

解析関数の係数評価について

布川 護 (群馬大学・教育学部)、 尾和 重義 (近畿大学・理工学部)、
高橋 典宏 (群馬大学・教育学部)

1 星型関数の係数評価

単位円板 $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ で解析的である関数

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

の全体を $A(1)$ で表す。

1960年に J. Clunie と F. R. Keogh [1] は $A(1)$ の関数 $f(z)$ に対して、次のような定理を与えた。

【定理A】 $A(1)$ の関数 $f(z)$ が U で星型で、 U を面積 Δ の領域に写像するとき、

$$|a_n| \leq \frac{2}{n-1} \left(\frac{\Delta}{\pi} \right)^{1/2} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

が成り立つ。

また、1962年に Ch. Pommerenke [3] が次の結果を証明した。

【定理B】 $A(1)$ の関数 $f(z)$ が U で星型で、 U を面積 π の領域に写像するとき、

$$|a_n| \leq \frac{2}{n+1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

が成り立つ。

さらに、1964年に J. Clunie と Ch. Pommerenke [2] は次のような定理を証明した。

【定理C】 $A(1)$ の関数 $f(z)$ が U で close-to-convex ならば

$$|a_n| < \frac{(2 + \sqrt{2})e}{n} M \left(\frac{n}{n+1} \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

が成り立つ。ただし、 $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ である。

特に、 $|f(z)| < 1$ ($z \in U$) ならば

$$|a_n| < \frac{(2 + \sqrt{2})e}{n} < \frac{9.3}{n} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

が成り立つ。

2 解析関数の係数評価

単位円板 U で解析的な関数

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \quad (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\})$$

の族を $A(p)$ で表す。定理A、定理B、および定理C では関数族 $A(1)$ の関数に対する係数評価が与えられた。ここでは、関数族 $A(p)$ の関数に対する係数評価を考察する。

【定理1】 $A(p)$ の関数 $f(z)$ に対して

$$|a_{p+n}| \leq \sqrt{\frac{S(r)}{2\pi}} \left(\frac{4(p+n)+1}{2(p+n)r^{p+n}} \right) \frac{1}{\sqrt{2(p+n)+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。ただし、 $|z| < r \leq 1$ および

$$S(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho |f'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho d\theta \quad (0 < r < 1)$$

とする。

【証明】 コーシーの積分表示によって、 $A(p)$ の関数

$$f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + a_{p+2}z^{p+2} + \dots + a_{p+n}z^{p+n} + \dots$$

に対して、

$$(p+n)a_{p+n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{z^{p+n}} dz \quad (0 < |z| = r < 1)$$

すなわち、

$$(p+n)|a_{p+n}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\theta})|}{r^{p+n-1}} d\theta$$

が成り立つ。したがって、

$$(p+n)|a_{p+n}| \rho^{2(p+n)-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{p+n} \sqrt{\rho} |f'(\rho e^{i\theta})| d\theta$$

を得る。この両辺を積分して、

$$\begin{aligned} (p+n)|a_{p+n}| \int_0^r \rho^{2(p+n)-\frac{1}{2}} d\rho &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho} |f'(\rho e^{i\theta})| \rho^{p+n} d\theta d\rho \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho |f'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho d\theta \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^{2(p+n)} d\rho d\theta \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$|a_{p+n}| \leq \sqrt{\frac{S(r)}{2\pi}} \left(\frac{4(p+n)+1}{2(p+n)r^{p+n}} \right) \frac{1}{\sqrt{2(p+n)+1}}$$

を得る。

定理1から $A(1)$ の関数 $f(z)$ に対して、次の定理が得られる。

【定理2】 $A(1)$ の関数 $f(z)$ に対して

$$|a_n| \leq \sqrt{\frac{S(r)}{2\pi}} \left(\frac{4n+1}{2nr^n} \right) \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

が成り立つ。

【注意】 定理2では、関数 $f(z)$ の単葉性を仮定していないが、 $f(z)$ が U で単葉ならば、 $S(r)$ は領域 $f(|z| < r)$ の面積に等しくなる。このとき、

$$|a_n| \leq \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \left(\frac{4n+1}{2n} \right) \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

が得られる。ただし、 S は領域 $f(|z| < 1)$ の面積を表す。

最後に、定理 2 から

【系】 $A(1)$ の関数 $f(z)$ が $S \leq \pi$ を満たすとき

$$|a_n| \leq \left(\frac{4n+1}{2\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

が成り立つ。

参考文献

- [1] J.Clunie and F.R.Keogh, *On starlike and convex schlicht functions*, J. London Math. Soc. **35**(1960), 229 - 233.
- [2] J.Clunie and Ch.Pommerenke, *On the coefficients of close-to-convex univalent functions*, J. London Math. Soc. **41**(1966), 161 - 165.
- [3] Ch.Pommerenke, *On starlike and convex functions*, J. London Math. Soc. **37**(1962), 209 - 224.