

Empirical Bayes estimation of a truncation parameter for a oTEF

筑波大学・数理解析系 赤平 昌文

Masafumi Akahira

Institute of Mathematics

University of Tsukuba

1. はじめに

正則と非正則の両方の性質を併せもつ分布族として、切断指数型分布族は有用である。たとえば、その分布族に属するパレート (Pareto) 分布はファイナンス、物理学、水文学、天文学等の分野でよく用いられ、その性質も研究されている (Johnson et al.[JKB94], Arnold[Ar15])。

従来、切断母数 γ と自然母数 θ をもつ片側切断指数型分布族 (one-sided truncated exponential family of distributions, 略して oTEF) の分布から得られた大きさ n の無作為標本に基づいて γ の最尤推定量 (maximum likelihood estimator, 略して MLE), ベイズ (Bayes) 推定量の漸近平均, 漸近分散を 2 次のオーダーまで求めて比較が行われた (Akahira[A17])。しかし、ベイズ推定量の場合には事前分布を主観的に選ぶことも多いので、本稿では、客観的にベイズ推定を行うために、経験的ベイズの観点から γ の推定について考察する。実際、 γ の経験的ベイズ推定量を求め、その漸近平均, 漸近分散を 2 次のオーダーまで計算する。そして、 γ の補正 MLE, ベイズ推定量との漸近的比較も行う。

2. 片側切断指数型分布族と共役事前分布族

まず、 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ をたがいに独立に、いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度

$$p(x; \theta, \gamma) = \begin{cases} a(x)e^{\theta u(x)} / b(\theta, \gamma) & (\gamma \leq x < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (2.1)$$

をもつ片側切断指数型分布族 (oTEF) $\mathcal{P}$ の分布に従う確率変数列とする (Bar-Lev[BL84], [A17])。ただし、 $-\infty \leq c < \gamma < d \leq \infty$ とし、 $a(\cdot)$ は正値で、ほとんど至るところ連続とし、 $u(\cdot)$ は区間 (γ, d) 上で絶対連続で $du(x)/dx \neq 0$ とする。また、 $\gamma \in (c, d)$ について

$$\Theta(\gamma) := \left\{ \theta \mid 0 < b(\theta, \gamma) := \int_{\gamma}^d a(x)e^{\theta u(x)} dx < \infty \right\}$$

とし、任意の $\gamma \in (c, d)$ について $\Theta \equiv \Theta(\gamma)$ は空でない開区間であると仮定する。次に、 γ の事前密度として

$$\pi(\gamma; \eta, \xi) = \begin{cases} \frac{\alpha(\gamma)e^{\eta w(\gamma)}}{\beta(\eta, \xi)} & (\xi \leq \gamma < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (2.2)$$

となる oTEF の密度を取る. ただし, $c < \xi < d$ とし, $\alpha(\cdot)$ は正値で微分可能とし, $w(\cdot)$ は区間 (ξ, d) 上で微分可能で $w'(\gamma) \neq 0$ とする. また, $\xi \in (c, d)$ について

$$\mathcal{H}(\xi) := \left\{ \eta \mid 0 < \beta(\eta, \xi) = \int_{\xi}^d \alpha(\gamma) e^{\eta w(\gamma)} d\gamma < \infty \right\} \quad (2.3)$$

とし, 任意の $\xi \in (c, d)$ について $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\xi)$ は空でない開区間であると仮定する.

いま, (2.1) より $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n)$ の同時密度は

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta, \gamma) = \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n a(x_i) e^{\theta \sum_{i=1}^n u(x_i)}}{b^n(\theta, \gamma)} & (\gamma \leq x_{(1)}, x_{(n)} < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (2.4)$$

になる. ただし, $x_{(1)} := \min_{1 \leq i \leq n} x_i$, $x_{(n)} := \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ とする. このとき, (2.2), (2.4) より $\mathbf{X}$ の周辺密度は

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x}|\theta, \eta, \xi) &:= \int_c^d f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta, \gamma) \pi(\gamma; \eta, \xi) d\gamma \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n a(x_i) e^{\theta \sum_{i=1}^n u(x_i)}}{\beta(\eta, \xi)} \int_{\xi}^{x_{(1)}} \frac{\alpha(\gamma) e^{\eta w(\gamma)}}{b^n(\theta, \gamma)} d\gamma \end{aligned} \quad (2.5)$$

となるから, 事後密度は

$$\pi_{\theta, \eta, \xi}(\gamma|\mathbf{x}) = \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta, \gamma) \pi(\gamma; \eta, \xi)}{\int_c^d f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta, \gamma) \pi(\gamma; \eta, \xi) d\gamma} = \frac{\alpha(\gamma) e^{\eta w(\gamma)}}{b^n(\theta, \gamma) B(\theta, \eta, \xi)} \chi_{[\xi, x_{(1)}]}(\gamma) \quad (2.6)$$

になる. ただし, $B(\theta, \eta, \xi) := \int_{\xi}^{x_{(1)}} \alpha(\gamma) e^{\eta w(\gamma)} / b^n(\theta, \gamma) d\gamma$, $\chi_A(x)$ は集合 A の定義関数とする. このとき, θ が既知ならば $\pi_{\theta, \eta, \xi}(\cdot|\mathbf{x})$ は oTEF の密度になるので, 事前分布族の oTEF は oTEF $\mathcal{P}$ に対して共役事前分布族になる.

3. 経験的ベイズ推定

前節の設定の下で, $\mathbf{X}$ の周辺密度 (2.5) は

$$m(\mathbf{x}; \theta, \eta, \xi) = \prod_{i=1}^n a(x_i) e^{\theta \sum_{i=1}^n u(x_i)} \int_{\xi}^{x_{(1)}} \frac{\pi(\gamma; \eta, \xi)}{b^n(\theta, \gamma)} d\gamma \quad (3.1)$$

になる. ここで, θ, η を既知と仮定し,

$$G(\xi) := \int_{\xi}^{x_{(1)}} \frac{\pi(\gamma; \eta, \xi)}{b^n(\theta, \gamma)} d\gamma \quad (c < \xi < x_{(1)})$$

とおく. いま, (2.2), (2.3) より $(\partial/\partial\xi) \log \beta(\eta, \xi) = -\pi(\xi; \eta, \xi)$ となるから $G'(\xi) = 0$ の解は

$$\pi(\xi; \eta, \xi) \int_{\xi}^{x_{(1)}} \frac{\{\alpha(\gamma)/\alpha(\xi)\} e^{\eta\{w(\gamma)-w(\xi)\}}}{\{b(\theta, \gamma)/b(\theta, \xi)\}^n} d\gamma = 1 \quad (3.2)$$

の解となるから、これを $\xi = \hat{\xi}(x_{(1)})$ とする。通常の経験的ベイズ法では $G(\xi)$ を最大にする $\xi = \hat{\xi}^*(x_{(1)})$ 、すなわち $\mathbf{X}$ の周辺密度 (3.1) を最大にする $\hat{\xi}^*(x_{(1)})$ を用いて、2乗損失による事後リスクを最小にする事後平均 $E_{\theta, \eta, \xi}(\gamma | \mathbf{X})$ の ξ に $\hat{\xi}^*(x_{(1)})$ を代入したものを γ の経験的ベイズ (empirical Bayes, 略して EB) 推定量と定義している (Lehmann and Casella[LC98])。ただし、 $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ とする。しかし、ここでは、(3.2) の解 $\xi = \hat{\xi}(x_{(1)})$ を用いて

$$E_{\theta, \eta, \xi}(\gamma | \mathbf{X}) = \int_{\xi}^{X_{(1)}} \gamma \pi_{\theta, \eta, \xi}(\gamma | \mathbf{X}) d\gamma \quad (3.3)$$

の ξ に $\hat{\xi}(X_{(1)})$ を代入したものを γ の EB 推定量 $\hat{\gamma}_{EB}(\mathbf{X})$ と定義する。このとき、(2.4), (2.6), (3.3) より

$$\hat{\gamma}_{EB}(\mathbf{X}) = \int_{\hat{\xi}}^{X_{(1)}} \frac{\gamma}{b^n(\theta, \gamma)} \pi(\gamma; \eta, \hat{\xi}) d\gamma \Big/ \int_{\hat{\xi}}^{X_{(1)}} \frac{1}{b^n(\theta, \gamma)} \pi(\gamma; \eta, \hat{\xi}) d\gamma \quad (3.4)$$

となるから、[A17] の第 6.3 節と同様にして、 $T_{(1)} := n(X_{(1)} - \gamma)$, $\tau_n := n(\hat{\xi} - \gamma)$ とすれば

$$\hat{\gamma}_{EB} = \gamma + \frac{1}{n} \left\{ \int_{\tau_n}^{T_{(1)}} \frac{u \pi\left(\gamma + (u/n); \eta, \hat{\xi}\right)}{b^n(\theta, \gamma + (u/n))} du \Big/ \int_{\tau_n}^{T_{(1)}} \frac{\pi\left(\gamma + (u/n); \eta, \hat{\xi}\right)}{b^n(\theta, \gamma + (u/n))} du \right\}$$

になり、右辺の第 2 項の分子、分母を Taylor 展開して、確率展開

$$\begin{aligned} T_{EB} &:= n(\hat{\gamma}_{EB} - \gamma) \\ &= T_{(1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{kn} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) \left(T_{(1)} - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k^2 n} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k - \tilde{\pi}_{\eta, \hat{\xi}}(\gamma) \right) + O_p \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} k &= k(\theta, \gamma) = a(\gamma) e^{\theta u(\gamma)} / b(\theta, \gamma), \\ \tilde{\pi}_{\eta, \hat{\xi}}(\gamma) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \log \pi(\gamma; \eta, \hat{\xi}) \right\} \chi_{(\hat{\xi}, d)}(\gamma) = \left\{ \frac{\alpha'(\gamma)}{\alpha(\gamma)} + \eta w'(\gamma) \right\} \chi_{(\hat{\xi}, d)}(\gamma) \end{aligned} \quad (3.6)$$

とする。ここで、 $C(\eta, \gamma) = \{\alpha'(\gamma)/\alpha(\gamma)\} + \eta w'(\gamma)$ とおく。

次に、 T_{EB} の漸近平均、漸近分散を求めよう。まず

$$\hat{\xi} = \xi(X_{(1)}) = \hat{\xi} \left(\gamma + \frac{T_{(1)}}{n} \right) = \hat{\xi}(\gamma) + \frac{T_{(1)}}{n} \hat{\xi}'(\gamma) + O_p \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

となる。ここで $\hat{\xi}'(\gamma) \neq 0$ と仮定する。いま、 $\hat{\xi}'(\gamma) > 0$ のとき、 $\hat{\xi} = \hat{\xi}(X_{(1)}) < \gamma$ は

$$T_{(1)} < \frac{n}{\xi'(\gamma)} \left(\gamma - \hat{\xi}(\gamma) \right) + O_p \left(\frac{1}{n} \right) =: nh(\gamma) + O_p \left(\frac{1}{n} \right) \quad (3.7)$$

と同等になる. なお, $h(\gamma) > 0$ であることに注意. 一方, $T_{(1)}$ の漸近密度は

$$f_{T_{(1)}}(t) = \begin{cases} ke^{-kt} - \frac{1}{2n} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) (kt^2 - 2t)ke^{-kt} + O_p \left(\frac{1}{n^2} \right) & (t > 0), \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases} \quad (3.8)$$

になるから

$$E_\gamma \left[T_{(1)} - \frac{1}{k} \right] = -\frac{1}{k^2 n} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) + O \left(\frac{1}{n^2} \right), \quad (3.9)$$

$$E_\gamma \left[\left(T_{(1)} - \frac{1}{k} \right)^2 \right] = \frac{1}{k^2} - \frac{4}{k^3 n} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad (3.10)$$

になる ([A17] の第 2.9 節, 第 4.8 節参照). また, (3.7) より

$$P_\gamma \left\{ \hat{\xi} < \gamma \right\} = P_\gamma \left\{ T_{(1)} < nh(\gamma) + O_p \left(\frac{1}{n} \right) \right\} = 1 + O \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

になり, そして, (3.6) より

$$E_\gamma \left[\tilde{\pi}_{\eta, \hat{\xi}}(\gamma) \right] = C + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad (3.11)$$

になる. 同様にして

$$E_\gamma \left[\tilde{\pi}_{\eta, \hat{\xi}} \left(T_{(1)} - \frac{1}{k} \right) \right] = O \left(\frac{1}{n} \right) \quad (3.12)$$

になる. そこで, (3.5), (3.9), (3.11) より

$$\begin{aligned} E_\gamma (T_{EB}) &= E_\gamma \left[T_{(1)} - \frac{1}{k} \right] + \frac{1}{kn} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) E_\gamma \left[T_{(1)} - \frac{1}{k} \right] \\ &\quad - \frac{1}{k^2 n} \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \log k - E_\gamma \left(\tilde{\pi}_{\eta, \hat{\xi}} \right) \right\} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \\ &= -\frac{2}{k^2 n} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) + \frac{1}{k^2 n} C + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる. さらに, (3.5), (3.9)~(3.12) より

$$\begin{aligned} E_\gamma (T_{EB}^2) &= E_\gamma \left[\left(T_{(1)} - \frac{1}{k} \right)^2 \right] + \frac{1}{k^2 n} E_\gamma \left[\tilde{\pi}_{\eta, \hat{\xi}} \left(T_{(1)} - \frac{1}{k} \right) \right] \\ &\quad + \frac{2}{kn} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) E_\gamma \left[\left(T_{(1)} - \frac{1}{k} \right) \left(T_{(1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2 n} \tilde{\pi}_{\eta, \hat{\xi}} \right) \right] \\ &\quad - \frac{2}{k^2 n} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) E_\gamma \left[T_{(1)} - \frac{1}{k} \right] + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k^2} - \frac{2}{k^3 n} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となるから, T_{EB} の漸近分散は (3.13) より

$$V_\gamma(T_{EB}) = \frac{1}{k^2} - \frac{2}{k^3 n} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.14)$$

になる. 次に, $\hat{\xi}'(\gamma) < 0$ のときには, $h(\gamma) < 0$ となるので, (3.6), (3.8) より $E_\gamma[\tilde{\pi}_{\theta, \eta, \hat{\xi}}(\gamma)] = C + O(1/n)$,

$$E_\gamma \left[\tilde{\pi}_{\theta, \eta, \hat{\xi}} \left(T_{(1)} - \frac{1}{k} \right) \right] = C E_\gamma \left[T_{(1)} - \frac{1}{k} \right] = -\frac{C}{k^2 n} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

となり, T_{EB} の漸近平均, 漸近分散もそれぞれ (3.13), (3.14) になる. よって (3.13), (3.14) より

$$E_\gamma(kT_{EB}) = -\frac{2}{kn} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) + \frac{1}{kn} C + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (3.15)$$

$$V_\gamma(kT_{EB}) = 1 - \frac{2}{kn} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.16)$$

になる. ただし, $C = C(\eta, \gamma) = \{\alpha'(\gamma)/\alpha(\gamma)\} + \eta w'(\gamma)$ とする.

4. 経験的ベイズ推定量とベイズ推定量, 補正 MLE の比較

第2節の設定の下で, θ が既知のときに γ の事前密度を $\pi(\gamma)$ とし, 2乗損失と π に関するベイズ推定量 $\hat{\gamma}_{B, \theta}$ とすれば,

$$\begin{aligned} T_{B, \theta} &= n(\hat{\gamma}_{B, \theta} - \gamma) \\ &= T_{(1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{kn} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) T_{(1)} - \frac{1}{k^2 n} \left\{ 2 \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) - \pi_{(1)} \right\} + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

となる ([A17] の第6.3節). ただし, $\pi_{(1)} = \pi_{(1)}(\gamma) := (\partial/\partial \gamma) \log \pi(\gamma)$ とする. また, γ の MLE $\hat{\gamma}_{ML}$ は $X_{(1)}$ となるので, それを偏り補正して

$$\hat{\gamma}_{ML}^\theta := X_{(1)} - \frac{1}{\hat{k}_\theta n}$$

とすると, $T_{(1)}^* = n(\hat{\gamma}_{ML}^\theta - \gamma)$ の確率展開は

$$T_{(1)}^* = T_{(1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{kn} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) T_{(1)} + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (4.2)$$

となる ([A17] の第4.3節参照). ただし, $\hat{k}_\theta = k(\theta, X_{(1)})$ とする. このとき, (3.5), (4.1), (4.2) より

$$T_{EB} = T_{(1)}^* - \frac{1}{k^2 n} \left\{ 2 \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) - \tilde{\pi}_{\eta, \hat{\xi}} \right\} + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$T_{B,\theta} = T_{(1)}^* - \frac{1}{k^2 n} \left\{ 2 \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) - \pi_{(1)} \right\} + O_p \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

となり, また

$$T_{EB} - T_{B,\theta} = \frac{1}{k^2 n} \left(\tilde{\pi}_{\eta, \xi} - \pi_{(1)} \right) + O_p \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad (4.3)$$

になる. よって, (4.3) より

$$n \{ E_\gamma [kT_{EB}] - E_\gamma [kT_{B,\theta}] \} = \frac{1}{k} \{ C - \pi_{(1)}(\gamma) \} + O \left(\frac{1}{n} \right)$$

になる. さらに, (3.16) と [A17] の第 6.3 節より, 漸近分散について

$$\begin{aligned} V_\gamma (kT_{EB}) &= V_\gamma (kT_{B,\theta}) = V_\gamma (kT_{(1)}^*) \\ &= 1 - \frac{2}{kn} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \log k \right) + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

となる. よって, $\hat{\gamma}_{EB}$, $\hat{\gamma}_{B,\theta}$, $\hat{\gamma}_{ML}^\theta$ は漸近平均の $1/n$ のオーダーで異なるが, 漸近分散については $1/n$ のオーダーまで等しいことが分かる.

例 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ をたがいに独立に, いずれも密度

$$p(x; \theta, \gamma) = \begin{cases} \theta \gamma^\theta / x^{\theta+1} & (\gamma \leq x), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつパレート分布に従う確率変数列とする. ただし, $\theta > 0$, $\gamma > 0$ とする. また, γ が事前密度

$$\pi(\gamma; \eta, \xi) = \begin{cases} \eta \xi^\eta / \gamma^{\eta+1} & (\xi \leq \gamma), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつパレート分布に従うとする. ただし, $\eta > 0$, $\xi > 0$ とする. ここで, θ, η を既知とする. このとき, (2.1) において $b(\theta, \gamma) = \theta^{-1} \gamma^{-\theta}$, (2.2) において $\alpha(\gamma) = 1/\gamma$, $w(\gamma) = -\log \gamma$ であるから, (3.2) は

$$\frac{\eta}{n\theta - \eta} \left\{ \left(\frac{x_{(1)}}{\xi} \right)^{n\theta - \eta} - 1 \right\} = 1$$

となる. よって

$$\xi = \left(\frac{\eta}{n\theta} \right)^{1/(n\theta - \eta)} x_{(1)} =: \hat{\xi}^*(x_{(1)}) \quad (4.4)$$

のとき, $G(\xi)$ は最大値をとる. ゆえに, $\hat{\xi}^*$ は $\mathbf{X}$ の周辺密度 (3.1) を最大にし, $\hat{\xi}^{*'}(\gamma) > 0$ となることに注意. また, (3.4), (4.4) より γ の EB 推定量は

$$\hat{\gamma}_{EB}(\mathbf{X}) = \frac{\eta X_{(1)}}{\eta - 1} \cdot \frac{1 - \left(X_{(1)} / \hat{\xi}^* \right)^{\eta-1}}{1 - \left(X_{(1)} / \hat{\xi}^* \right)^\eta} = \frac{\eta X_{(1)}}{\eta - 1} \cdot \frac{1 - (n\theta/\eta)^{(\eta-1)/(n\theta-\eta)}}{1 - (n\theta/\eta)^{\eta/(n\theta-\eta)}}$$

になる. ここで, $n \rightarrow \infty$ のとき $\hat{\gamma}_{EB}(\mathbf{X})/X_{(1)}$ は 1 に概収束する. いま, $\alpha'(\gamma)/\alpha(\gamma) = -1/\gamma$, $w'(\gamma) = -1/\gamma$ となるから,

$$C = C(\eta, \gamma) = -\frac{\eta + 1}{\gamma}$$

となり, また, $k(\theta, \gamma) = \theta/\gamma$ となるから (3.15), (3.16) より $T_{EB} = n(\hat{\gamma}_{EB} - \gamma)$ について漸近平均, 漸近分散はそれぞれ

$$\begin{aligned} E_{\gamma} \left(\frac{\theta}{\gamma} T_{EB} \right) &= \frac{1 - \eta}{\theta n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right), \\ V_{\gamma} \left(\frac{\theta}{\gamma} T_{EB} \right) &= 1 + \frac{2}{\theta n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

になる.

5. おわりに

本稿では, 切断母数 γ と自然母数 θ をもつ片側切断指数型分布族において, θ が既知の場合に γ の経験的ベイズ推定量 $\hat{\gamma}_{EB}$ を求め, その漸近平均, 漸近分散を 2 次のオーダーまで求めた. その際, 事後密度が超母数 (hyperparameter) の推定量にも依存するために, 通常のベイズ推定量より面倒にはなるが, 得られた結果は類似していて, $T_{EB} = n(\hat{\gamma}_{EB} - \gamma)$ の漸近平均の $1/n$ のオーダーの項が事前分布の超母数に依存するが, その漸近分散は $1/n$ の項までは事前分布には無関係になる. さらに, θ の未知の場合にも, γ の経験的ベイズ推定問題を考えることができるが, 少し面倒になるであろう.

参考文献

- [A17] Akahira, M. (2017). *Statistical Estimation for Truncated Exponential Families*. Springer Briefs in Statistics, JSS Research Series in Statistics, Springer, Singapore.
- [Ar15] Arnold, B. C. (2015). *Pareto Distributions*. 2nd ed. CRC Press, Boca Raton.
- [BL84] Bar-Lev, S. K. (1984). Large sample properties of the MLE and MCLE for the natural parameter of a truncated exponential family. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **36**, Part A, 217–222.
- [JKB94] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions*. Vol. 1(2nd ed.), Wiley, New York.
- [LC98] Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. 2nd ed., Springer, New York.