap \kappa = \xi = \mathcal{M}_\xi \cap \kappa$ となるものが存在する. ここで, 各 $\xi \in E$ について $\mathcal{M}_\xi \cap \kappa^+ \in P_\kappa \kappa^+ \cap \mathcal{M}_{\xi+1}$ となっていることに注意する. もし $\xi \in E$ で $q \in \mathbb{P} \cap \mathcal{M}_\xi$ ならば, $\mathcal{M}_\xi \models "q \text{ は } < \kappa \text{-distributive}"$ である

BASIC FORCING NOTIONS IN $P_{\kappa\lambda}$

から, $q = f''\eta$ となる $\eta < \xi$ が存在し, $f \in M_\xi$ である. 従って $q \in M_\xi$ となる. 同様にして $q \in P(M_\xi \cap \kappa^+)$ であることも示される. 実際, 全ての $x \in q$ に対し $x \subseteq M_\xi \cap \kappa^+$ である. $\langle \xi_\alpha \mid \alpha \leq \delta \rangle$ を E の increasing enumeration とする.

上で述べた注意を使って condition 達の decreasing sequence $\langle p_\alpha \mid \alpha \leq \delta \rangle$ を, 各 $\alpha < \delta$ と全ての $\beta < \alpha$ に対し $p_\alpha \in M_{\xi_{\alpha+1}} \cap D_\beta$ となっているように, 帰納的に定義して行く.

$\alpha+1 \in M_0 \subset M_{\xi_0}$ より $D_0 \in M_{\xi_0}$ だから, $q_0 \in M_{\xi_0} \cap D_0$ で $q_0 \leq p$ なものがある. $p_0 = q_0 \cup \{M_{\xi_0} \cap \kappa^+\}$ と定義する. $V \models "M_{\xi_0} = \xi_0$ は inaccessible" だから, p_0 は condition である. 前の注意から $p_0 \in M_{\xi_0+1}$ である.

$\alpha = \beta + 1$ で p_β が定義されたとする. $p_\beta \in M_{\xi_{\beta+1}} \subset M_{\xi_\alpha}$ で, $\beta \in \xi_\alpha = M_{\xi_\alpha} \cap \kappa$ より $D_\beta \in M_{\xi_\alpha}$ である. 従って $q_\alpha \in M_{\xi_\alpha} \cap D_\beta$ で $q_\alpha \leq p_\beta$ であるものを見つけることができる. $p_\alpha = q_\alpha \cup \{M_{\xi_\alpha} \cap \kappa^+\}$ と定義すると, まえと同じく, 目的にかなった condition になっている.

今度は α は δ 以下の limit ordinal で全ての $\beta < \alpha$ に対して p_β が定義されたと仮定する. $p_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} p_\beta$ と定義する.

各 $\beta < \alpha$ について $p_\beta \in M_{\xi_{\beta+1}}$ かつ $\xi_\beta + 1 \leq \xi_{\beta+1} < \xi_\alpha$ だから, $\{p_\beta : \beta < \alpha\} \in {}^\alpha M_{\xi_\alpha} \subset M_{\xi_{\alpha+1}}$ である. 従って $p_\alpha \in M_{\xi_{\alpha+1}}$ となる. $M_{\xi_{\beta+1}} \cap \kappa^+$ は $p_{\beta+1}$ の最大元だから, $\bigcup p_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} (M_{\xi_\beta} \cap \kappa^+) = M_{\xi_\alpha} \cap \kappa^+$ である. ここで $|M_{\xi_\alpha} \cap \kappa^+| = \xi_\alpha$ は V で inaccessible であることを思い出そう.

$x \in T$ で $p_\alpha \cap P_{\kappa_x} x$ が stationary であると仮定してみる. 明らかに $x \subset \bigcup p_\alpha$ だから $V \models "x| \leq |M_{\xi_\alpha} \cap \kappa^+|"$ であり, $(|x|)^V < \xi_\alpha$ になっている. ここで $x \subset M_\alpha \cap \kappa^+ = g''\xi_\alpha = \bigcup_{\zeta < \xi_\alpha} g''\zeta$ である. $V \models " \xi_\alpha$ は正則" だから, ある $\zeta < \xi_\alpha$ に対して $x \subset g''\zeta$ になっている. 従って, $x \subseteq g''\xi_\gamma = M_{\xi_\gamma} \cap \kappa^+ \in p_\gamma$ を満たす $\gamma < \alpha$ が存在する.

$y \in p_\alpha \cap P_{\kappa_x} x$ をとると, $y \subset x \subseteq M_{\xi_\gamma} \cap \kappa^+ \in p_\gamma$ かつ, ある $\mu \in (\gamma, \alpha)$ に対して $y \in p_\mu$ である. $p_\mu \leq p_\gamma$ より, $y \in p_\gamma$ が分かる. 従って $p_\alpha \cap P_{\kappa_x} x = p_\gamma \cap P_{\kappa_x} x$ で, $p_\gamma \in \mathbb{P}$ であることから $p_\alpha \cap P_{\kappa_x} x$ は stationary ではない. ゆえに, p_α は condition で $\bigcap_{\beta < \alpha} D_\beta$ の元である.

最後に $\mathbb{P}$ は nonreflecting stationary set を force することを示す. G を W 上 $\mathbb{P}$ -generic, $S = \bigcup G$ とする. 簡単な density argument により S は $P_\kappa \kappa^+$ で unbounded なことが示される. $W[G]$ において S は $P_\kappa \kappa^+$ の stationary な部分集合で, どの T の元 x においても reflect しないことを示そう. $P_\kappa \kappa^+ \cap W = P_\kappa \kappa^+ \cap W[G]$ であることに注意する.

$D \subset P_\kappa \kappa^+$ を $W[G]$ における club, $\dot{D}$ はその name とする. $p \Vdash \dot{D}$ は $P_\kappa \kappa^+$ の closed unbounded な部分集合である" と仮定する.

十分大きな λ をとり, $\mathcal{N} \prec \langle H(\lambda), \in, \kappa, \kappa^+, P_\kappa \kappa^+, C, \mathbb{P}, \Vdash, \dot{D}, p \rangle$ で $|\mathcal{N}| = \kappa$, $\mathcal{N} \cap \kappa^+ \in \kappa^+$, かつ ${}^{<\kappa}(\mathcal{N} \cap \kappa^+) \subset \mathcal{N}$ であるものを選ぶ. κ から $\mathcal{N} \cap \kappa^+$ への全単射 $h \in V$ と $\mathcal{N}$ の elementary submodel 達の

YOSHIHIRO ABE

increasing continuous chain $\langle \mathcal{N}_{\nu_\alpha} \mid \alpha < \kappa \rangle$ で, 各 $\alpha < \kappa$ について $|\mathcal{N}_{\nu_\alpha}| < \kappa$, $\nu_\alpha \mathcal{N}_{\nu_\alpha} \subset \mathcal{N}_{\nu_{\alpha+1}}$, $h''\nu_\alpha \cap \kappa = \nu_\alpha \in G$ は基数で, $h''\nu_\alpha = \mathcal{N}_{\nu_\alpha} \cap \kappa^+$ が成り立つものを選ぶ. (これらの条件から $h''\nu_\alpha = \mathcal{N}_{\nu_\alpha} \cap \kappa$ であり, $\langle \nu_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ は increasing continuous である.)

次のように, condition 達の descending sequence $\langle p_n \mid n \in \omega \rangle$ を帰納的に定義する.

Elementarity から $p' \in \mathcal{N}_{\nu_0}$ と $x_0 \in \mathcal{N}_{\nu_0}$ で $p' \leq p$ かつ $p' \Vdash x_0 \in \dot{D}$ を満たすものが存在する. $p_0 = p' \cup (\mathcal{N}_{\nu_0} \cap \kappa^+)$ と定義する. 前と同様に $p_0 \in \mathbb{P} \cap \mathcal{N}_{\nu_0+1} \subset \mathcal{N}_{\nu_1}$ である.

$p_n \in \mathcal{N}_{\nu_{n+1}}$ が定義されていると仮定する. $\cup p_n = \mathcal{N}_{\nu_n} \cap \kappa^+ \in \mathcal{N}_{\nu_{n+1}}$ と $p_n \Vdash \dot{D}$ は club が成り立つ. $\mathcal{N}_{\nu_n} \cap \kappa^+ \in P_\kappa \kappa^+ \cap \mathcal{N}_{\nu_{n+1}}$ だから, $p'_n \in \mathcal{N}_{\nu_{n+1}}$ と $x_{n+1} \in \mathcal{N}_{\nu_{n+1}}$ で $p'_n \leq p_n$, $\mathcal{N}_{\nu_n} \cap \kappa^+ \subset x_{n+1}$, かつ $p'_n \Vdash x_{n+1} \in \dot{D}$ である. 従って $x_{n+1} \subset \mathcal{N}_{\nu_{n+1}} \cap \kappa^+ \subset \mathcal{N}_{\nu_{n+1}}$ である. $p_{n+1} = p'_n \cup \{\mathcal{N}_{\nu_{n+1}} \cap \kappa^+\}$ と置く.

$q = (\bigcup_{n \in \omega} p_n) \cup \{\mathcal{N}_{\nu_\omega} \cap \kappa^+\}$ とすると, 以前と同様に, $q \in \mathbb{P}$ で q は全ての p_n よりも強い. $\mathcal{N}_{\nu_n} \cap \kappa^+ \subset x_{n+1} \subset \mathcal{N}_{\nu_{n+1}} \cap \kappa^+ \subset \mathcal{N}_{\nu_{n+1}} \cap \kappa^+$ だから, $\mathcal{N}_{\nu_\omega} \cap \kappa^+ = \bigcup_{n \in \omega} x_n$ である. 全ての $n \in \omega$ に対して $p_n \Vdash x_n \in \dot{D}$ が成り立つ. 従って, $q \Vdash$ 全ての $n \in \omega$ に対して $x_n \in \dot{D}$ で, $\dot{D}$ は closed である" が成り立つ. ゆえに, $q \leq p$ かつ $q \Vdash \mathcal{N}_{\nu_\omega} \cap \kappa^+ \in \dot{D} \cap UG$ である. 従って S が stationary であることが示された.

S がある $x \in P_\kappa \kappa^+$ に reflect してしまったとする. $\mathbb{P}$ の順序の定義から, ある condition $p \in G$ が x に reflect していることになり, $p \in \mathbb{P}$ であることに反してしまう.

以上で定理の証明が終わった. □

3. 金森の WEAK NORMALITY の一般化

金森 [5] は weakly normal フィルターを正則な非可算基数に対し次のように定義した.

定義 3.1. κ 上のフィルター F が *weakly normal* とは, どんな κ 上定義された regressive function も F のある元の上で有界であることを言う.

この概念の講演者による $P_\kappa \lambda$ への一般化 [1] は, strong compactness を弱くしたものと見なせる. (その論文では, 同じく weakly normal と呼ばれている.)

定義 3.2. F を $P_\kappa \lambda$ 上のフィルターとする. どんな $P_\kappa \lambda$ 上で定義された regressive function も, ある F の元の上で有界なとき $AN(F)$ と書くことにする.

一方 $P_\kappa \lambda$ 上の strongly normal フィルターは [3] で supercompact 極大フィルターを弱くしたものとして導入された.

BASIC FORCING NOTIONS IN $P_{\kappa}\lambda$

定義 3.3. $P_{\kappa}\lambda$ から $P_{\kappa}\lambda$ への関数 f は, 全ての $x \in P_{\kappa}\lambda$ について $f(x) \in P_{\kappa}x$ であるとき *set regressive* であると言う.

$P_{\kappa}\lambda$ 上のフィルター F が *strongly normal* であるとは, 任意の F -positive な集合 X 上で定義された任意の *set regressive function* が, X のある positive な部分集合上で constant なことである.

これは次のことと同値である: どんな $\{X_s : s \in P_{\kappa}\lambda\} \subset I$ に対しても, $\nabla_s X_s = \{x : \text{ある } s \prec x \text{ に対して } x \in X_s\} \in I$ である.

明らかに, 全ての *strongly normal* イデアルは *normal* である.

金森のアイディアに従って, 次の *WN*-フィルターの概念を導入する.

定義 3.4. F を $P_{\kappa}\lambda$ 上のフィルターとする. $P_{\kappa}\lambda$ 上で定義された任意の *set regressive function* f に対して, ある $a \in P_{\kappa}\lambda$ が存在して $\{x \in P_{\kappa}\lambda : f(x) \subset a\} \in F$ を満たすとき, F を *WN*-フィルターと呼び, $WN(F)$ と書く. *WN*-フィルターに関しては, *completeness* の条件はなにも要求されていないことに注意する必要がある.

以下で *WN*-フィルターの存在から, そのフィルターの *completeness* に対応する範囲の *stationary set* の *reflection* が導かれることが明らかになる. オリジナルの *weak normality* は *weakly inaccessible* 基数の *stationary* な部分集合の *reflection* を導いたのだから, *WN*-フィルターは *AN*-フィルターよりも自然な金森の概念の一般化と言えるかもしれない.

最初に *WN*-フィルターの基本的な性質を述べる. まず *WN* という性質は *AN* よりも強いものであることが分かる.

補題 3.5. もし $cf(\lambda) \geq \kappa$ で $WN(F)$ ならば, $AN(F)$ である.

証明. $P_{\kappa}\lambda$ 上の *regressive* な f に対して, $g(x) = \{f(x)\}$ で定義される関数 g を考えると, g はある F の元の上で *set regressive* である. ゆえに, ある $a \in P_{\kappa}\lambda$ が存在し, $X = \{x \in P_{\kappa}\lambda : g(x) \subset a\} \in F$ が成り立つ. $cf(\lambda) \geq \kappa$ だから, $\sup(a) < \lambda$ であり, 全ての $x \in X$ について $f(x) \leq \sup(a)$ になっている. $\square$

ある $\lambda \geq \kappa$ に対して $P_{\kappa}\lambda$ 上に *AN*-フィルターが存在すれば, κ は *weakly inaccessible* であることに注意しよう. 次は直ちに分かることである.

補題 3.6. (1) *WN*-フィルターの拡大フィルターもまた *WN* である.

(2) F が $P_{\kappa}\lambda$ 上の *WN*-フィルターならば, 任意の $\delta \in [\kappa, \lambda)$ に対して $F \restriction \delta$ は $P_{\kappa}\delta$ 上の *WN*-フィルターである. (ここで $F \restriction \delta = \{X \subset P_{\kappa}\delta : \{x \in P_{\kappa}\lambda : x \cap \delta \in X\} \in F\}$ とする.)

(3) ある $\lambda \geq \kappa$ に対して $P_{\kappa}\lambda$ 上に *WN*-フィルターが存在すれば, κ は *weakly inaccessible* である.

$AN(F)$ であつたとしても $AN(F \upharpoonright \delta)$ とは限らないことには、注意を要する。

補題 3.7. $Reg = \{x \in P_\kappa \lambda : x \cap \kappa \text{ は正則} \}$ と置く. このとき $P_\kappa \lambda$ 上の WN -フィルターは全て $CF_{\kappa, \lambda} \upharpoonright Reg$ の拡大である.

証明. $X = \{x \in P_\kappa \lambda : x \cap \kappa \notin \kappa\} \in F^+$ と仮定する. 各 $x \in X$ に対し, $\alpha_x \in x \cap \kappa$ で $\alpha_x \notin x$ であるものがとれる. ある $a \in P_\kappa \lambda$ と $X' \in P(X) \cap F^+$ が存在し, 全ての $x \in X'$ に対し $\alpha_x \in a$ になる. ここで $a \subset \kappa$ としてもよい. $\alpha = \sup(a)$ と置くと $\alpha < \kappa$ であるが, どんな $x \in X'$ についても $\alpha \notin x$ となつてしまい矛盾する. ゆえに $\{x : x \cap \kappa \in x\} \in F$ である.

次に $j : \lambda \times \lambda \rightarrow \lambda$ を全単射とする. $Y = \{x : j''(x \times x) \not\subset x\} \in F^+$ と仮定して, f を $f(x) \in x \times x$ で $j(f(x)) \notin x$ であるように定める. $b \in P_\kappa \lambda$ と $Y' \in P(Y) \cap F^+$ が存在して, どんな $x \in Y'$ に対しても $f(x) \subset b$ になっている. 従つて, どんな $x \in Y$ についても $b \not\subset x$ となるが, これは矛盾である. ゆえに $\{x : j''(x \times x) \subset x\} \in F$ であり, $CF_{\kappa, \lambda} \subset F$ であることが分かる.

$Z = \{x : x \cap \kappa \text{ は正則ではない} \} \in F^+$ だと仮定する. κ は weakly inaccessible で Z は stationary だから, 全ての $x \in Z$ に対して $x \cap \kappa$ は基数であると仮定してよい. $c_x \subset x$ を cofinal で order type $< x \cap \kappa$ だとする. $c \in P_\kappa \lambda$ と $Z' \in F^+$ で, 全ての $x \in Z'$ に対して $c_x \subset c$ であるようなものが存在する. ここで $c \subset \kappa$ としてよいが, どんな $x \in Z'$ に対しても $x \cap \kappa \subset \bigcup c < \kappa$ となつて, 矛盾する. $\square$

系 3.8. WN -フィルターが存在すれば, κ は weakly Mahlo である.

$WCF_{\kappa, \lambda}$ で $P_\kappa \lambda$ 上の最小の strongly normal フィルターを表す. $WCF_{\kappa, \lambda}$ が自明でないフィルターであるための必要十分条件は, κ が Mahlo か $\kappa = \nu^+$ で $\nu < \nu = \nu$ であることが知られている. さらに, $X \in WCF_{\kappa, \lambda}$ であるための必要十分条件は, $f : P_\kappa \lambda \rightarrow P_\kappa \lambda$ で $\{x \in P_\kappa \lambda : f''P_{\kappa_x} x \subset P(x)\} \subset X$ となるものが存在することである. κ が Mahlo ならば, $\{x \in P_\kappa \lambda : \kappa_x = x \cap \kappa \text{ は inaccessible}\} \in WCF_{\kappa, \lambda}$ が成り立つ.

Strong normality と性質 WN の関係には次のようなものがある.

命題 3.9. (1) $WCF_{\kappa, \lambda}$ が自明でないならば, $P_\kappa \lambda$ 上の全ての WN -フィルターは $WCF_{\kappa, \lambda}$ の拡大である.

(2) F が $P_\kappa \lambda$ 上の strongly normal κ -saturated フィルターならば, $WN(F)$ が成り立つ.

(3) WN -フィルター F が κ -complete ならば, F は normal κ -saturated である. 従つて $WCF_{\kappa, \lambda}$ や $CF_{\kappa, \lambda}$ のいかなる restriction も WN ではない.

(4) κ が Mahlo のとき, $P_\kappa \lambda$ 上の任意のフィルターに対して, 以下の条件は同値である:

BASIC FORCING NOTIONS IN $P_\kappa\lambda$

1. F は κ -complete で WN .
2. F は *strongly normal κ -saturated*.

証明. (1) $X \in F^+$ で, 全ての $x \in X$ に対して $f(x) \in P_{\kappa_x}x$ であるとする. 仮定により κ は Mahlo である. ある $a \in P_\kappa\lambda$ に対して $Y = \{x \in X : x \cap \kappa \in \kappa \text{ and } f(x) \subset a\}$ は stationary になる. 全ての $x \in Y$ に対して $f(x) \subset a$ かつ $|P(a)| < \kappa$ である. 従って f は Y の unbounded な部分集合の上で constant になる. ゆえに $X \in WCF_{\kappa,\lambda}^+$ であることが分かった.

(2) 全ての $x \in P_\kappa\lambda$ に対して $g(x) \in P_{\kappa_x}x$ とし, $\mathcal{A} = \{g^{-1}(\{y\}) : y \in P_\kappa\lambda\} \cap F^+$ と置く. F は κ -saturated だから, $|\mathcal{A}| < \kappa$ である. $b = \bigcup \{y : g^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}\}$ と置くと, $b \in P_\kappa\lambda$, $\bigcup \mathcal{A} \in F$, かつ全ての $x \in \bigcup \mathcal{A}$ に対して $g(x) \subset b$ となる.

(3) h は $Z \in F^+$ 上 regressive だとする. $c \in P_\kappa\lambda$ で $Z' = \{x \in Z : h(x) \in c\} \in F^+$ となるものが存在する. κ -completeness により h はある F^+ の元の上で constant になるから, F は normal であることが示された.

次に, $\{W_\xi : \xi < \kappa\}$ は $P_\kappa\lambda$ の F -positive な集合達による互いに素な分割とする. $W'_\xi = \widehat{W_\xi \cap \{\xi\}}$ と置き, $x \in W'_\xi$ に対しては $k(x) = \xi$ と定義する. このとき $d \in P_\kappa\lambda$ で $W = \{x \in P_\kappa\lambda : k(x) \subset d\} \in F$ を満たすものが存在する. d の元でない ξ を何でもよいから 1 つ選ぶと, $W'_\xi \cap W = \emptyset$ となるが, これは矛盾である.

(4) は (2) と (3) から導かれる. □

補題 3.10. F は $P_\kappa\lambda$ 上の WN -フィルターとする.

(1) 全ての $s \in P_\kappa\lambda$ に対して $X_s \in F^+$ であり, $t \supset u$ ならば $X_t \subset X_u$ であるとする. このとき, $\Delta_{\prec s} X_s \triangleq \{x \in P_\kappa\lambda : \text{全ての } s \in P_{\kappa_x}x \text{ に対し } x \in X_s\} \in F^+$ である.

(2) どんな $s \in P_\kappa\lambda$ に対しても $\{x \in P_\kappa\lambda : f(x) \not\subset s\} \in F^+$ ならば, $X \in F^+$ で全ての $s \in P_\kappa\lambda$ について $f^{-1}(\{s\}) \cap X \in I_{\kappa,\lambda}$ が成り立つようなものが存在する.

証明. (1) 各ペア $s, t \in P_\kappa\lambda$ に対して $X_{s \cup t} \subset X_s \cap X_t \in F^+$ である. F' を F と $\{X_s : s \in P_\kappa\lambda\}$ から生成されるフィルターとする. $F \subset F'$ だから $WN(F')$ である. もし $\Delta_{\prec s} X_s \notin F^+$ ならば, $Y = \{x \in P_\kappa\lambda : \text{ある } s \in P_{\kappa_x}x \text{ に対して } x \notin X_s\} \in F'$ である. 従って $b \in P_\kappa\lambda$ で $Y' = \{x \in Y : \text{ある } s \subset b \text{ に対して } x \notin X_s\} \in G$ となるものが存在する. ゆえに, $Y' \cap X_b = \emptyset$ となるが, これは矛盾である.

(2) $X_s = \{x \in P_\kappa\lambda : f(x) \not\subset s\}$ と置くと, (1) により $Z = \Delta_{\prec s} X_s \in F^+$ を得る. $x \in Z \cap f^{-1}(\{s\})$ ならば $s \notin P_{\kappa_x}x$ であるから, $Z \cap f^{-1}(\{s\}) \in I_{\kappa,\lambda}$ である. □

定理 3.11. κ は Mahlo で F は $P_\kappa\lambda$ 上のフィルターとする. このとき, 次のことは同値である:

YOSHIHIRO ABE

(1) F は WN .

(2) $WCF_{\kappa,\lambda} \subset F$ かつ, $f: P_\kappa\lambda \rightarrow P_\kappa\lambda$ が任意の $a \in P_\kappa\lambda$ について $\{x: f(x) \not\subset a\} \in F^+$ を満たすならば, $X \cap f^{-1}(\{a\}) \in I_{\kappa,\lambda}$ が任意の $a \in P_\kappa\lambda$ に対し成り立つような $X \in F^+$ が存在する.

証明. 命題 3.9 と補題 3.10 から, (1) が (2) を導くことが分かる. そこで, (2) が成り立つと仮定する. もし F が WN でないならば, set regressive function f でどんな $s \in P_\kappa\lambda$ に対しても $X = \{x \in P_\kappa\lambda: f(x) \not\subset s\} \in F^+$ であるものが存在する. $X \in F^+$ だから, 任意の $a \in P_\kappa\lambda$ に対して $f^{-1}(\{a\}) \cap X \in I_{\kappa,\lambda}$ となる. 一方, F は $WCF_{\kappa,\lambda}$ の拡大だから, f は X のある unbounded な部分集合上で constant でなければならぬ. これは矛盾である. $\square$

次に, inaccessible でない基数に対しても WN -フィルターが存在しうることを示す.

補題 3.12. V において F は $P_\kappa\lambda$ 上の WN -フィルター, $\mu < \kappa$ で $\mathbb{P}$ は μ -c.c. を満たすとする. このとき, $V^\mathbb{P}$ において F は WN -フィルターを生成する.

証明. G を V 上 $\mathbb{P}$ -generic とし, $V[G]$ において F' を次のように定める;

$$F' = \{X \subset P_\kappa\lambda: Y \in F \text{ で } Y \subset X \text{ なものがある}\}.$$

$V[G] \models "f: P_\kappa\lambda \rightarrow P_\kappa\lambda \text{ で, 全ての } x \in P_\kappa\lambda \text{ に対して } f(x) \in P_{\kappa_x}x \text{ である}"$ とする. $\dot{f}$ を f の name とし, $X = \{x \in P_\kappa\lambda \cap V: \mu < x \cap \kappa \text{ は正則}\}$ と置くと $X \in F$ である. V において, $x \in X$ に対して $g(x)$ を次のように定める.

$\mathcal{A}_x$ を極大な anti chain $\subset \{p \in \mathbb{P}: \text{ある } \gamma_p \text{ に対して } p \Vdash \{\alpha_\xi: \xi < \gamma_p\} \text{ は } f(x) \text{ の increasing enumeration}\}$ とする.

$p \in \mathcal{A}_x$ と $\xi < \gamma_p$ に対して $\mathcal{B}_\xi^p$ を極大な anti chain $\subset \{q \leq p: q \Vdash \dot{\alpha}_\xi\}$ とする.

$g(x) = \{\beta: q \in \bigcup \{\mathcal{B}_\xi^p: \xi < \gamma_p, p \in \mathcal{A}_x\} \text{ で } q \Vdash \dot{\alpha}_\xi = \beta \text{ なものがある}\}$ と置く.

μ -c.c. により, $|\mathcal{A}_x|, |\mathcal{B}_\xi^p| < \mu$ である. 各 $p \in \mathcal{A}_x$ に対し $\gamma_p < x \cap \kappa$ だから, $|g(x)| \leq |\bigcup \{\mathcal{B}_\xi^p: p \in \mathcal{A}_x, \xi < \gamma_p\}| < x \cap \kappa$ である. $\beta \in g(x)$ ならば, q と ξ で $q \Vdash \beta = \dot{\alpha}_\xi$ を満たすものが存在するが, $q \Vdash \beta \in x$ 従って $\beta \in x$ である. ゆえに, 全ての $x \in X$ に対して $g(x) \in P_{\kappa_x}x$ である. F は WN だから, $a \in P_\kappa\lambda$ で $Y = \{x \in P_\kappa\lambda: g(x) \subset a\} \in F$ となるものが存在する.

$\Vdash_P "f(x) \subset g(x)"$ なので, $V[G] \models " \text{全ての } x \in Y \text{ に対して } f(x) \subset a "$ である.

従って $V[G] \models "\{x \in P_\kappa\lambda: f(x) \subset a\} \in F'"$ である. $\square$

BASIC FORCING NOTIONS IN $P_\kappa\lambda$

定理 3.13. ある種の巨大基数の仮定のもとで, $Con(\kappa$ は *inaccessible* でないが $P_\kappa\lambda$ 上に WN -フィルターが存在する) が言える. 実際, 「 $P_\kappa\lambda$ 上に *normal* だが *strongly normal* でない κ -saturated フィルターが存在する」という主張は無矛盾である.

証明. $P_\kappa\lambda$ 上に *strongly normal* (従って κ -complete) κ -saturated フィルターが存在するモデルから出発して、単純に κ 個の Cohen reals を付け加える. $Add(\omega, \kappa)$ は c.c.c. を満たすから, ground model の *strongly normal* κ -saturated フィルターは κ -complete WN -フィルターを生成する. $\square$

今度は, ある程度の completeness をもった WN -フィルターの存在の下での stationary reflection を考察する.

定義 3.14. $\omega < \mu \leq \kappa$ に対し, $X \subset P_\kappa\lambda$ は, unbounded で, μ 未満の長さの $\subset$ -increasing chain について閉じているとき $< \mu$ club であると言う. $CF_{\kappa,\lambda}^\mu$ で $< \mu$ club 達により生成されるフィルターを表す. 従って, $CF_{\kappa,\lambda}^\mu = CF_{\kappa,\lambda}^\mu$ である.

$S \subset P_\kappa\lambda$ が $CF_{\kappa,\lambda}^\mu$ -stationary とは $S \in (CF_{\kappa,\lambda}^\mu)^+$, つまり, S が全ての $< \mu$ club と空でない共通部分をもつことである.

命題 3.15. (1) 基数 μ に対して, $CF_{\kappa,\lambda}^\mu$ は $P_\kappa\lambda$ 上の κ -complete normal フィルターである.

(2) $\mu < \mu'$ ならば $CF_{\kappa,\lambda}^\mu \supseteq CF_{\kappa,\lambda}^{\mu'}$ である.

(3) $|\mu| < \mu$ ならば, $CF_{\kappa,\lambda}^\mu = CF_{\kappa,\lambda}^{\mu^+}$ である.

(4) μ が 極限基数ならば, $CF_{\kappa,\lambda}^\mu = \bigcap_{\delta < \mu} CF_{\kappa,\lambda}^\delta$ である.

(5) μ が 特異基数ならば, $CF_{\kappa,\lambda}^\mu = CF_{\kappa,\lambda}^{\mu^+}$ である.

証明. (1) だけを示す. 他は自明である.

$\delta < \kappa$ をとる. $\alpha < \delta$ に対し C_α は $< \mu$ club とし, $C = \bigcap_{\alpha < \delta} C_\alpha$ と置く. $\langle x_\xi | \xi < \gamma \rangle$ は C の元達の increasing chain で $\gamma < \mu$ とする. C_α は $< \mu$ club だから, $\bigcup_{\xi < \gamma} x_\xi \in C_\alpha$ である. ゆえに $\bigcup_{\xi < \gamma} x_\xi \in C$ となり, C は $< \mu$ -closed である.

C_α 達は unbounded で $\delta < \kappa$ であるから, 与えられた $x \in P_\kappa\lambda$ に対し, $\langle y_\alpha^0 | \alpha < \delta \rangle$ を $y_0^0 = x, y_\alpha^0 \subset y_{\alpha+1}^0 \in C_\alpha$, かつ $y_\alpha^0 = \bigcup_{\beta < \alpha} y_\beta^0$ がすべての極限順序数 $\alpha < \delta$ に対して成り立つように, 帰納的に定義することができる. $x_1 = \bigcup_{\alpha < \delta} y_\alpha^0$ と置く.

これを繰り返して $\langle x_n | n \in \omega \rangle$ を定める. x_n が定義されたとき, $y_0^n = x_n, y_\alpha^n \subset y_{\alpha+1}^n \in C_\alpha$, 極限順序数 $\alpha < \delta$ に対して $y_\alpha^n = \bigcup_{\beta < \alpha} y_\beta^n$ とし, $x_{n+1} = \bigcup_{\alpha < \delta} y_\alpha^n$ とすればよい.

最後に $x_\omega = \bigcup_{n \in \omega} x_n$ と置くと, $x \subset x_\omega$ は明らか. $x_\omega = \bigcup_{n \in \omega} y_\alpha^{n+1}$ で $\langle y_\alpha^{n+1} | n \in \omega \rangle$ は C_α の元達の increasing chain だから, $x_\omega \in C_\alpha$ で

YOSHIHIRO ABE

ある. 従って $x \subset x_\omega \in C$ となり, $CF_{\kappa,\lambda}^\mu$ が κ -complete なことが示された.

Normality を示すために, $\alpha < \lambda$ に対し D_α は $< \mu$ club とし, $D = \Delta_{\alpha < \lambda} D_\alpha$ と置く. $\eta < \mu$ として, 勝手な D の元達の increasing chain $\langle z_\zeta \mid \zeta < \eta \rangle$ をとり, $z = \bigcup_{\zeta < \eta} z_\zeta$ と置く. $\alpha \in z$ に対し, $\zeta_\alpha < \eta$ で任意の $\zeta \geq \zeta_\alpha$ について $\alpha \in z_\zeta$ であるものが存在する. ここで, 全ての $\zeta \geq \zeta_\alpha$ に対して $z_\zeta \in D_\alpha$ である. $\langle z_\zeta \mid \zeta_\alpha \leq \zeta < \eta \rangle$ は D_α の元達の increasing chain だから, $z = \bigcup_{\zeta_\alpha \leq \zeta} z_\zeta \in D_\alpha$ である. よって $z \in D$ であり, D は $< \mu$ -closed である.

$w \in P_\kappa \lambda$ が与えられたとする. $w_0 = w$ と置く. $w_n \in P_\kappa \lambda$ が定義されたとき, 各 $\alpha \in w_n$ に対し, $w_\alpha^n \in D_\alpha$ で $w_n \subset w_\alpha^n$ を満たすものとする. $w_{n+1} = \bigcup_{\alpha \in w_n} w_\alpha^n$ と置く. 最後に $w_\omega = \bigcup_{n \in \omega} w_n$ とすると, $w_\omega \supset w_0 = w$ である. 任意の $\alpha \in w_\omega$ に対し, $m \in \omega$ で全ての $n \geq m$ について $\alpha \in w_n$ であるものが存在する. 全ての $n \geq m$ に対して w_α^n が定義されていて $w_n \subset w_\alpha^n \subset w_{n+1}$ となっているから, $w_\omega = \bigcup_{n \geq m} w_\alpha^n \in D_\alpha$ である. 従って $w_\omega \in D$ であるが, これは D が unbounded なことを示している. $\square$

定義 3.16. $x \in P_\kappa \lambda$ に対し, $cf(P_{\kappa_x} x) = \min\{|X| : X \text{ は } P_{\kappa_x} x \text{ の unbounded な部分集合}\}$ とする.

補題 3.17. $P_\kappa \lambda$ 上の任意の μ^+ -complete WN-フィルター F に対し, $\{x : cf(P_{\kappa_x} x) > \mu\} \in F$ が成り立つ.

証明. 結論を否定すると, $X = \{x : cf(P_{\kappa_x} x) \leq \mu\} \in F^+$ である. $F' = F \restriction X = \{A \subset P_\kappa \lambda : \text{ある } B \in F \text{ に対し } B \cap X \subset A\}$ と置く. $x \in X$ に対し, $B_x \subset P_{\kappa_x} x$ は unbounded で $\{s_\alpha^x : \alpha < \mu\}$ をその enumeration とする. $\alpha < \mu$ に対し, $f_\alpha : X \rightarrow P_\kappa \lambda$ を $f_\alpha(x) = s_\alpha^x$ で定義する. f_α は set regressive だから, $a_\alpha \in P_\kappa \lambda$ と $Y_\alpha \in F'$ で, 全ての $x \in Y_\alpha$ に対して $f_\alpha(x) \subset a_\alpha$ が成り立つものが存在する. $a = \bigcup_{\alpha < \mu} a_\alpha$, $Y = \bigcap_{\alpha < \mu} Y_\alpha$ と置く. このとき $a \in P_\kappa \lambda$ かつ $Y \in F'$ であるが, 全ての $x \in Y$ に対し $x = \bigcup B_x \subset a$ であることになり, 矛盾する. $\square$

注意 3.18. 上の補題では, 「全ての set regressive function f に対して, $X \in F$ で $f''X \in I_{\kappa,\lambda}$ になるものが存在する」ということだけで十分である.

定理 3.19. $\omega \leq \mu < \kappa$ で F は $P_\kappa \lambda$ 上の μ^+ -complete な WN-フィルターとする. S が $CF_{\kappa,\lambda}^{\mu^+}$ -stationary ならば, $\{x \in P_\kappa \lambda : S \cap P_{\kappa_x} x \text{ は } P_{\kappa_x} x \text{ で stationary}\} \in F$ である.

証明. S は $CF_{\kappa,\lambda}^{\mu^+}$ -stationary だが, $X = \{x \in P_\kappa \lambda : S \cap P_{\kappa_x} x \text{ は } P_{\kappa_x} x \text{ で stationary でない}\} \in F^+$ と仮定する. 全ての $x \in X$ に対して $x \cap \kappa$ は μ より大きい正則な基数で, $cf(P_{\kappa_x} x) > \mu$, かつ $C_x \subset P_{\kappa_x} x$ は $C_x \cap S = \emptyset$ であるような club とする. $F' = F \restriction X$ と置く.

BASIC FORCING NOTIONS IN $P_\kappa\lambda$

$C = \{y \in P_\kappa\lambda : \{x \in X : y \in C_x\} \in F'\}$ は $< \mu^+$ club であることを示す.

勝手な $z \in P_\kappa\lambda$ をとる. $\{x \in X : z \in P_{\kappa_x}x\} \in F'$ であることに留意する. $f_0(x) \in C_x$ を, もし存在するなら $z \subset f_0(x)$ であるようなものとし, そのようなものがないならば $f_0(x) = \emptyset$ とする. $a_0 \in P_\kappa\lambda$ と $X_0 \in F'$ で, 任意の $x \in X_0$ に対し $z \subset f_0(x) \subset a_0$ であるものが存在する.

$a_n \in P_\kappa\lambda$, $X_n \in F'$ と f_n が, 全ての $x \in X_n$ について $f_n(x) \subset a_n$ であるように定まったとする. $\{x \in X : a_n \in P_{\kappa_x}x\} \in F'$ だから, set regressive な f_{n+1} で $\{x : a_n \subset f_{n+1}(x) \in C_x\} \in F'$ であるものを定義することができ, $a_{n+1} \in P_\kappa\lambda$ と $X_{n+1} \in F'$ で, 任意の $x \in X_{n+1}$ に対し $a_n \subset f_{n+1}(x) \subset a_{n+1}$ となるものを見つけることができる.

$y = \bigcup_{n \in \omega} a_n$, $Y = \bigcap_{n \in \omega} X_n$ と置くと, $a \in P_\kappa\lambda$ で $Y \in F'$ である. 全ての $x \in Y$ に対し

$$z \subset f_0(x) \subset a_0 \subset \cdots \subset a_n \subset f_{n+1}(x) \subset a_{n+1} \subset \cdots \subset y$$

が成り立ち, 全ての $n \in \omega$ に対し $f_n(x) \in C_x$ である. C_x は closed で $cf(P_{\kappa_x}x) > \mu \geq \omega$ だから, $y = \bigcup_{n \in \omega} f_n(x) \in C_x$ を得る.

従って $z \subset y \in C$ となるから, C は unbounded である.

C が closed なことを示すために, $\langle y_\alpha \mid \alpha < \mu \rangle$ を C の元達の increasing chain とし, $w = \bigcup_{\alpha < \mu} y_\alpha$ とする. 明らかに $w \in P_\kappa\lambda$ である. 全ての $\alpha < \mu$ について $\{x \in X : y_\alpha \in C_x\} \in F'$ だから, 全ての $x \in Z$ と $\alpha < \mu$ に対し $y_\alpha \in C_x$ であるような $Z \in F'$ が存在する. C_x は $P_{\kappa_x}x$ の club で, $x \cap \kappa$ は μ より大きい正則な基数だから, 全ての $x \in Z$ に対して $w \in C_x$ が成り立つ. 従って $w \in C$ であり, C が $< \mu^+$ -closed なことが分かった.

以上から, $C \subset P_\kappa\lambda$ は $< \mu^+$ -club だから, $S \cap C \neq \emptyset$ である. $y \in S \cap C$ をとると, $\{x \in X : y \in C_x\} \in F'$ となるから $\{x \in X : S \cap C_x \neq \emptyset\} \neq \emptyset$ となり, 矛盾が出る. $\square$

系 3.20. $P_\kappa\lambda$ 上に *strongly normal κ -saturated* フィルター F が存在するならば, あらゆる $P_\kappa\lambda$ の *stationary* な部分集合は F のある元の上に *reflect* する.

最後に WN -フィルターの nonregularity に触れる. $P_\kappa\lambda$ 上のフィルターとしては $I_{\kappa,\lambda}^*$ の拡大だけを考えているので, 必然的に (κ, λ) -regular になる.

命題 3.21. F を $P_\kappa\lambda$ 上の WN -フィルターとし, $cf(\lambda) \geq \kappa$ とすると, 次のことが成り立つ.

- (1) $\{x : cf(\sup(x)) \geq x \cap \kappa\} \in F$.
- (2) $P_\kappa\lambda$ 上の F の拡大フィルターは全て, どんな $\mu < \kappa$ に対しても (μ, λ) -regular ではない.

YOSHIHIRO ABE

証明. (1) $F \supset CF_{\kappa, \lambda}$ だから, $\{x : o.t.(x) \text{ は極限順序数} \} \in F$ である. $X = \{x \in P_{\kappa} \lambda : cf(\sup(x)) < x \cap \kappa\} \in F^+$ と仮定する. 各 $x \in X$ に対し, $a_x \subset x$ を x の cofinal な部分集合で $|a_x| < x \cap \kappa$ を満たすものとする. このとき, ある $a \in P_{\kappa} \lambda$ に対して, $Y = \{x \in P_{\kappa} \lambda : a_x \subset a\} \in F^+$ となる. 全ての $x \in Y$ に対して $x \subset \sup(a) < \lambda$ となるが, これは矛盾である.

(2) $\mathcal{U}$ を $P_{\kappa} \lambda$ 上の F の拡大極大フィルターとする. (1) より $\{x : cf(\sup(x)) > \mu\} \in \mathcal{U}$ である. $AN(\mathcal{U})$ だから, $\{[c_{\gamma}]_{\mathcal{U}} : \gamma < \lambda\}$ は $[\sup(x) | x \in P_{\kappa} \lambda]_{\mathcal{U}}$ において cofinal になっている. そこで, 次の主張を証明すればよい.

主張 3.22. $\mathcal{U}$ が (μ, λ) -regular な $P_{\kappa} \lambda$ 上の極大フィルターで, $f : P_{\kappa} \lambda \rightarrow \lambda$ が $\{x : cf(f(x)) \geq \mu\} \in \mathcal{U}$ を満たすならば, $V^{P_{\kappa} \lambda} / \mathcal{U} \models "cf([f]_{\mathcal{U}}) \geq \lambda^+"$ が成り立つ.

証明. (主張) 全ての x に対して, $cf(f(x)) \geq \mu$ と仮定してよい. $\{g_{\alpha} : \alpha < \lambda\}$ は $g_{\alpha} : P_{\kappa} \lambda \rightarrow \lambda$ で, 全ての $\alpha < \lambda$ について $[g_{\alpha}]_{\mathcal{U}} < [f]_{\mathcal{U}}$ が成り立っているとする. さらに, 任意の x に対して $g_{\alpha}(x) < f(x)$ としてよい. $\{X_{\alpha} : \alpha < \lambda\}$ を (μ, λ) -regularity を保証する族とし, $g(x) = \sup\{g_{\alpha}(x) : x \in X_{\alpha}\}$ とする.

全ての x に対し, $|\{\alpha : x \in X_{\alpha}\}| < \mu$ 従って $g(x) < f(x)$ が成り立つ. 全ての $\alpha < \lambda$ に対して $[g_{\alpha}]_{\mathcal{U}} \leq [g]_{\mathcal{U}}$ であることは, 明らかである. $\square$

 $\square$

REFERENCES

- [1] Y. Abe, *Weakly normal ideals on $P_{\kappa} \lambda$ and the singular cardinal hypothesis*, Fund. Math. 143 (1993), 97-106.
- [2] A. Apter and S. Shelah, *Menas' result is best possible*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 2007-2034.
- [3] D. M. Carr, J. P. Levinski and D. H. Pelletier, *On the existence of strongly normal ideals on $P_{\kappa} \lambda$* , Arch. Math. Logic 30 (1990), 59-72.
- [4] M. Gitik, *Nonsplitting stationary subsets of $P_{\kappa} \kappa^+$* , J. Symbolic Logic 50 (1985), 881-894.
- [5] A. Kanamori, *Weakly normal filters and irregular ultrafilters*, Trans. Amer. Math. Soc. 220 (1976), 393-399.
- [6] T. Jech, *Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals*, Ann. Math. Logic 5 (1973), 165-198.