

Inseparable coverings of surfaces

M. I. T. M. Artin

この一連の講演で、次の四つの話題について述べる。

- 1) Inseparable coverings of surfaces
- 2) Supersingular K3 surfaces
- 3) Elkik's theorem
- 4) $\overset{e}{D}$ formations of cones

ここでは、第一の話題をとりあげる。

k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とし、 K を k 上の 2 変数代数函数体とする。このとき、明らかに $[K:K^p] = p^2 = [K^{\frac{1}{p}}:K]$ がなりたつ。よって $K \supseteq L \supseteq K^p$ なる中間体 L を考えれば、 $[L:K^p] = p$, $K = L(\alpha^{\frac{1}{p}})$ ($\alpha \in L$) となっている。以後このような L をとりあつかう。

例. K を k 上の 2 変数有理函数体 $k(x, y)$ とする。このとき、 $K^p = k(x^p, y^p) = k(x', y')$ ($x' = x^p$, $y' = y^p$) となる。
 k の標数が 0 の場合、よく知られているように Castelnuovo の

定理から, $k(x, y)$ の部分体 L で k 上の超越次数が 2 のものはやはり有理函数体 $k(u, v)$ になる。更に Zariski によって示されたように, k の標数が $p > 0$ のときでも K が L 上分離代数的なら, $L = k(u, v)$ となる。一般には, $L = k(x', y')^{(f)}$ となっている。

K が一般の場合に戻ろう。 $K \supset L \supset K^p$ とする。Jacobson の exponent 1 の純非分離拡大に関するガロア理論により, この中間体 L には K/k の微分全体のなす algebra $\text{Der}(K)$ の restricted p -Lie subalgebra $\mathcal{O}$ が束双対同型で対応する。すなわち $\mathcal{O} \ni \theta$ に対し, $\theta^p \in \mathcal{O}$, 又, $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{O}$ に対し, $[\theta_1, \theta_2] \in \mathcal{O}$. この L と $\mathcal{O}$ の対応は次のように与えられる。 $K \supset L \supset K^p$ に対し, $\mathcal{O} = \{\theta \in \text{Der}(K) \mid \theta(L) = 0\}$, 又 $\mathcal{O} \subset \text{Der}(K)$ に対し, $L = \{a \in K \mid \theta(a) = 0 \text{ for any } \theta \text{ in } \mathcal{O}\}$. 今の場合, $[K:K^p] = p^2$ であるから, $\dim_K \text{Der}(K) = 2$. よって, $K \neq L \neq K^p$ なら, L に対応する Lie subalgebra $\mathcal{O}$ の rank は 1. よって, K^* の元 a による積を除いて, $\text{Der}(K)$ の一つの元 θ によって, $\mathcal{O}$ は与えられる。このとき, $\theta^p = f\theta$, $f \in K^*$ となっている。そして $L = K^{\mathcal{O}} = \{a \in K \mid \theta(a) = 0\}$ となっている。

今 K/k の non-singular model X を考える。このとき, K^p/k の non-singular model として, X^p がとれ, しかも Frobenius map $f: X \rightarrow X^p$ は degree p^2 の finite ~~flat~~ flat な

morphism になっている。このとき、与えられた中間体 L に対し、 L/k の model Y を適当にとり、 $f: X \rightarrow X^P$ が、 $X \rightarrow Y \rightarrow X^P$ と分解するように出来る。何故なら、 $L \supset K \supset L \supset K^P$ であるから、 X の $L^{\frac{1}{p}}$ における正規化モデルを Z とするとき、 $Y = Z^P$ とおけばよい。したがって、 Y は通常 non-singular ではない。さて、 $\theta \in K\theta = 0$ が中間体 L に対応する $\text{Der}(k)$ の元とする。このとき、 θ は X 上の接ベクトル場と考えられる。今、 $\pi: X \rightarrow Y$ とすると、この π によって θ から得られる Y 上のベクトル場は 0 である。一般に $f: X \rightarrow X^P$ (f : Frobenius map) によって、 X 上のすべてのベクトル場は X^P 上で 0 にうつされる。

ここで morphism $\pi: X \rightarrow Y$ の fibres は

$$(\text{truncated exp}) \theta = 1 + t\theta + \frac{t^2}{2!}\theta^2 + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\theta^{p-1}$$

と考えられる。 $x \in X$ に対し、 $X \rightarrow Y$ の x における fibre は rank p の finite algebra で $k[t]/(t^p)$ に同型になる。

次に、 X, Y の invariants について考える。 $f: X \rightarrow X^P$ の invariants はすべて等しい。 C' を X^P 上の curve とするとき、 $f^{-1}(C') = PC$ となることから、 f によって与えられる対応 $\text{Pic } X^P \rightarrow \text{Pic } X$ は、 $\text{Pic } X \xrightarrow{\times P} \text{Pic } X$ によって与えられる。今、 $\text{Pic } Y$ を $\text{Pic}(Y - \delta)$ によって定義する。

(ここで, S は Y の特異点からなる有限集合)。すなわち, Y の Weil 因子の全体とする。 $\text{Pic } X^P \rightarrow \text{Pic } Y \rightarrow \text{Pic } X$ において, $\text{Pic } Y \rightarrow \text{Pic } X$ は finite kernel, finite coker をもつ。特に, $\dim \text{Pic } Y = \dim \text{Pic } X$ を得る。 $\bar{Y}$ を Y の resolution of singularities とすると, $\text{Pic}^\circ \bar{Y} \subset \text{Pic } Y$, $\dim \text{Pic } \bar{Y} = \dim \text{Pic } X$ となる。もし $h^2(\bar{Y}, \theta_{\bar{Y}}) \neq h^2(X, \theta_X)$ なら, この違いは, Pic における nilpotents から生ずる。

Problem 1. (Abhyankar) If we allow ^blowing up X , what normal form can one get for local structure of Y ?

Problem 2. Given Y non-singular surface, does there exist $X \xrightarrow{\text{finite}} Y$ such that $\text{Pic } X$ is reduced?

次に, degree P の morphism $\pi: X \rightarrow Y$ において, X, Y が共に non-singular のときを考える。 Y は $K = k(X)$ の微分 θ に対応しているとし, $Y = X/\theta$ とかくことにする。このとき, X の canonical divisor K_X を K_Y によって計算することを考える。その答は次の通りである。

$$K_X = \pi^*(K_Y) + (p-1)(\text{div. of } \theta).$$

(ここで, θ はこの場合, isolated 0 をもらえないことを注意しておく。)

(証明) $W_x = \wedge^2 \Omega_x^1$, $W_y = \wedge^2 \Omega_y^1$ とおくとき,

Grothendieck によれば, $W_x = \text{Hom}_{\mathcal{O}_y}(\mathcal{O}_x, W_y)$ (as $\mathcal{O}_y$ -module).

$W_x \otimes \pi^* W_y^{-1} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_y}(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y)$ となるから, 右辺を計算すればよい。今, $\mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_x$ が split するから, $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_x = \mathcal{O} = \mathcal{O}_x \otimes M$ なる分解を考える。ここで, $M^p = \mathcal{O}_x$, M は局所的に 1 つの元で与えられ, fibres は $k[z]/z^p = 0$ 。

このとき, $\mathcal{A}^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{O}, \mathcal{O}_x) = \pi^*(\text{Hom}_{\mathcal{O}_y}(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y))$

$$\mathcal{A}^*/M\mathcal{A}^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_y}(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y)$$

かなりたら, これから, $M^{p-1} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_y}(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y)^{-1}$ が得られる。

一方, $L \subset T$ を θ で生成される line subbundle とするとき, $T \simeq L \oplus T/L$ (locally)。そして, $T \otimes \Omega^1 \rightarrow \mathcal{O}_x$ なる natural morphism を考えることにより, $L \simeq (M/M^2)^{-1}$ が分る。よって

$$L^{\otimes p-1} \simeq M^{p-1} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_y}(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y)^{-1} \quad (\text{証了})$$

Problem 3. What surfaces X admit holomorphic tangent fields

$\theta \in H^0(X, T)$?

この問題については, 二つの場合が考えられる。

- (a) $\theta_1 \wedge \theta_2 \neq 0$ となるような二つの tangent fields θ_1, θ_2 が存在する。
- (b) すべての global tangent fields は, T の一つの line subbundle L に含まれる。このとき, $\theta^p // \theta$ (pararell).
よって, $Y = X/\theta$ が存在する。

定理。case (a) は classical situation のときのみおこる。
すなわち, X がアーベル多様体か, 有理曲面か, elliptic ruled のときのみ。

(b) の場合, tangent field をもつ K3 曲面 (i.e., $P_g = P_a = 1, K = 0$) が存在するかどうか知られていない。

定理。 X が K3 曲面か Enriques 曲面 (i.e., $P_g = P_a = 0, 2K = 0$) のとき, もし holomorphic tangent field θ をもてば,
 $Y = X/\theta$ は有理曲面である。

系。 k の標数が 2 でないなら, Enriques 曲面は, holomorphic tangent field をもたない。

k の標数が 2 のときには, unirational K3 曲面が存在す

る。この曲面については, tangent field が存在しないように思われる。

Problem 4. Classify unirational surfaces.

すなわち, X が unirational のとき,

(a) Pic は $\dim 0$, (b) $b_2 = p = \text{rank of Néron-Severi group } N(X)$, (c) ?

Problem 4'. Working locally with $k[[x, y]]$ or $k\{x, y\}$, what local rings are purely inseparable over these rings ?

Problem 5. Given a surface Y , does there exist $X \rightarrow Y$ generically finite such that X lifts to characteristic 0 ?

(柳原 弘志 記)