

球面の2進分割など

(出原氏の発表に対する コメント)

清水 達雄(清水建設技研)

集合と余集合を、「まる」の内・外で示す図解法は、オイラーあるいはヴェンの名で、よく知られている。

集合二つでは、その「まる」の切りあいでの4領域で内・外の条件の組合わせが示される。三つでは8領域、ここまでは「まる」は幾何学的の円周でよいのだが、4集合以上では、いびつな形がいりようになる。へこみもあってよいが、領域の分割なのだから、閉じた曲線で、自分自身と交わることのないもの。

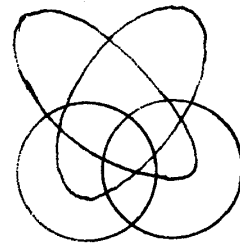
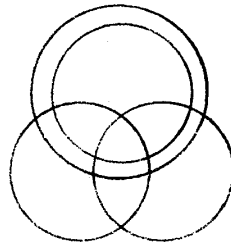
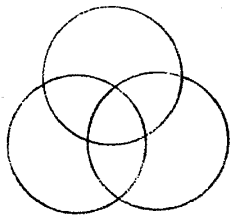
なお連続性を要請すれば、ジョルダン閉曲線となって、それぞれ単独では平面を内・外に分割する。

このそれぞれの内・外という条件の組合わせとして、曲線 n 個で、ちょうど 2^n の領域に、平面を分割するようにしたい。そのような曲線の描き方、つねに描けることの証明を考える。

問題は出原榮一氏の発表「図表現と図的特性」への質疑から自然に起こったのだが、事柄は簡単でも、証明はそれほど簡単ではない。

書食をとりへの道すがらの「証明」の間違ひは、書食中に解った。それから考えての証明を、出原氏にお渡ししたのだが、これが実は不完全だった。小さな見落としはすぐ訂正したのだが、なお大事な論点は見逃していた。本稿は、三度目の正直のつもり。

$n=3$ までは問題ない。3から4へ進めるのだが、一つの輪を二重丸にかえる。その周は4部に切られている。その各部分の平行線を交差するように替える。4が偶数だから、この変更で一つの輪になってしまうことはなく、4回交差する二つの輪になる。これらと、もとからの輪二つとの四つで解になる。



この考え方で、一般の n に対する解が作れるわけだが、注意としてまず、交点はすべて十字点で*点など多重交差は避ける。そうしておけば、輪のふくらましが位置関係を破らない。

ところで大切な区別が、 $n = 4$ から 5 へ進めるときに出てくる。2 重丸にかえる輪はどれでもよいわけではない。輪の上の交点数を数えると

8 ヶのが二つ、6 ヶのが二つある。6 ヶのを 2 重丸にかえるのでは、目的が達せられない。8 ヶのを 2 重丸にかえ、8 回交差に変える。一般に、交点数が 2^{n-1} の輪を選んで、2 重丸にかえ、 2^{n-1} 回交差させる。これで交点数が 2^n の輪が一对えられる。そこで帰納法がつぎに進められる。

研究会の折には、この大切な条件を見逃していた。

ジョルダン閉曲線 n 箇を適当に描き、そのそれぞれの内・外という条件の組合わせとして、ちょうど 2^n 箇の領域に平面をわけ、かつ交点数 2^{n-1} 箇の曲線があるようにすること。

この形にすると、証明法が見えてくる。

交点数はつねに偶数だが、最大限度 2^{n-1} ということは、ちょうど 2^n 箇に、内・外という条件の組合わせとしてわけている、ということから出てくる。この最大交点数の曲線を、傾補線と呼ぶことにする。

$n = 3$ のときは例外的で、三つとも候補線なのだが、本稿の方法で進める限り、 $n = 4$ では候補線はつねに二つある。もっとくわしく、交点数の分布、在りようがきめられる。

交点線

2^{n-1} 箇の、候補線が2箇

$3 \cdot 2^{n-3}, 4 \cdot 2^{n-4}, \dots, (n-2) \cdot 2^2$ のが1箇ずつ $(n-1) \cdot 2$ のが2箇

合計して、曲線 n 箇、また点数のほうは、のべ箇数で

$$2 \cdot 2^{n-1}$$

$$+ 3 (2^{n-3} + 2^{n-4} + \dots + 2^2 + 2 \cdot 2)$$

$$+ (2^{n-4} + \dots + 2 \cdot 2)$$

$$+ \dots + 2 \cdot 2$$

$$= 2^n + 3 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^2$$

$$= 2^{n+1} - 4$$

これは、のべ箇数で、どの交点も2重に数えられているから、実数としては、半分の

$$2^n - 2$$

交点間の線部分のほうは、のべ点数とおなじで、 $2^{n+1} - 4$

面部分の数は、 2^n . そこで

面－線＋点

$$= 2^n - (2^{n+1} - 4) + (2^n - 2), = 2$$

すなわち、オイラーの定理にいう通り。その 2^n 箇の面部分のうち、

3 辺形 2^{n-1} 箇

4 辺形 2^{n-2} 箇

(n-1) 辺形 2^3 箇

n 辺形 2^3 箇

のべ辺数 $2^{n+2} - 2^3 = (2^{n+1} - 4) \times 2$, 線実数の倍。

こうした関係が、帰納法の手順から確かめられる。

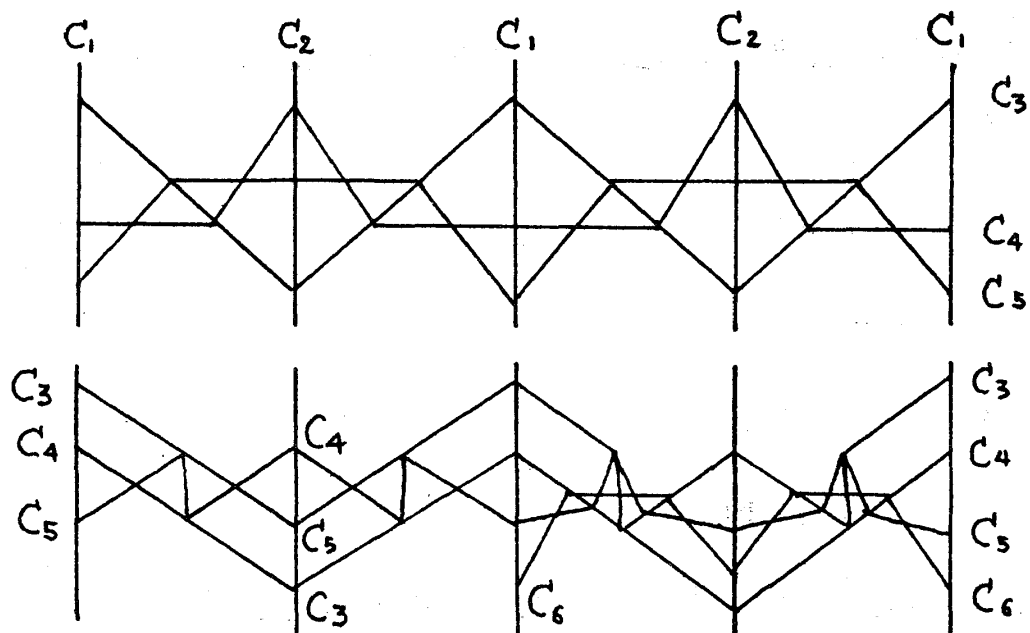
さて、その 2^n 部分への分割の実際の姿だか、対称性が見易いよう、球面の分割として考える。n = 1, 2, 3 までは、大円を直交させればよい。4 以上では 3 辺形, 2^{n-1} 箇のつらなる帯を、赤道部分におく。これは候補線の一つを 2 重化し交差させるところで、生ずるもの。4 辺形以上は、その両側、辺数最大のが両極に集まる。

そこまでは、よいのだが、n = 6

では、意外にも、南北極の交換による対称性が破れる。候補のどちらを倍化するかによって、極の向きがきまる。細胞分裂でいう、極性の発現！

そのさき、n = 7 では、候補線の選び方で、組合わせ的にことなった 2 型が、現れる。考えてみれば、一意性の保証は、もともとない。

普通の世界地図の描き方で、n = 5 のときの分割、および 5 から 6 への移行を示しておこう。



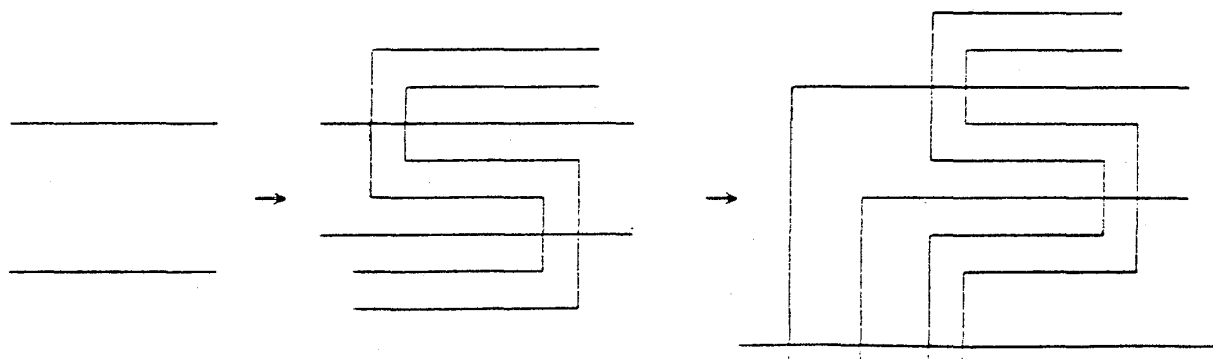
さて、集合の内・外、あるいは真理値 0, 1 というのを、多値にしたら、というお話もあった。

同心円で、多領域への分割を示すとして、その二組を交わせると、3 値の場合に 10 領域で一つ重複する。同心円の代わりに平行線を使って、この重複を避ける。

一般には、曲線までひろげた平行な線をレールと呼ぶことにする。本数 m によってモノレール、並レール、3 条レール、その m レールの 2 組で、 $(m+1)^2$ 領域への分割ができる。

もっと一般に、 m レール n 組で、それぞれの組による分割の組合せとしての、 $(m+1)^n$ 領域への分割ができる。

これは、いわゆるブストロフェドン（牛耕）、往復書きの要領でやればよい。たとえば 2 レールによる 3 領域をせまい 2 レールで、S 字にたどる。その繰返し。



モノレールの場合の、数式表示として、たとえば

$$C_n : (X_n(t), y_n(t)), -1 \leq t \leq 1$$

ここでまず

$$X_1(t) \quad y_1(t)$$

$$= t^*, \quad = -1, \quad -1 \leq t \leq -1/2$$

$$= 0, \quad = 2t, \quad -1/2 \leq t \leq 1/2$$

$$= t^*, \quad = 1, \quad +1/2 \leq t \leq 1$$

ただし、ここで

$$t^* \begin{cases} = 2t + 1, & t \leq 0 \\ = 2t - 1, & 0 < t \end{cases}$$

それから

$$X_{n+1}(t) \begin{cases} = (X_n(t^*) - 1) / 2, & t \leq 0 \\ = (X_n(t^*) + 1) / 2, & 0 < t \end{cases}$$

λ を $0 < \lambda < 1$ のような定数として, $n > 1$ では

$$y_{n+1}(t) = \lambda y_n(t^*)$$

$$n=1 \text{ のときだけ } y_2(t) = \begin{cases} \lambda y_1(t^*), & t \leq 0 \\ -\lambda y_1(t^*), & 0 < t \end{cases}$$